

Electromagnétisme

Chapitre 5 : Les équations de Maxwell

Sommaire

	Page
1 Les postulats de l'électromagnétisme	1
1.1 Conservation de la charge	1
1.2 Les équations de MAXWELL	2
1.2.1 Forme locale	2
1.2.2 Forme intégrale et signification physique	2
1.2.3 Commentaires	4
1.2.4 Compatibilité avec la loi de conservation de la charge	4
1.3 Le phénomène de propagation	5
1.3.1 Les équations de propagation	5
1.3.2 L'approximation des régimes quasi-stationnaires	6
1.4 Force de LORENTZ	6
2 Etude d'un conducteur dans le cadre de l'ARQS	6
2.1 Loi d'Ohm locale	6
2.1.1 Modèle de Drude	6
2.1.2 Expression de la résistance d'un tronçon de conducteur	8
2.2 Equations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS	8
2.3 Effet de peau dans un conducteur ohmique	9
2.3.1 Equation de diffusion	9
2.3.2 Épaisseur de peau - cas d'un courant dans une plaque (complément)	10
2.3.3 Conducteur parfait	11
3 Energie du champ électromagnétique	11
3.1 Bilan énergétique local	11
3.1.1 Principe du bilan	11
3.1.2 Energie contenue dans le champ	11
3.1.3 Energie transportée par le champ	12
3.1.4 Energie cédée par le champ électromagnétique à la matière	12
3.1.5 Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique	12
3.1.6 Retour sur l'énergie cédée aux charges mobiles : cas du conducteur ohmique	13
3.2 Identité de Poynting	13

1 Les postulats de l'électromagnétisme

1.1 Conservation de la charge

La charge est une grandeur postulée conservative, c'est-à-dire que la charge d'un système isolé est constante, et que, dans le cas d'un système pouvant échanger de la matière et de l'énergie avec l'extérieur, la variation de charge est égale à la charge apportée de l'extérieur au système. Exprimons l'équation locale traduisant ce principe de conservation :

▷

Equation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1)$$

1.2 Les équations de Maxwell

1.2.1 Forme locale

Ces équations sont postulées, et constituent les principes qui fondent la théorie de l'électromagnétisme (équivalents des principes de NEWTON pour la mécanique). Elles sont valables en régime variable, c'est-à-dire lorsque les champs $\mathbf{E}(M, t)$ et $\mathbf{B}(M, t)$ et les sources $\rho(M, t)$ et $\mathbf{j}(M, t)$ dépendent aussi du temps (contrairement au cas « statique » vu dans les chapitres précédents). Elles permettent notamment de déduire tous les résultats étudiés en électrostatique et en magnétostatique.

Equations de Maxwell (forme locale) :

Le couple (\mathbf{E}, \mathbf{B}) en un point M à la date t , dû à une distribution caractérisée dans le référentiel d'étude supposé galiléen, par la densité volumique de charges $\rho(M, t)$ et le vecteur densité volumique de courants $\mathbf{j}(M, t)$, satisfait aux équations ci-dessous, appelées équations de MAXWELL :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (\text{MAXWELL-GAUSS}) & \qquad \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (\text{MAXWELL-Flux}) \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (\text{MAXWELL-FARADAY}) & \qquad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) & (\text{MAXWELL-AMPERE}) \end{aligned}$$

avec :

- ε_0 la permittivité du vide : $\varepsilon_0 \simeq 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$);
- μ_0 la perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ (valeur exacte); $\mu_0 \simeq 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

1.2.2 Forme intégrale et signification physique

En intégrant les équations de MAXWELL, on obtient leur formulation intégrale :

- Maxwell-Gauss :

▷

On retrouve le théorème de GAUSS, qui exprime que le flux du champ électrique \mathbf{E} à travers toute surface fermée est égal à la charge électrique divisée par ε_0 et qui montre que le champ électrique - contrairement au champ magnétique comme nous le verrons grâce à l'équation MAXWELL-Flux - peut diverger à partir de points où se trouvent des charges électriques. Le théorème de GAUSS, issu d'une équation indépendante du temps, est donc vrai en régime permanent comme en régime variable.

