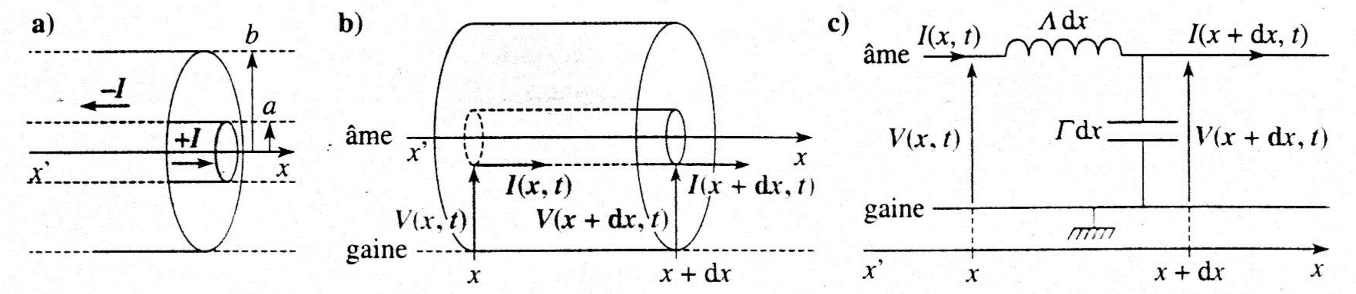
TD EM5 : PROPAGATION

Exercice 1 : Propagation dans un câble coaxial

La propagation d'ondes électromagnétiques dans un câble coaxial (câble TV ou câble pouvant être utilisé en travaux pratiques) peut être étudiée à partir d'un modèle de ligne électrique à constantes réparties.
Pour cette propagation, on notera Λ et Γ les inductances et capacité par unité de longueur (exprimées en $H.m^{-1}$ et $F.m^{-1}$ respectivement).
On a établi dans les TD EM1 (exercice 6) et EM2 (exercice 7) les expressions des capacité Γ et inductance Λ linéiques d'un câble coaxial dont l'âme et la gaine ont pour rayons respectifs a et b :

$$\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

La ligne est ainsi représentée par une succession de tronçons élémentaires (cf figures), de longueur dx, considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance $dL = \Lambda\, dx$ et une capacité $dC = \Gamma\, dx$.
On négligera ici toute perte (résistance de la ligne, admittance de fuite entre l'âme et la gaine, …).



On a établi dans l'exercice 12 du TD EM3 :

- Les équations de couplages liant la tension V(x,t) et le courant I(x,t) dans la ligne :
$$\Lambda\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{et} \quad \Gamma\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x}$$
- L'équation de propagation associée :
$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

A) Transfert d'énergie dans la ligne électrique

1) Un signal de tension, variant dans le temps, se propage sous la forme : $V(x,t) = f(u) + g(v)$ avec $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$. Vérifier que V(x,t) est bien solution de l'équation de propagation de d'Alembert unidimensionnelle.

2) En reprenant une des deux équations couplant V(x,t) et I(x,t), exprimer le courant I(x,t) en fonction de f et g.

3) Exprimer la puissance instantanée P(x,t) transférée de gauche à droite dans la ligne, à l'abscisse x et à l'instant t, en fonction de V et I, puis de f et g. Commenter le résultat.
Exprimer de même la densité linéique d'énergie e(x,t), c'est-à-dire l'énergie électromagnétique stockée dans la ligne par unité de longueur.

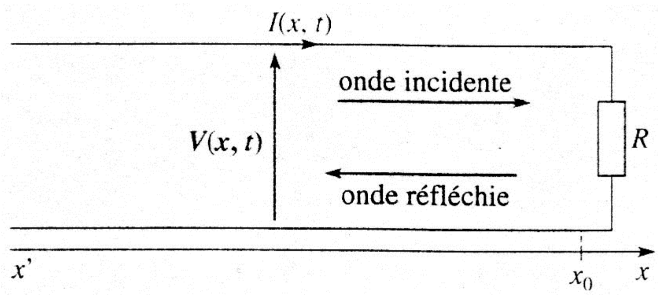
4) Montrer que les grandeurs e(x,t) et P(x,t) sont liées par : $\dfrac{\partial e(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x}$.

Pourquoi peut-on qualifier cette équation de « bilan énergétique local » ?

5) En considérant le transfert d'énergie associé à une onde de type « f », proposer la définition d'une vitesse associée à ces transferts, appelée vitesse d'énergie. Calculer cette vitesse.

B) <u>Réflexion du signal électrique en bout de ligne</u>

La ligne électrique transmet un signal de tension $V_i(x,t) = f(u)$, avec $u = t - \dfrac{x}{c}$. En bout de ligne, que nous représentons par l'abscisse $x = x_0 = 0$, les deux conducteurs sont reliés par une résistance R. Le signal incident $V_i(x,t)$ donne naissance à un signal réfléchi : $V_r(x,t) = g(v)$, avec $v = t + \dfrac{x}{c}$ (cf figure ci-contre).



6) Rappeler l'expression de l'onde de courant I(x,t) associée à $V(x,t) = V_i(x,t) + V_r(x,t)$.

