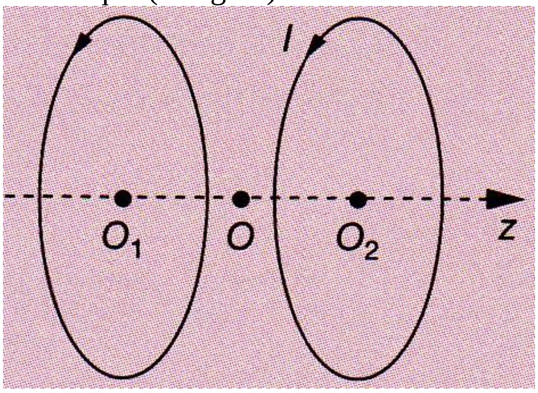
TD EM2 : MAGNETOSTATIQUE

Exercice 1 : Modèle volumique pour la conduction du courant

On donne pour le cuivre la masse molaire M = 64 g.mol^{-1} et la masse volumique μ = 9.10^3 kg.m^{-3}. En considérant qu'un atome libère un électron libre, calculer la densité volumique de charge ρ_m due aux électrons libres.
Calculer la vitesse d'ensemble des porteurs de charge (électrons) dans un fil de cuivre de section S = 1 mm^2 parcouru par un courant d'intensité I = 1 A.

Exercice 2 : Bobines de Helmholtz

Deux bobines de Helmholtz sont parcourues par une intensité identique (cf figure).

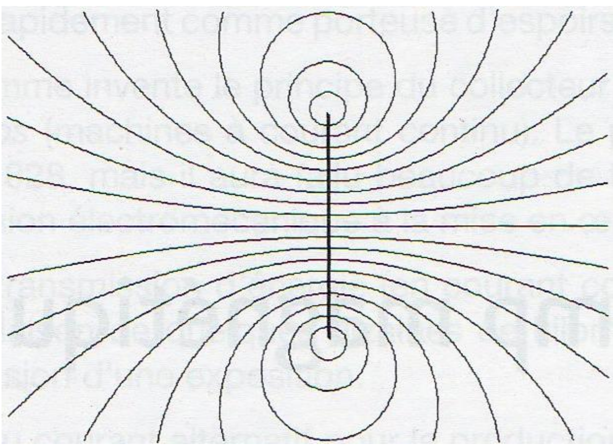


1) Etudier les invariances de la distribution de courant. Que peut-on en conclure pour le champ magnétostatique ?
2) Justifier que la composante orthoradiale du champ magnétostatique est nulle.
3) Que peut-on dire du plan xOy ? Que peut-on en conclure pour le champ magnétostatique sur ce plan ?
4) Justifier que sur l'axe Oz, le champ magnétique s'écrit $\vec{B}_{axe} = B(z)\vec{u}_z$.
5) Peut-on déterminer la parité de la fonction B(z) sans calculs ?
6) Reprendre cet exercice quand on inverse le sens de l'une des intensités.

Exercice 3 : Carte de lignes de champ créé par une spire circulaire

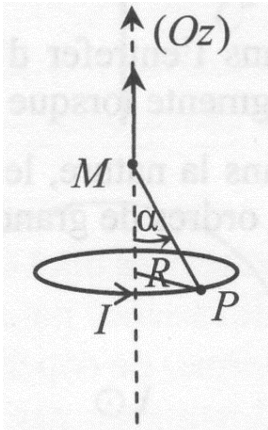
On considère une spire circulaire (en trait gras sur la carte de ligne de champ magnétostatique) parcourue par un courant électrique d'intensité I.

1) Quelle propriété importante vérifie-t-on sur cette carte de lignes de champ, propriété relative à l'allure des lignes de champ magnétostatique par rapport à sa source ?
2) Choisir un sens de parcours de l'intensité dans la spire, et orienter en conséquence les lignes de champ du champ magnétostatique créé par la distribution de courants.
3) Dans quelle zone le champ magnétostatique est-il le plus intense ? Justifier la réponse.
4) Vérifier que la carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et invariances de la distribution de courants. On pourra :
  a) Justifier l'invariance des cartes de lignes de champ par rotation autour de l'axe de la spire.
  b) Justifier que les lignes de champ sont comprises dans le plan de la figure.
  c) Justifier la direction du champ magnétique sur l'axe de la spire.
  d) Justifier la direction du champ magnétique sur le plan contenant la spire.
  e) Justifier les symétries observées pour cette carte de lignes de champ.