— Maxwell-Flux :

▷

Le flux du champ magnétique \mathbf{B} à travers toute surface fermée est nul. C'est une propriété intrinsèque du champ magnétique qui montre qu'il ne peut diverger à partir de points de l'espace. Cette propriété est liée à l'absence de charges magnétiques : comme peut le montrer l'équation de MAXWELL-AMPÈRE, son existence est due soit à un déplacement de charge électrique, soit à une variation de champ électrique. On remarque là aussi que l'équation de MAXWELL-Flux est indépendante du temps et s'impose donc à tout champ magnétique, en régime permanent comme en régime variable.

— MAXWELL-FARADAY

▷

Cette équation décrit tous les phénomènes d'induction et montre qu'un champ magnétique variable peut créer un champ électrique à circulation non nulle.

— Maxwell-Ampère :

▷

En régime stationnaire, nous retrouvons le théorème d'Ampère qui montre que le champ magnétique \mathbf{B} tourne autour des courants. En régime variable, on obtient ce que l'on appelle le théorème d'Ampère généralisé :

Théorème d'Ampère généralisé :

La forme intégrale de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE conduit au théorème d'AMPÈRE généralisé :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S (\mathbf{j} + \mathbf{j}_d) \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

où le terme

$$\mathbf{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3)$$

homogène à une densité de courant, est appelé *densité de courant de déplacement*.

Le courant de déplacement ne correspond pas à un déplacement de charges mais traduit l'influence sur le champ magnétique de la variation temporelle du champ électrique, et permet ainsi de rendre compte de l'existence d'ondes électromagnétiques. Son appellation, due à MAXWELL, provient du fait qu'il imaginait que les ondes électromagnétiques se propageait à l'intérieur d'un support qui pouvait être amené à se déplacer sous l'effet d'une variation du champ électrique.

1.2.3 Commentaires

- Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} vérifient des équations différentielles couplées. Dans le cas général, ils ne peuvent pas être étudiés indépendamment l'un de l'autre : le couplage apparaît avec le terme $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ dans l'équation de MAXWELL-FARADAY et avec le terme $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ dans l'équation de MAXWELL-AMPÈRE. C'est pourquoi l'on parle de champ *électromagnétique*, les champs électrique et magnétique étant simplement deux facettes de cette même entité.
- Dans le cas de champs statiques, c'est-à-dire indépendants du temps, on obtient la forme locale des lois étudiées dans les chapitres précédents :
▷
- Ce couplage permet de comprendre l'existence des ondes électromagnétiques : supposons qu'en un point apparaisse un champ \mathbf{E} : ce champ n'existant pas auparavant, il y a donc une variation temporelle du champ électrique \mathbf{E} qui va conduire à l'apparition d'un champ magnétique \mathbf{B} qui affecte le point considéré et son entourage. La variation temporelle de \mathbf{B} va à son tour générer un champ électrique... Ainsi, de proche en proche, la perturbation initiale peut se propager sous forme d'une onde électromagnétique.
- Les équations de MAXWELL relient de manière linéaire le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) aux sources ρ et \mathbf{j} . De cette linéarité découle le principe de superposition valable pour les composantes \mathbf{E} et \mathbf{B} du champ électromagnétique.
- Les équations de MAXWELL donnent l'*évolution* du champ électromagnétique dans l'espace et dans le temps. Si initialement il n'y a pas de champ, alors les termes $\rho(M, t)$ et $\mathbf{j}(M, t)$ apparaissent bien comme les sources du champ électromagnétique. Si en revanche, un champ préexistant rencontre des charges et des courants, il est alors simplement modifié, pas véritablement « créé » (exemple : diffusion de la lumière par les molécules de l'air, une partie de l'onde électromagnétique incidente « rebondit » sur les molécules d'air).

1.2.4 Compatibilité avec la loi de conservation de la charge

On peut vérifier que la conservation de la charge peut se déduire des équations de MAXWELL :

▷

On retrouve bien l'équation locale de conservation de la charge. Sans le courant de déplacement \mathbf{j}_d , les équations de MAXWELL ne seraient pas compatibles avec l'équation de conservation de la charge.