7) Exprimer $V_r(x,t)$ au moyen de la fonction f.

8) Etudier et commenter les cas particuliers suivants :

a) R infinie (extrémité ouverte) ;

b) R = 0 (extrémité en court-circuit).

9) Pour une valeur R_c de R, appelée résistance caractéristique, le signal réfléchi est nul. Déterminer R_c. Quel est l'intérêt d'un tel branchement ?

Exercice 2 : Superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques électromagnétiques

Une O.P.P.M. électromagnétique de pulsation ω se propage dans le vide. Son vecteur d'onde est : $\vec{k}_1 = k_1\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z\,)$.

Le champ électrique est : $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r}\,)\,\vec{e}_y$.

1) Quelle est la polarisation de cette onde ? Que vaut k_1 ? Quel est le champ magnétique associé à cette onde ?

Une deuxième onde, de mêmes fréquence, amplitude et polarisation, dont le vecteur d'onde est :
$\vec{k}_2 = k_2\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_z\,)$,
est superposée à la première. Ces deux ondes sont en phase à l'origine du système de coordonnées cartésiennes utilisé.

2) Exprimer les champs électrique et magnétique de l'onde globale.

3) Quelle est la direction de propagation de cette onde ? L'onde résultante est-elle plane ? stationnaire ? Quelle vitesse de phase peut-on associer à cette onde ? Quelle est la particularité de cette vitesse ?

4) Quelle est la valeur moyenne temporelle $\langle\vec{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde. A-t-on $\langle\vec{\Pi}\rangle = \langle\vec{\Pi}_1\rangle + \langle\vec{\Pi}_2\rangle$? Commenter.

5) Quelle est l'énergie moyenne transportée par unité de temps et de surface à travers un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde résultante ?

6) Quelle vitesse d'énergie peut-on associer à cette onde ? Commenter ce résultat.

Exercice 3 : Réflexion et transmission à l'interface de deux milieux transparents

Deux milieux semi-infinis, transparents, d'indices n_1 et n_2, occupent les demi-espaces $z \leq 0$ et $z \geq 0$. Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$ arrive depuis les $z \leq 0$ en incidence normale sur l'interface.

1) On rappelle que la célérité des ondes dans un milieu d'indice n est égale à $\frac{c}{n}$. En déduire la relation entre k et ω pour une onde dans un milieu transparent d'indice n.

2) On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique. Donner l'expression des champs électrique et magnétique incidents, réfléchis et transmis en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

3) Calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ grâce aux conditions aux limites. Commenter.

4) Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie, définis comme le rapport du module du vecteur de Poynting moyen réfléchi (respectivement transmis) par celui du vecteur de Poynting moyen incident. Quelle relation existe-t-il entre R et T, et quel est son sens physique ?

Donnée : On admet ici que les champs électrique et magnétique sont continus en $z = 0$.

Exercice 4 : Cavité résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre $z = 0$ et $z = a$. On s'intéresse à un champ électromagnétique, qui est la superposition de deux ondes planes progressives (dans la direction z) monochromatiques polarisées rectilignement dans la direction $\vec{u}_x$ de sens de propagation opposés.

1) Ecrire la forme de chacune de ces deux ondes, puis en déduire la forme exacte du champ électrique dans la cavité.

2) Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes λ_n peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences f_n associées ?

3) Comment appeler ce phénomène ? Donner une analogie en électrocinétique. Que se passe-t-il si on essaie de créer un champ électromagnétique de fréquence différente de f_n ?

4) Tracer sur un même graphe l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les trois plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?

5) En admettant que, dans le domaine de l'acoustique, un tube ouvert à ses deux extrémités soit régi par les mêmes équations qu'une cavité résonante, identifier les tubes d'une flûte de Pan produisant les sons aigus et ceux produisant les sons graves. On supposera que le mode fondamental $n = 1$ est prédominant.

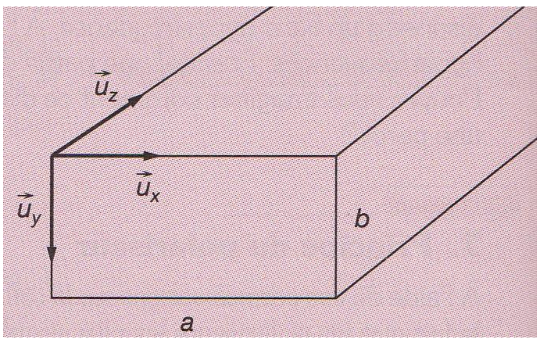
6) Une cavité de forme quelconque a pour taille typique d. Que peut-on dire de la longueur d'onde d'une onde électromagnétique stationnaire existant dans cette cavité ?

Exercice 5 : Propagation guidée

Une cavité vide, invariante par translation selon $\vec{u}_z$, est taillée dans un conducteur parfait. Sa section est un rectangle de largeur a et de hauteur b (cf figure). On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique le long de la direction $\vec{u}_z$:

$$\vec{\underline{E}}(M,t) = f(x,y)\exp\left(i\left(\omega t - kz\right)\right)\vec{u}_y$$

où f est une fonction à déterminer.



