TD EM3 : EQUATIONS DE MAXWELL

Exercice 1 : Champ électrique uniforme

On se place en régime stationnaire. Montrer que dans une région vide de charges, où les lignes d'un champ électrostatique sont rectilignes et parallèles, le champ est uniforme.

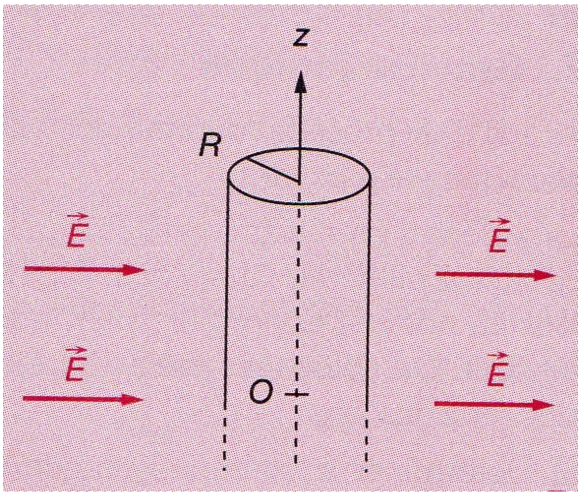
Exercice 2 : Sphère uniformément chargée en volume

On se place en régime stationnaire. Une sphère de centre O et de rayon R contient une densité volumique de charges uniforme ρ_0. Dans le chapitre EM1 (« Electrostatique »), on a établi l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace grâce à l'application du théorème de Gauss. En utilisant l'équation locale à laquelle satisfait le champ électrique, retrouver l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace.

Donnée : en coordonnées sphériques : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

Exercice 3 : Problème de Laplace en géométrie cylindrique

On considère un cylindre conducteur d'axe Oz et de rayon R maintenu au potentiel nul et plongé dans un champ électrique extérieur uniforme $\vec{E} = E_0\,\vec{u}_x$ (cf figure ci-contre). Il se produit un phénomène d'« influence », qui amène un déplacement des charges dans le conducteur et la production d'une électrisation superficielle. Le champ créé par le cylindre s'ajoute au champ extérieur. On recherche ici, à l'équilibre, l'expression du potentiel et du champ électrique total, ainsi que la distribution des charges sur le cylindre.



On raisonne en coordonnées cylindriques et on donne :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z .$$

1) Examiner les symétries et invariances (le cylindre est infini selon Oz).

2) Quelle est l'équation locale satisfaite par le potentiel V en tout point à l'extérieur du cylindre ? On se propose de chercher si une solution de la forme V = f(r) g(θ) (produit de deux fonctions d'une variable) convient. Montrer qu'il existe alors une constante K telle que $K = r\frac{f'}{f} + r^2\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g}$.

3) Chercher g sous la forme g = cos θ et en déduire K. Chercher alors une solution pour f sous la forme f = r^n. En déduire une relation entre K et n, donc les valeurs de n. Montrer que l'expression V(r,θ) = $\left[A\,r + \frac{B}{r}\right]\cos\theta$ convient.

4) On s'intéresse à la solution dans l'espace extérieur au cylindre. A l'aide des conditions aux limites, déterminer A et B en fonction de E_0 et R.

5) Exprimer le champ électrique total à l'extérieur du cylindre. Esquisser la carte de ligne de champ dans le plan xOy.

6) Déterminer l'expression de la densité surfacique de charge σ.

Exercice 4 : Etude d'un champ électrique à distribution cylindrique

Soit le champ $\vec{E}$ à symétrie cylindrique, défini en coordonnées cylindriques par :

- pour $r < r_0$: $\vec{E} = E_0 \dfrac{r}{r_0} \vec{u}_r$

- pour $r > r_0$: $\vec{E} = E_0 \dfrac{r_0}{r} \vec{u}_r$

1) Tracer l'allure des lignes de champ.

2) Exprimer le flux de $\vec{E}$ à travers un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r.

3) Calculer div $\vec{E}$ en tout point. Vérifier le résultat de 2) par application du théorème d'Ostrogradski.

4) Que vaut le rotationnel de ce champ en tout point ?

5) Si $\vec{E}$ est un champ électrostatique, à quelle distribution de charges le problème correspond-il ?

Données en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{array} \right.$$

Exercice 5 : Champ magnétostatique tourbillonnaire

Soit le champ vectoriel $\vec{B}$, défini en coordonnées cylindriques par :

- pour $r < r_0$: $\vec{B} = B_0 \dfrac{r}{r_0} \vec{u}_\theta$

- pour $r > r_0$: $\vec{B} = B_0 \dfrac{r_0}{r} \vec{u}_\theta$

1) Tracer l'allure des lignes de champ. Justifier l'appellation de « champ de tourbillon ».