1.3 Le phénomène de propagation

1.3.1 Les équations de propagation

Considérons une région de l'espace vide de charges et de courants et écrivons les équations de MAXWELL correspondantes :

▷

En utilisant la relation $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$, on obtient les équations de propagation relatives à \mathbf{E} et à \mathbf{B} :

▷

Equations de propagation des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} :

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} obéissent à la même équation de propagation, appelée équation de d'ALEMBERT :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \text{ et } \Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (4)$$

où le terme c correspond à la célérité de l'onde :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- Les mesures de ε_0 et de μ_0 par des expériences d'électrostatique et de magnétostatique ont permis de déterminer cette vitesse de propagation. En trouvant une valeur sensiblement égale à la vitesse de la lumière, les travaux de MAXWELL ont ainsi permis de prouver l'intuition qu'avait eu FARADAY : la lumière est une onde électromagnétique.
- Remarquons que ces équations laissent apparaître une vitesse de propagation, sans faire référence à un référentiel par rapport auquel serait étudiée la propagation. MAXWELL considérait que les ondes se propageaient dans un milieu de référence, appelé *ether*. Les expériences de MICHELSON et MORLEY ont eu pour objectif de mettre en évidence le mouvement de déplacement de la Terre par rapport à l'éther, sans succès. Par la suite, EINSTEIN écartera le concept d'éther et de milieu de référence en postulant que les ondes électromagnétiques se propageaient à la vitesse c quel que soit le mouvement de l'observateur.

L'étude des solutions de l'équation de d'Alembert et l'étude des ondes électromagnétique fera l'objet du chapitre suivant.

1.3.2 L'approximation des régimes quasi-stationnaires

Principe de l'ARQS :

On appelle approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) l'étude de l'électromagnétisme dans le cas où les temps de propagation sont négligeables. Cette approximation est valable si :

$$\frac{d}{c} \ll \tau \quad (5)$$

avec :

- d : dimension caractéristique du problème (extension géométrique) ;
- c : célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ;
- τ : temps caractéristique des variations de la distribution $\{\rho, \mathbf{j}\}$.

▷

1.4 Force de Lorentz

Le formalisme de l'électromagnétisme est complet à condition d'ajouter aux quatre équations de MAXWELL la loi de force permettant de mettre en évidence la présence d'un champ électromagnétique :

Force de Lorentz :

Le champ électromagnétique exerce sur une particule chargée de charge q placée en M et animée d'une vitesse \mathbf{v} une force appelée force de LORENTZ :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (6)$$

2 Etude d'un conducteur dans le cadre de l'ARQS

2.1 Loi d'Ohm locale

2.1.1 Modèle de Drude

Dans un métal conducteur, les électrons de valence des atomes sont libres de se déplacer sur de grandes distances. Le modèle de DRUDE consiste à considérer les électrons libres comme un gaz parfait, animés d'un mouvement d'agitation désordonné. Sous l'effet d'un champ électrique et de la force de Lorentz, les électrons acquièrent une lente vitesse de dérive - de l'ordre du mm/s - en plus de leur vitesse d'agitation. Ils subissent alors des collisions contre les cations

du réseau cristallin, modélisé par une force de type frottement fluide $\mathbf{f} = -\alpha\mathbf{v}$. En appliquant la loi de la quantité de mouvement à un électron initialement immobile, déterminons sa vitesse $\mathbf{v}(t)$ au cours du temps :

▷

On peut en déduire le vecteur densité de courant \mathbf{j} :

▷

Loi d'Ohm locale :

Le vecteur densité volumique de courant est proportionnel au champ \mathbf{E} régnant dans le conducteur :

$$\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E} \quad (9)$$

avec γ la conductivité électrique du conducteur.

La conductivité d'un solide peut nous permettre de le classer en trois catégories : Métaux / semi-conducteurs / isolants :

- Métal : Sa conductivité est supérieure à $10^4 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et peut aller jusqu'à $10^9 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pour des métaux nobles comme l'argent. Le cuivre est un bon conducteur ;
- Ils ont des conductivités moindres ($10^{-8} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1} < \gamma < 10^4 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$), mais leur conductivité dépend fortement d'influences variées, ce qui fait leur intérêt en électronique.