1) Commenter la forme de cette onde et notamment le fait que f ne dépende pas de z.
2) En utilisant une équation de Maxwell, montrer que f ne dépend en fait que d'une seule variable.
3) A l'aide de l'équation de propagation du champ électrique, trouver une équation différentielle en f.
4) La résoudre en utilisant les conditions aux limites.
5) Exprimer le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ et commenter le résultat obtenu.
6) Montrer que ce champ électrique ne peut se propager qu'à partir d'une fréquence minimale f_c. Quel type de filtrage effectue le guide ? Calculer f_c pour a = 1 cm et préciser le domaine spectral correspondant.

Rappel : vu la présence d'un conducteur parfait, le champ électrique tangentiel doit s'annuler sur les parois de la cavité.

Exercice 6 : Traversée de l'interface atmosphère-ionosphère

1) <u>Propagation ionosphérique</u>

L'ionosphère est une couche atmosphérique située à très haute altitude (au-delà de 60 km), que l'on assimilera à un gaz ionisé (plasma) globalement électriquement neutre, constitué de N électrons libres de masse m et de charge (-e) et de N ions positifs de masse M et de charge (+e) par unité de volume. Ce gaz est un milieu raréfié de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique égales à celles du vide, contenant des particules chargées dont les interactions sont négligées.

Données :
$e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $M = 1{,}67.10^{-27}$ kg ; $N = 6.10^{11}$ électrons.m^{-3} ; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} ; $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi\,10^9}$ F.m^{-1}.

Une onde électromagnétique plane, monochromatique, de pulsation ω se propage dans ce milieu dans la direction (Oz). Le champ électrique de cette onde s'écrit $\underline{\vec{E}_2} = \underline{E_{02}}\, e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \vec{z})}\, \vec{e}_x$, où $\vec{k}_2 = k_2\, \vec{e}_z$ désigne le vecteur d'onde.

a) Etudier les mouvements des électrons et des ions induits par l'onde électromagnétique. On notera $\underline{\vec{v}_e}$ et $\underline{\vec{v}_i}$ les vecteurs vitesses complexes correspondants. Montrer que la conductivité du milieu peut être assimilée à $\gamma = -\dfrac{j\,N\,e^2}{m\,\omega}$.

b) Montrer que la relation de dispersion peut se mettre sous la forme $k_2^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ et déterminer la fréquence de plasma $f_p = \dfrac{\omega_p}{2\,\pi}$ en fonction de N, e, m et ε_0. Calculer la valeur numérique de f_p.

c) Montrer que l'on peut étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans l'ionosphère comme si celle-ci était un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope dont on exprimera le carré de l'indice complexe $\underline{n}$ en fonction de ω et de ω_p. Le milieu est-il dispersif ?

2) <u>Réflexion et réfraction ionosphérique</u>

L'atmosphère (dont les propriétés seront supposées être celles du vide) est dans la région z < 0, et l'ionosphère dans la région z > 0. Une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement se propage de la Terre vers l'ionosphère. Son champ électrique $\underline{\vec{E}_1}$ s'écrit $\underline{\vec{E}_1} = \underline{E_{01}}\, e^{j(\omega t - kz)}\, \vec{e}_x$. A l'interface, cette onde donne naissance à une onde transmise et à une onde réfléchie dont les champs électriques respectifs sont notés $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_1'$.

a) Ecrire les conditions aux limites (en z = 0) que doivent vérifier les champs électriques et magnétiques de ces trois ondes. En déduire deux relations qui lient les amplitudes $\underline{E_{01}}$, $\underline{E_{01}'}$, $\underline{E_{02}}$ et le seul paramètre $\underline{n}$.

b) Déterminer l'expression du coefficient de réflexion en amplitude défini par $\underline{r} = \dfrac{\underline{E_{01}'}}{\underline{E_{01}}}$ en fonction de $\underline{n}$.

En déduire le facteur de réflexion en puissance R, en fonction de ω et de ω_p.

α) Pour $\omega < \omega_p$, comment peut-on qualifier l'interface atmosphère-ionosphère ?

β) Pour $\omega > \omega_p$, calculer les valeurs numériques de R pour les fréquences f = 7 MHz et f = 8 MHz.

γ) Tracer l'allure du graphe de R en fonction de la fréquence f.

c) Quelle est la relation entre le facteur de réflexion en puissance R et le facteur de transmission en puissance T ? Sur un même schéma, donner l'allure du graphe de T en fonction de la fréquence f.

d) Un poste émetteur, situé au niveau de la mer, émet une onde assimilée à une onde plane, monochromatique de fréquence $f > f_p$, qui arrive sous incidence oblique (angle i_1) sur l'interface atmosphère-ionosphère. Calculer le cosinus de l'angle limite i_{1L} à partir duquel l'onde incidente est totalement réfléchie vers le sol, en fonction de la fréquence f de l'émetteur et de la fréquence de plasma f_p. Faire l'application numérique pour une fréquence f = 12 MHz.