TD EM4 : ENERGIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Exercice 1 : Résistance en géométrie sphérique

Deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) portées aux potentiels respectifs V_1 et V_2 ($V_2 < V_1$), sont séparées par un milieu conducteur de conductivité électrique γ. On désire exprimer la résistance électrique équivalente.

1) En notant I l'intensité du courant circulant entre les sphères de façon radiale, exprimer la densité de courant $\vec{j}(r)$.

2) En déduire l'expression du champ électrique en tout point.

3) Sur un segment dirigé radialement joignant les deux sphères, calculer la circulation du champ électrique.

4) En déduire l'expression de la résistance R.

5) Si l'épaisseur $e = R_2 - R_1$ est très faible devant chacun des rayons, proposer une forme simplifiée pour cette expression. Commenter.

Exercice 2 : Evolution de la densité volumique de charge dans un conducteur

On considère un milieu métallique homogène de conductivité γ. On cherche à montrer que la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ s'annule quasi instantanément dans un tel milieu.

1) La permittivité du milieu est supposée égale à celle du vide. A l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation locale de conservation de la charge, établir une équation aux dérivées partielles régissant l'évolution de la densité volumique de charge.

2) En un point M_0 donné, la densité volumique de charge est fonction de la seule variable temporelle. Quelle est la forme de la solution $\rho(M_0,t)$? Faire apparaître une constante de temps τ que l'on exprimera en fonction de γ et de la permittivité diélectrique du vide ε_0.

3) Pour un matériau bon conducteur, on donne $\gamma \approx 6.10^7$ S.m^{-1}. On rappelle que $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ m.F^{-1}.
Calculer un ordre de grandeur de τ. Conclure.

4) Peut-on se placer dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) ?

5) Dans ce cadre, montrer que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction dans le conducteur.

Exercice 3 : Courants de Foucault dans un conducteur massif

On considère un conducteur cylindrique, de conductivité électrique γ, d'axe (Oz), de rayon a, de longueur h >> a. On place ce conducteur dans un champ magnétique uniforme et variable dans le temps $\vec{B}_a = B_a(t)\,\vec{u}_z$. On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}_1$ engendré par la variation temporelle de $\vec{B}_a$.

2) En déduire la densité de courant volumique $\vec{j}_1$ qui apparait par induction.

3) Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur.

4) Si $B_a(t) = B_0 \cos(\omega t)$, calculer la valeur moyenne de la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur.

5) Quelle est l'influence de la fréquence d'oscillation du champ magnétique sur la valeur moyenne de la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur.

6) Citer un exemple d'application de ce dispositif.

Exercice 4 : Identité de Poynting

Etablir l'identité de Poynting (équation locale de conservation de l'énergie) à partir des équations de Maxwell. On donne : $\mathrm{div}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{a}\right) - \vec{a}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{b}\right)$.

Exercice 5 : Câble coaxial en régime stationnaire

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres minces c_1 et c_2 infinis parfaitement conducteurs de rayons R_1 et R_2, avec $R_2 > R_1$, et de même axe (Oz).
Les phénomènes étudiés ici sont à symétrie de révolution autour de l'axe (Oz).
L'âme c_1, au potentiel V_1, porte une charge linéique λ, et est parcourue par le courant I.
La gaine c_2 est au potentiel V_2. Elle porte une charge linéique $-\lambda$, et est parcourue par le courant – I.
On note $U = V_1 - V_2$.

1) Calculer les charges surfaciques σ_1 et σ_2 sur c_1 et c_2, puis le champ électrique $\vec{E}$ en tout point et la densité linéique d'énergie électrique $\frac{dW_E}{dz}$. En déduire la capacité linéique Γ du câble coaxial.

2) Calculer les courants surfaciques sur c_1 et c_2, puis le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point et la densité linéique d'énergie magnétique $\frac{dW_B}{dz}$. En déduire l'inductance linéique Λ du câble coaxial.

3) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ dans le câble coaxial, ainsi que la puissance rayonnée dans le câble. Montrer que cette puissance se met sous la forme $\Phi = U\,I$. Commenter.

Exercice 6 : Bilan énergétique pour un fil conducteur ohmique

Un fil conducteur ohmique de conductivité γ, assimilé à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a, est soumis au champ électrique uniforme et permanent : $\vec{E} = E_0\,\vec{e}_z$.

1) Déterminer le champ magnétique engendré par les courants du cylindre.

2) Quel est le flux du vecteur de Poynting à travers un cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon r ? Quelle interprétation peut-on donner à ce résultat ?

Exercice 7 : Bilan énergétique associé à un condensateur

Un condensateur plan, constitué de deux plaques circulaires d'axe (Oz) et de rayon R, séparées par une distance e faible devant R, est alimenté par un générateur de tension variable dans le temps. Le système fonctionne dans le cadre de l'A.R.Q.P. et on négligera tout effet de bord.

1) Rappeler, dans ces conditions, l'expression du champ électrique engendré par le condensateur lorsqu'il porte une charge Q(t).

2) Quelle est l'énergie électrique E_e associée au condensateur ? En déduire l'expression de la capacité du condensateur.

3) Calculer le champ magnétique engendré à l'intérieur du condensateur.

4) Comparer les ordres de grandeur des densités volumiques d'énergies électrique et magnétique.

5) Calculer le vecteur de Poynting associé, puis la puissance rayonnée à travers les « parois » du condensateur, constituées par le cylindre d'axe (Oz), de rayon R et de hauteur e. A quelle grandeur cette puissance est-elle égale ? Interpréter ce résultat.

6) Vérifier sur cet exemple l'écriture du théorème de Poynting.

Exercice 8 : Bilan énergétique associé à l'effet de peau

En étudiant un modèle unidimensionnel de diffusion d'un champ électromagnétique variable dans un milieu conducteur ohmique, de conductivité γ, on obtient l'expression : $\vec{B}(\vec{r},t) = B_0\, e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{e}_y$.

C'est l'expression du champ magnétique dans le conducteur occupant le demi-espace (z > 0).

1) Quelles sont les expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{j}$ associés à ce champ magnétique oscillant ?

2) Quelle est la puissance moyenne P transférée au conducteur, à travers une surface unité $\Delta x\, \Delta y$?

3) Que devient cette énergie ? Faire une vérification à l'aide de l'expression de la densité volumique de courant $\vec{j}$ au sein du conducteur.