Estimons le temps caractéristique de l'établissement du régime permanent dans du cuivre, de masse molaire $M_{Cu} = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, de masse volumique $\mu_{Cu} = 9000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de conductivité $\gamma \simeq 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$:

▷

Généralisation dans le cadre de l'ARQS :

La loi d'ohm locale établie en régime continu se généralise au cas des régimes lentement variables tant que la période T des variations du champ électrique (régime harmonique) est telle que :

$$f \ll 10^{14} \text{ Hz} \quad (10)$$

Pour des champs plus rapidement variables, la conductivité devient complexe, ce qui signifie simplement que le courant n'a plus le temps de s'aligner sur le champ électrique (temps de réponse trop grand). A très haute fréquence, le courant tend même vers zéro, le conducteur apparaît donc comme un filtre passe-bas (entrée = champ électrique, sortie = courant).

Dès qu'une zone est appauvrie en porteurs mobiles, et commence donc à se charger, les porteurs s'y précipitent avec un temps de réponse très court. Pour un régime lentement variable, la zone n'a alors pas le temps de véritablement se charger :

▷

Electroneutralité des conducteurs :

Dans le cadre de l'ARQS, un conducteur a nécessairement sa densité de charge nulle :

$$\rho = 0$$

2.1.2 Expression de la résistance d'un tronçon de conducteur

On considère un tronçon de conducteur rectiligne, de section S et de longueur L . Le champ électrique est dirigé le long du conducteur (selon \mathbf{e}_x), et on le suppose uniforme. Le courant volumique \mathbf{j} est aussi uniforme. La face d'entrée est portée au potentiel V_A , celle de sortie au potentiel V_B . On se place en régime permanent. Déterminons l'expression de la résistance du conducteur en fonction de sa conductivité et de sa géométrie :

▷

La loi d'Ohm est ainsi expliquée à partir de la limitation de la vitesse de migration des porteurs du fait de leurs interactions avec le milieu matériel (les cations fixes du réseau métallique).

2.2 Equations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS

La conductivité électrique d'un métal est, au minimum, de l'ordre de $10^5 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Estimons le rapport des courants de charges et de déplacement, dans le cadre d'une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω :

▷

Dans un conducteur, les équations de Maxwell s'écrivent en négligeant le terme de courant de déplacement :

▷

Remarques :

- Dans l'ARQS, on a donc $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, et ses conséquences dans les circuits électriques :
 - dans un conducteur filiforme, l'intensité est la même en tout point ;
 - loi des nœuds.
- Le champ magnétique se calcule comme en régime permanent. Cette approximation est aussi appelée ARQS magnétique.
- Le champ électrique ne se calcule pas comme en régime permanent : il n'est pas à circulation conservative.

2.3 Effet de peau dans un conducteur ohmique

2.3.1 Equation de diffusion

▷

Equation de diffusion :

Dans le cadre de l'ARQS, dans un conducteur ohmique de conductivité électrique γ constante, les champs $\mathbf{j}(M, t)$, $\mathbf{E}(M, t)$ et $\mathbf{B}(M, t)$ vérifient la même équation de diffusion :

$$\Delta \mathbf{j} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad ; \quad \Delta \mathbf{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad ; \quad \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11)$$

2.3.2 Épaisseur de peau - cas d'un courant dans une plaque (complément)

En considérant un courant se déplaçant suivant Oz , exprimons la forme du vecteur densité de courant \mathbf{j} obéissant à l'équation de diffusion :

$$\mathbf{j} = j(x, y, z, t)\mathbf{e}_z$$

invariance par translation suivant Oy :

$$j(x, y, z, t) = j(x, z, t)$$

Par ailleurs :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\frac{\partial j}{\partial z} = 0$$

j ne dépend pas de z :

$$\mathbf{j} = j(x, t)\mathbf{e}_z$$

On propose d'étudier un courant sinusoïdal :

$$\mathbf{j} = f(x) \cos(\omega t + \varphi)\mathbf{e}_z$$

$$j = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

ce qui s'écrit en complexe :

$$\underline{j} = \underline{f}(x)e^{i\omega t} \text{ avec } \underline{f}(x) = f(x)e^{i\varphi}$$

L'équation de diffusion :

$$\Delta \mathbf{j} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

qui s'écrit ici :

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial j}{\partial t}$$

donne :

$$\frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} - i\omega \mu_0 \gamma \underline{f}(x) = 0$$