2) Exprimer la circulation de $\vec{B}$ sur le cercle de centre O, d'axe Oz et de rayon r.

3) Calculer $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}$ en tout point. Vérifier le résultat de 2) par application du théorème de Stokes.

4) Que vaut la divergence de ce champ en tout point ?

5) Si $\vec{B}$ est un champ magnétostatique, à quelle distribution de courants le problème correspond-il ?

Données en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{array} \right.$$

Exercice 6 : Champ hors axe d'une spire circulaire

On considère une spire circulaire de rayon R d'axe vertical Oz, de section négligeable, parcourue par un courant d'intensité constante I. On se place en coordonnées cylindriques et on donne :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1) Montrer que sur l'axe de la spire, le champ magnétique a pour expression : $\vec{B} = B_z(z)\,\vec{u}_z$.

2) Montrer qu'en tout point M, le champ magnétique a pour expression $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\,\vec{u}_r + B_z(r,z)\,\vec{u}_z$.

3) On considère un point M à la distance r de l'axe et au voisinage de celui-ci (r << R). On admet que la distance r à l'axe est suffisamment faible pour que, dans le développement de la composante axiale $B_z(r,z)$ au voisinage de r = 0, on ne retienne, en première approximation, que le terme d'ordre zéro : $B_z(r,z) \approx B_z(r = 0, z) = B_z(z)$.

a) En utilisant la forme locale de l'équation de Maxwell-flux, montrer que $B_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_z(z)}{dz}$.

b) Retrouver ce résultat grâce à la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-flux. On considérera, pour évaluer le flux du champ magnétique, une surface S fermée, formée de la surface latérale Σ_{lat} du cylindre d'axe Oz, de rayon r et de hauteur dz, fermée à ses extrémités par deux disques D_1 en z et D_2 en z + dz.

Exercice 7 : Supraconductivité – Effet Meissner

Pour des matériaux nommés « supraconducteurs », on observe la disparition de toute résistivité mesurable en dessous d'une certaine température critique T_c. On se propose ci-dessous de montrer qu'un supraconducteur n'est pas seulement un conducteur de conductivité infinie (conducteur parfait), mais est en fait caractérisé principalement par ses propriétés magnétiques (effet Meissner).

On admet que, dans un supraconducteur : $\vec{B} = -\Lambda\,\overrightarrow{rot}\,\vec{j}$ (1)

où $\vec{B}$ est le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur, $\vec{j}$ la densité de courant volumique, et Λ une constante positive.

1) En régime stationnaire, montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ dans le supraconducteur vérifie l'équation : $\Delta\vec{B} - \dfrac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}$ (2)

où λ est une constante dont on précisera la dimension et que l'on exprimera en fonction de μ_0 et Λ.

2) Dans un modèle très simplifié, le supraconducteur est modélisé par le demi-espace z > 0. Dans le vide à l'extérieur du supraconducteur et au contact immédiat de celui-ci (en $z = 0^-$) règne un champ magnétique, dit champ extérieur que l'on représente a priori sous la forme :

$$\vec{B}_e = B_0\,\vec{u}_x + \beta\,\vec{u}_z \qquad (3)$$

B_0 et β étant des constantes.

En astreignant la solution de (2) à être bornée et, compte-tenu du modèle, indépendante des coordonnées x et y, et après avoir exprimé la continuité du champ, donner l'expression a priori des coordonnées du champ $\vec{B}$ intérieur au supraconducteur en fonction de B_0, β, z et λ.

3) En utilisant une équation de Maxwell, montrer que le champ extérieur donné par (3) est en fait tangent au supraconducteur.

4) Les valeurs de Λ conduisent à $\lambda \approx 50$ nm. Commenter cet ordre de grandeur. On dit couramment que l'effet Meissner consiste en l'expulsion du champ magnétique du volume d'un supraconducteur, ou encore : le champ magnétique intérieur $\vec{B}_i$ est nul dans un supraconducteur. Commenter cette formulation.

5) Exprimer la densité de courant volumique $\vec{j}$ dans le supraconducteur précédent en fonction de B_0, λ, μ_0 et z.

6) Calculer $\vec{i} = \int_0^{\infty} \vec{j}(z)\,dz$. Quelle est la signification de cette quantité ?

7) Montrer que $\vec{i}$ s'exprime de façon vectorielle simple en fonction de $\vec{B}_e$ et du vecteur $\vec{n} = -\vec{u}_z$ dirigé du supraconducteur vers l'extérieur. Montrer qu'il est légitime, dans la limite λ petit, d'assimiler la variation du champ magnétique au voisinage du supraconducteur à une discontinuité $\Delta\vec{B} = \vec{B}_e - \vec{B}_i$ que l'on exprimera en fonction de $\vec{i}$, μ_0 et $\vec{n}$. Commenter ce résultat.

