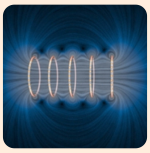

Electromagnétisme

Chapitre 2 : Potentiel électrostatique

Sommaire

Nous nous proposons dans ce chapitre de décrire l'interaction électrostatique d'un point de vue énergétique, ce qui nous amènera à définir la notion de potentiel électrostatique, dont on verra qu'il s'identifie au potentiel électrique défini en électrocinétique.

1 Notion de potentiel

1.1 Travail de la force électrostatique

Considérons une charge q' soumise à un champ potentiel $\mathbf{E}$. Montrons que le travail de la force $\mathbf{F}$ exercée par ce potentiel sur la charge entre deux points A et B est proportionnel à la circulation C du champ électrostatique entre ces deux points :

▷

1.2 Circulation du champ électrostatique

Exprimons la circulation du champ életrostatique dans le cas d'un champ créé par une charge ponctuelle q situé à l'origine d'un repère sphérique :

▷

La circulation du champ **E** ne dépend que des points A et B et est indépendante du chemin suivi. Compte tenu du principe de superposition, ce résultat se généralise à toute distribution de charge.

La circulation du champ électrostatique **E** est conservative : elle est indépendante du chemin suivi.

Conséquence : La circulation du champ **E** le long d'un contour fermé est nulle :

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0 \tag{4}$$

1.3 Définition du potentiel

La circulation peut s'exprimer comme la variation d'une fonction des coordonnées d'espace, ce qui nous amène à définir le *potentiel électrostatique* :

Circulation de E et potentiel électrostatique :

La circulation du champ électrostatique **E** entre deux points A et B peut s'exprimer comme la variation d'une fonction scalaire, notée V, définie à une constante près et appelée *potentiel électrostatique* :

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -(V(B) - V(A)) \tag{5}$$

soit, sous forme locale :

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\mathrm{d}V \tag{6}$$

Le potentiel s'exprime en Volt (symbole : V).

Par ailleurs, nous avons vu dans le polycopié « Analyse vectorielle », qu'un champ vectoriel à circulation conservative peut s'exprimer comme le gradient d'un champ scalaire (défini à une constante près). Cette propriété du champ **E** nous permet de l'exprimer directement à partir du potentiel électrostatique :

Expression du champ E en fonction du potentiel électrostatique :

Le champ électrostatique **E** correspond à l'opposé du gradient du potentiel électrostatique V : :

$$\mathbf{E}(M) = -\boldsymbol{\nabla} V(M) \tag{7}$$

L'unité du champ électrostatique est donc bien le $\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

1.4 Potentiel des différentes distributions de charge

Exprimons le potentiel créé par une charge ponctuelle :

▷

On a montré que le champ électrostatique est une grandeur additive : le champ total créé par une distribution est la somme des champs créés par chaque partie de la distribution (théorème de superposition).

D'après l'équation (7Définition du potentielequation.1.7), il est clair que le théorème de superposition est aussi valable pour le potentiel, puisque le gradient est un opérateur linéaire : le potentiel total créé par une distribution est la somme des potentiels créés par chaque partie de la distribution. On admettra que les expressions suivantes ne sont valables que dans le cadre de distributions d'extension finie (nombre fini de charges).

- Pour une charge ponctuelle :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{PM}} \tag{8}$$

- Pour une distribution finie de charges discontinues :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{P_iM}} \tag{9}$$

- Pour une distribution volumique d'extension finie :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)\mathrm{d}\tau}{PM}} \tag{10}$$

- Pour une distribution surfacique d'extension finie :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma(P)\mathrm{d}S}{PM}} \tag{11}$$

- Pour une distribution volumique d'extension finie :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{D}} \frac{\lambda(P)\mathrm{d}l}{PM}} \tag{12}$$

Pour les distributions discrètes, le potentiel n'est pas défini aux points où se trouvent les charges. En ce qui concerne les distributions continues, on admettra que le potentiel électrique est défini et continu en tout point de l'espace dans le cas des distributions volumiques et surfaciques et qu'il n'est pas défini en tout point d'une distribution linéique de charge. On le vérifiera sur des exemples de distributions.

	E	V
distribution volumique	défini et continu	défini et continu
distribution surfacique	défini dans tout l'espace mais subit une discontinuité à la traversée de la surface.	défini et continu dans tout l'espace
distribution linéique	non défini sur la distribution	non défini sur la distribution

1.5 Invariances et symétries du potentiel

Par un raisonnement similaire à celui tenu pour le champ électrostatique, le potentiel possède les mêmes invariances que la distribution de charge qui en est la cause. Les invariances de la distribution de charges permettent donc de déterminer la dépendance du potentiel avec la position du point M où il est évalué :

- Si la distribution admet un plan de symétrie, et en nommant M et M' deux points symétriques par rapport à ce plan, alors :
$$\boxed{V(M) = V(M')} \tag{13}$$
La démonstration est similaire à celle invoquée pour le champ électrostatique.