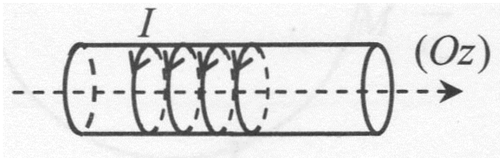
Exercice 4 : Solénoïde fini de spires jointives

On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe (Oz), rapportées au trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
On admet qu'une spire circulaire de rayon R d'axe vertical (Oz) parcourue par un courant d'intensité constante I crée le champ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha\, \vec{e}_z$, où M est un point de l'axe vu sous l'angle α depuis un point de la spire (figure ci-contre).

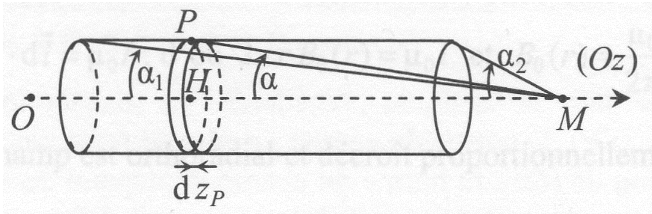


1) Vérifier que ce champ est conforme à l'analyse de symétries de la distribution de courant.

On considère à présent un solénoïde de longueur finie d'axe (Oz) comportant n spires jointives par unité de longueur, chaque spire circulaire de rayon R étant parcourue par un courant d'intensité I (voir figure ci-contre).



Soit P un point quelconque de la surface du solénoïde et H son projeté orthogonal sur (Oz).
On « découpe » le solénoïde en tranches élémentaires centrées sur un point H, d'épaisseur dz_P et vues sous l'angle α depuis le point M (voir figure ci-contre).
Les faces d'entrée et de sortie du solénoïde sont ainsi repérées par les angles respectifs α_1 et α_2.



2) Quelle est la direction du champ créé par ce solénoïde en un point M de l'axe ?

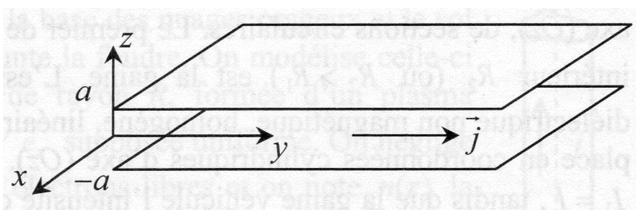
3) On considère le champ élémentaire $d\vec{B}_{\text{tranche}}(M)$ créé par l'une de ces tranches en un point M de l'axe. Exprimer $d\vec{B}_{\text{tranche}}(M)$ en fonction de μ_0, I, R, n, α et dz_P dans un premier temps, puis en exprimant dz_P en fonction de dα, donner $d\vec{B}_{\text{tranche}}(M)$ en fonction de μ_0, I, n, α et dα uniquement.

4) Montrer que finalement, le champ en un point de l'axe est : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\vec{e}_z$.

5) On considère maintenant un solénoïde infini. Par un passage à la limite du cas précédent, donner l'expression du champ magnétique sur l'axe.

Exercice 5 : Nappe de courant volumique

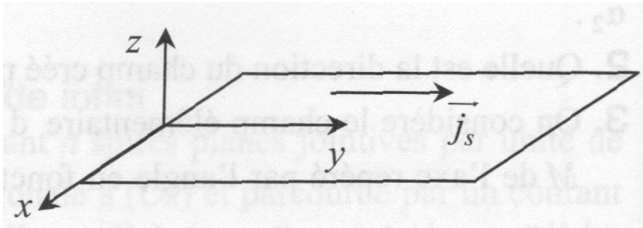
On modélise une piste conductrice dans un circuit intégré, où les courants circulent sur de très faibles épaisseurs, par la distribution de courant suivante :
- pour $-a < z < a$: $\vec{j} = j_0\, \vec{e}_y$
- pour $z < -a$ ou $z > a$: $\vec{j} = \vec{0}$.



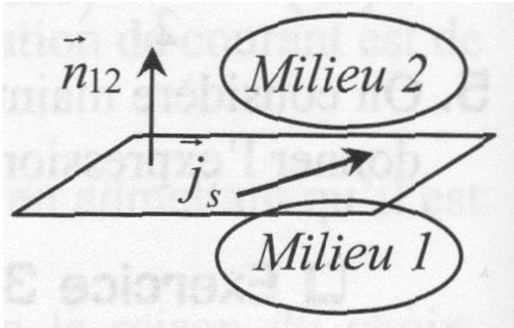
1) Analyser les symétries et invariances de cette distribution de courant. En déduire une information sur la parité de la fonction $B = B(z)$.

2) Déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace. Tracez l'allure du champ $B(z)$ en fonction de z.

3) On passe à la limite surfacique en considérant que l'épaisseur e de la distribution volumique tend vers : $e = 2a \to 0$.
Donner l'expression de la densité de courant surfacique $\vec{j}_S$ et celle du champ magnétique engendré partout dans l'espace.

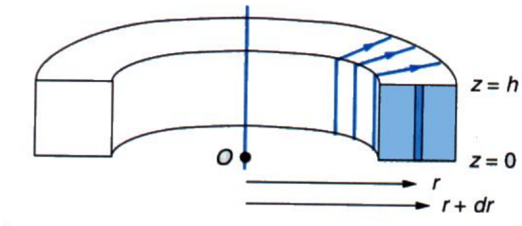


4) Ce dernier résultat est-il en accord avec la relation de passage pour $\vec{B}$ en présence de courants surfaciques ?
On donne la relation de passage qui traduit la continuité de la composante normale de $\vec{B}$ et la discontinuité de sa composante tangentielle en présence de courants surfaciques : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\, \vec{j}_S(M) \wedge \vec{n}_{12}$ où $\vec{n}_{12}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface.



Exercice 6 : Inductance propre d'une bobine torique de section rectangulaire

Calculer l'inductance propre d'un enroulement serré de N spires rectangulaires sur la surface d'un tore défini en coordonnées cylindriques d'axe Oz par $0 < z < h$, $R_1 < r < R_2$ (cf figure ci-contre).



Exercice 7 : Inductance linéique d'un câble coaxial

On modélise un câble coaxial par deux conducteurs cylindriques de même axe Oz parcourus longitudinalement par la même intensité I, répartie uniformément à la surface des conducteurs. Le sens du courant est dirigé vers les z croissants sur le conducteur intérieur (de rayon R_1) mais il est inversé pour le conducteur extérieur (de rayon $R_2 > R_1$). On néglige les effets de bord.

1) Proposer une expression de la densité de courant surfacique $\vec{j}_S$ sur chaque conducteur en fonction de I et des rayons intérieur R_1 et extérieur R_2.

2) Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

3) Y-a-t-il continuité du champ magnétique ? Ce dernier résultat est-il en accord avec la relation de passage pour $\vec{B}$ en présence de courants surfaciques ?
On donne la relation de passage qui traduit la continuité de la composante normale de $\vec{B}$ et la discontinuité de sa composante tangentielle en présence de courants surfaciques : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\, \vec{j}_S(M) \wedge \vec{n}_{12}$ où $\vec{n}_{12}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface.

4) On considère une portion de longueur h du câble. Calculer le flux du champ magnétostatique à travers la distribution, c'est-à-dire à travers un rectangle de hauteur h et compris entre R_1 et R_2.

5) En déduire l'inductance linéique L_l du câble coaxial.

6) On propose de retrouver ce résultat par une méthode énergétique. On admet que la densité volumique d'énergie magnétique vaut $\dfrac{B^2}{2\mu_0}$. L'énergie magnétique a donc pour expression $U_{mag} = \dfrac{1}{2} L I^2 = \iiint_{espace} \dfrac{B^2}{2\mu_0} d\tau$. Retrouver l'expression de l'inductance linéique du câble coaxial.

Exercice 8 : Interaction fil - cadre

Un fil conducteur rectiligne de grande longueur porté par l'axe z'z est parcouru par un courant d'intensité I.
Dans le plan vertical xOz, on place symétriquement par rapport à Ox, une bobine plate rectangulaire indéformable ABCD comportant N spires.
Le côté AB, de longueur a, placé parallèlement au fil, est à la distance x de celui-ci. La largeur du rectangle est b.

1) Calculer le flux magnétique Φ qui traverse la bobine.

2) On fait passer un courant d'intensité i dans la bobine. Décrire qualitativement les interactions du fil et de la bobine selon le sens de parcours du courant dans la bobine. Montrer que les forces agissant sur les côtés de la bobine admettent une résultante $\vec{F}$ dont on indiquera les intensité, direction et sens.

3) Que représente le flux magnétique Φ calculé précédemment pour la bobine parcourue par le courant d'intensité i ? En déduire le coefficient d'induction mutuelle M du système fil-bobine.

A.N. : a = 20 cm ; b = 15 cm ; x = 10 cm ; I = 50 A ; N = 10 ; i = 10 A ; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.