Exercice 8 : Sphère radioactive

Une sphère radioactive, de centre O et de rayon R, émet des particules chargées de façon isotrope dans tout l'espace. On note $Q(r,t)$ la charge contenue à l'instant t dans une sphère de rayon r ($r > R$).

1) Calculer le champ électrique et le champ magnétique à la distance r du centre de la sphère radioactive.

2) Calculer le vecteur densité de courant volumique à la distance r.

3) Vérifier l'équation de Maxwell-Ampère sur cet exemple.

Exercice 9 : Neutronique d'un réacteur nucléaire

Soit $n(\vec{r},t)$ le champ associé à la densité particulaire neutronique, exprimée en particule.m^{-3}, au sein d'un réacteur nucléaire. La production ou l'absorption de neutrons dans certaines régions du réacteur est caractérisée par un champ $s(\vec{r},t)$ (source de neutrons exprimé en particule.$m^{-3}.s^{-1}$, avec $s > 0$ pour une région productrice et $s < 0$ pour une région absorbante). La diffusion des neutrons, caractérisée par un courant de particules $\vec{j}$ mesuré en particule.$m^{-2}.s^{-1}$, obéit, D désignant une constante appelée diffusivité, à la loi de Fick : $\vec{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n$.

1) En s'inspirant de la conservation de la charge, établir une équation locale reliant les champs $\vec{j}$, $\dfrac{\partial n}{\partial t}$ et s. En déduire l'équation de la diffusion qui relie le champ n à la source s.

2) Montrer que, en régime stationnaire et compte-tenu d'hypothèses que l'on précisera, la détermination de $n(\vec{r})$ à partir d'une source $s(\vec{r})$ connue est l'équivalent d'un problème d'électrostatique connu. En déduire l'expression intégrale de n.

3) Le cœur d'un réacteur étant caractérisé par une fonction s uniforme à l'intérieur d'un mince disque de centre O, de rayon a et d'épaisseur $e \ll a$, déterminer la densité neutronique n_0 en O en régime stationnaire.

Exercice 10 : Champ électrique induit par un solénoïde dans l'A.R.Q.P.

Une bobine, de longueur l, de rayon a et d'axe (Oz), est constituée par un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine et l'on se placera dans le cadre de l'A.R.Q.P.

1) Rappeler, dans ces conditions, l'expression du champ magnétique engendré par la bobine lorsqu'elle est parcourue par le courant $i(t)$.

2) Déterminer l'expression de l'inductance propre L de cette bobine.

3) La bobine est mise en charge par un générateur de force électromotrice e, de résistance interne R grande par rapport à celle de l'enroulement. Quelle est la loi d'évolution du courant dans le circuit, fermé à l'instant $t = 0$?

4) Calculer les champs magnétique et électrique engendrés par la bobine à l'instant t en tout point.

Exercice 11 : Champ magnétique dans un condensateur dans l'A.R.Q.P.

Un condensateur plan, constitué de deux plaques circulaires d'axe (Oz) et de rayon R, séparées par une distance e faible devant R, est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω. Ainsi, la charge portée par l'une des plaques du condensateur vaut $Q = Q_0\cos(\omega t)$. Le système fonctionne dans le cadre de l'A.R.Q.P. et on négligera tout effet de bord.

1) Pour ce système, on écrira le champ électrique à l'intérieur du condensateur sous la forme : $\vec{E} = E_0\cos(\omega t)\,\vec{e}_z$. Exprimer E_0 en fonction de Q_0 notamment.

2) Calculer le champ magnétique en tout point.

Exercice 12 : Propagation dans un câble coaxial

La propagation d'ondes électromagnétiques dans un câble coaxial (câble TV ou câble pouvant être utilisé en travaux pratiques) peut être étudiée à partir d'un modèle de ligne électrique à constantes réparties.
Pour cette propagation, on notera Λ et Γ les inductances et capacité par unité de longueur (exprimées en $H.m^{-1}$ et $F.m^{-1}$ respectivement).
On a établi dans les TD EM1 (exercice 6) et EM2 (exercice 7) les expressions des capacité Γ et inductance Λ linéiques d'un câble coaxial dont l'âme et la gaine ont pour rayons respectifs a et b :

$$\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

La ligne est ainsi représentée par une succession de tronçons élémentaires (cf figures), de longueur dx, considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance $dL = \Lambda\, dx$ et une capacité $dC = \Gamma\, dx$.
On négligera ici toute perte (résistance de la ligne, admittance de fuite entre l'âme et la gaine, …).

1) Ecrire les équations de couplage liant la tension V(x,t) et le courant I(x,t) dans la ligne.
2) Quelle est l'équation de propagation associée ?