- Si la distribution admet un plan d'antisymétrie, on a : :
$$\boxed{V(M') = -V(M)} \tag{14}$$

1.6 Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Surface équipotentielle :

On appelle *surface équipotentielle* une surface en tout point de laquelle le potentiel est constant :

$$\mathrm{d}V = 0$$

Imaginons un déplacement élémentaire **dl** au voisinage d'un point M appartenant à une équipotentielle, tout en restant sur cette équipotentielle :

▷

Considérons maintenant un déplacement élémentaire **dl** le long d'une ligne de champ :

▷

Les lignes de champ, tangentes aux champ, sont normales aux surfaces équipotentielles. Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

1.7 Lien avec l'électrocinétique : qu'est-ce qu'une tension ?

Dans le cas simple d'un résistor, on fait le lien entre la notion de tension définie en électrocinétique et la notion de potentiel électrique que l'on a défini dans le présent chapitre. On assimile le résistor à un parallélépipède de longueur L et de section S. On admet que l'intérieur du conducteur est assimilable au vide dans lequel circulent les électrons libres. On admet que le générateur auquel est branché le résistor génère un champ électrostatique uniforme à l'intérieur du résistor, et le champ est dirigé le long du résistor :

▷

On retiendra :

- c'est le champ électrostatique généré par le générateur qui met en mouvement les électrons : c'est l'explication mécanique de l'existence du courant dans un résistor relié à un générateur ;
- la tension aux bornes du résistor est une différence de potentiel électrostatique. Elle est reliée au champ électrostatique qui met en mouvement les électrons : on comprend maintenant la signification physique du « potentiel », que l'on avait défini en électrocinétique ;
- dans un résistor, les électrons « remontent » le long du potentiel ; le courant le « descend » donc.

2 Exemples de calculs du potentiel

2.1 Méthodes

On peut déterminer le potentiel créé par une distribution de charge de deux manières différentes.

Calcul à partir du champ électrostatique (à préférer, si possible) :

Si le champ électrostatique est connu ou facile à déterminer (notamment à l'aide du théorème de Gauss que l'on étudiera dans le chapitre suivant), on peut utiliser la relation locale entre champ et potentiel :

(i) S'il est inconnu, calculer le champ électrostatique, c'est-à-dire le gradient du potentiel ($\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$), en utilisant le théorème de Gauss.

(ii) A partir de l'expression du gradient (donnée en coordonnées cylindriques et sphériques), intégrer les dérivées partielles pour déterminer le potentiel. Déterminer la constante d'intégration en choisissant une valeur arbitraire du potentiel en un point de l'espace.

(iii) Invoquer la continuité du potentiel en tout point de l'espace dans le cas de distributions volumiques et surfaciques, afin de déterminer une ou plusieurs constantes d'intégration.

Calcul direct à partir des expressions intégrales (distributions finies uniquement) :

Si le champ ne peut pas être calculé facilement, on peut effectuer le calcul direct (expressions intégrales) sur le potentiel plutôt que sur le champ. En effet, intégrer des fonctions scalaires est souvent plus simple que d'intégrer des fonctions vectorielles.

(i) Repérer les symétries et invariances de la distribution de charge. En déduire la dépendance du potentiel avec les coordonnées de position.

(ii) Calculer directement le potentiel à partir des expressions intégrales données dans la section 1.4Potentiel des différentes distributions de chargesubsection.1.4

(iii) En déduire le champ électrostatique (si demandé) en calculant le gradient du potentiel.

2.2 Potentiel sur l'axe d'une circonférence uniformément chargée

> Soit une circonférence de centre O et de rayon R portant, en tout point, une densité linéique de charge λ. On souhaite connaître le potentiel et le champ électrostatique créé par la distribution en un point M de l'axe (Oz) de la circonférence.
> *Donnée :* gradient d'un champ scalaire f en coordonnées cylindriques :
> $$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e_z} \tag{15}$$

▷

Remarque : quand $z \to \infty$, on retrouve l'expression du champ créé par une charge ponctuelle O :

▷

2.3 Potentiel créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé

> Calculer le potentiel créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé. *Donnée :* gradient d'un champ scalaire f en coordonnées cylindriques :
> $$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e_z} \tag{16}$$

▷

On constate, comme annoncé plus haut, que le potentiel, tout comme le champ $\mathbf{E}$, n'est pas défini sur la distribution linéique.

2.4 Potentiel créé par un plan infini uniformément chargé

> Calculer le potentiel créé par un plan infini uniformément chargé.

▷

On remarque cette fois-ci que, contrairement au champ, le potentiel est défini en tout point de la distribution surfacique.

3 Energie potentielle

3.1 Travail de la force électrostatique et énergie potentielle

Reprenons l'expression (2Travail de la force électrostatiqueequation.1.2) du travail W_{AB} exercé par la force électrostatique exercé par un champ électrostatique $\mathbf{E}$:

$$W_{AB} = q' \int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{17}$$

Le travail est donc proportionnel à la circulation du champ électrostatique, qui est conservative comme on l'a vu plus haut. Le travail est donc indépendant du chemin suivi comme on peut aussi le constater en remplaçant dans (17Travail de la force électrostatique et énergie potentielleequation.3.17) $\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ par $-\mathrm{d}V$:

$$W_{AB} = -q' \int_A^B \mathrm{d}V = -q' \left(V(B) - V(A)\right) \tag{18}$$

Définissons la fonction énergie potentielle électrostatique :

Energie potentielle électrostatique :

L'énergie potentielle életrostatique $E_p(M)$ de la charge q' du fait de sa position M dans le champ scalaire V est définie par la relation :

$$E_p(M) = q'V(M) \tag{19}$$

Travail de la force électrostatique :

Le travail peut donc s'exprimer comme l'opposé de la variation de la fonction énergie potentielle :

$$W_{AB} = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) \tag{20}$$

ce qui donne, en notation différentielle :

$$\delta W_{AB} = -\mathrm{d}E_p$$

3.2 Energie potentielle d'interaction entre deux charges

Par définition, l'énergie potentielle d'interaction entre deux charges est le travail nécessaire pour amener de manière quasi-statique deux charges ponctuelles q et q', initialement à l'infini et au repos, à des positions finales M et M' et au repos. Calculons l'énergie potentielle d'interaction entre deux charges :

▷

On prendra garde à ne pas confondre « l'énergie potentielle d'interaction de 2 charges », avec l'énergie potentielle d'une charge soumise à un champ électrostatique extérieur