Cherchons des solutions de la forme $\underline{f}(x) = \underline{A}e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{C}$. On obtient le polynôme caractéristique :

$$r^2 = i\omega \mu_0 \gamma$$

Pour trouver la racine carré d'un nombre complexe, il faut l'écrire sous la forme polaire (« module et argument ») :

$$r^2 = \omega \mu_0 \gamma e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\omega \mu_0 \gamma} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma}{2}} (1 + i) \\ &= \frac{1 + i}{\delta} \end{aligned}$$

$$\underline{f}(x) = \underline{A}e^{\frac{1+i}{\delta}x} + \underline{B}e^{-\frac{1+i}{\delta}x}$$

Oyz est plan de symétrie *Rightarrow* $\underline{f}(x)$ doit être paire :

$$\underline{f}(-x) = \underline{f}(x)$$

ce qui implique :

$$\underline{A} = \underline{B}$$

puis :

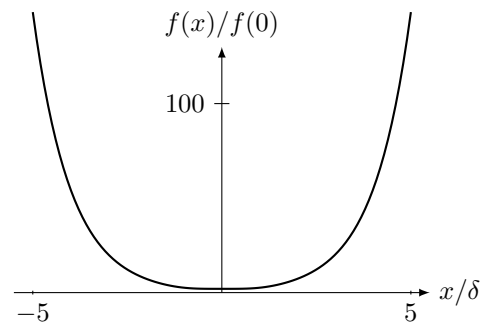
$$\underline{f}(x) = \underline{A} \left(e^{\frac{1+i}{\delta}x} + e^{-\frac{1+i}{\delta}x} \right)$$

Calculons le module (en utilisant $|z| = \sqrt{zz^*}$) :

$$\begin{aligned} |\underline{f}| &= |\underline{A}| \left| e^{\frac{1+i}{\delta}x} + e^{-\frac{1+i}{\delta}x} \right| \\ &= |\underline{A}| \left| e^{\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}} + e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}} \right| \\ &= |\underline{A}| \sqrt{\left(e^{\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}} + e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}} \right) \left(e^{\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}} + e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}} \right)} \\ &= |\underline{A}| \sqrt{e^{\frac{2x}{\delta}} + e^{-\frac{2x}{\delta}} + e^{i\frac{2x}{\delta}} + e^{-\frac{2x}{\delta}}} \\ &= |\underline{A}| \sqrt{2 \cosh\left(\frac{2x}{\delta}\right) + 2 \cos\left(\frac{2x}{\delta}\right)} \end{aligned}$$

Comparons l'amplitude en x et l'amplitude au centre :

$$\frac{|f(x)|}{|f(0)|} = \sqrt{2 \left(\cosh\left(\frac{2x}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2x}{\delta}\right) \right)}$$



Le courant est bcp plus intense en périphérie qu'au centre (tout se passe comme si le fil ne consuisait pas le courant)

ODG (cuivre $\gamma \sim 5 \times 10^7$ S/m) :

- $f \sim 50$ Hz $\rightarrow \delta \sim 1$ cm (ligne THT)
- $f \sim 1$ MHz $\rightarrow \delta \sim 70$ μ m (antenne radio)

Effet de peau :

L'effet de peau traduit l'aptitude d'un conducteur à s'opposer à la pénétration d'un champ électromagnétique en son sein.

Le champ électromagnétique n'a de valeur significative qu'au voisinage de la surface du conducteur, sur une profondeur

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad (12)$$

d'autant plus petite que :

- la pulsation ω est élevée ;
- la conductivité γ du milieu est élevée (milieu bon conducteur).

2.3.3 Conducteur parfait**Conducteur parfait :**

Le conducteur parfait correspond à la limite :

$$\gamma \rightarrow \infty \quad (13)$$

On a alors dans le conducteur :

$$\mathbf{j} = \mathbf{0}; \mathbf{E} = \mathbf{0}; \mathbf{B} = \mathbf{0} \text{ et } \rho = 0 \quad (14)$$

Remarques :

- Le modèle du conducteur parfait correspond à une épaisseur de peau nulle : $\delta(\omega) = 0, \forall \omega$. Le courant ne peut donc être que surfacique, de densité \mathbf{j}_s .
- Un conducteur parfait ne peut être chargé qu'en surface, avec une densité surfacique σ .

3 Energie du champ électromagnétique**3.1 Bilan énergétique local****3.1.1 Principe du bilan**

On considère une région de l'espace, de volume \mathcal{V} , délimitée par une surface fermée \mathcal{S} , dans laquelle règne un champ électromagnétique $[\mathbf{E}(M, t), \mathbf{B}(M, t)]$. Ce domaine contient une énergie électromagnétique $\mathcal{U}_{EM}(t)$. Nous allons effectuer un bilan d'énergie en nous intéressant à sa diminution pendant une durée dt :

$$-d\mathcal{U}_{EM}(t) = \delta\mathcal{U}_{\text{sortante}} + \delta\mathcal{U}_{\text{cédée}} \quad (15)$$

avec :

- $d\mathcal{U}_{EM}$: variation de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume \mathcal{V} pendant dt ;
- $\delta\mathcal{U}_{\text{sortante}}$: énergie sortante à travers la frontière \mathcal{S} pendant dt ;
- $\delta\mathcal{U}_{\text{cédée}}$: énergie cédée par le champ électromagnétique à la matière contenue dans le volume \mathcal{V} pendant dt .

3.1.2 Energie contenue dans le champ

En introduisant la densité volumique d'énergie $u_{EM}(M, t)$ (en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$), l'énergie électromagnétique contenue dans le volume \mathcal{V} peut s'écrire :

$$\mathcal{U}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{EM}(M, t) d\tau \quad (16)$$

3.1.3 Energie transportée par le champ

Le champ transporte de l'énergie : c'est le phénomène de rayonnement électromagnétique. On associe à ce transport un vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique $\mathbf{\Pi}(M, t)$ (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$). La puissance traversant une surface élémentaire $d\mathbf{S}$ peut donc être vue comme le flux de ce vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique :

$$d\mathcal{P}_{trav} = \mathbf{\Pi}(M, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (17)$$

Ainsi, la puissance sortante du volume \mathcal{V} est donnée par :

▷

3.1.4 Energie cédée par le champ électromagnétique à la matière

Exprimons la puissance $\mathcal{P}_{cédée} = \frac{d\mathcal{U}_{cédée}}{dt}$ par le champ électromagnétique à la matière, caractérisée par une densité volumique de charges mobiles ρ :

▷

$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ est donc la puissance par unité de volume (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$), reçue par les porteurs de charge, et fournie par le champ électromagnétique.

3.1.5 Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique

Exprimons l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique à partir de l'équation (15) :

▷

Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$-\frac{\partial u_{EM}(M, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (18)$$

Cette équation locale de conservation de l'énergie en présence d'un champ électromagnétique s'appelle aussi « équation locale de Poynting ». Elle signifie que toute l'énergie perdue par le champ présent dans un volume a été :

- soit transférée aux porteurs de charge présents dans ce volume ;
- soit emportée par le champ qui a traversé la surface délimitant ce volume (notion d'onde électromagnétique derrière cette idée de propagation du champ électromagnétique)

3.1.6 Retour sur l'énergie cédée aux charges mobiles : cas du conducteur ohmique

▷

3.2 Identité de Poynting

Le bilan local est vérifié en prenant :

$$u_{EM}(M, t) = \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2(M, t)}{2} + \frac{\mathbf{B}^2(M, t)}{2\mu_0} \quad ; \quad \mathbf{\Pi}(M, t) = \frac{\mathbf{E}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)}{\mu_0} \quad ; \quad \sigma(M, t) = \mathbf{j}(M, t) \cdot \mathbf{E}(M, t) \quad (19)$$

Le vecteur densité de courant d'énergie $\mathbf{\Pi}$ ainsi défini est appelé vecteur de Poynting. Le bilan de puissance est alors appelé équation locale de Poynting, que l'on obtient en utilisant l'équation vectoriel $\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b})$:

▷

Equation locale de Poynting :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (20)$$

Remarques :

- On peut considérer la densité volumique d'énergie électromagnétique comme la somme d'une densité volumique d'énergie électrique $u_{el}(M, t) = \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2(M, t)}{2}$ et d'une densité volumique d'énergie magnétique $u_m(M, t) = \frac{\mathbf{B}^2(M, t)}{2\mu_0}$.
- Il n'y a pas unicité du choix de u_{EM} et de $\mathbf{\Pi}$ vérifiant le bilan local. Les expressions de Poynting s'expriment en fonction des seuls champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , mais il existe d'autres choix qui font intervenir les potentiels V et \mathbf{A} (potentiel vecteur, hors programme).