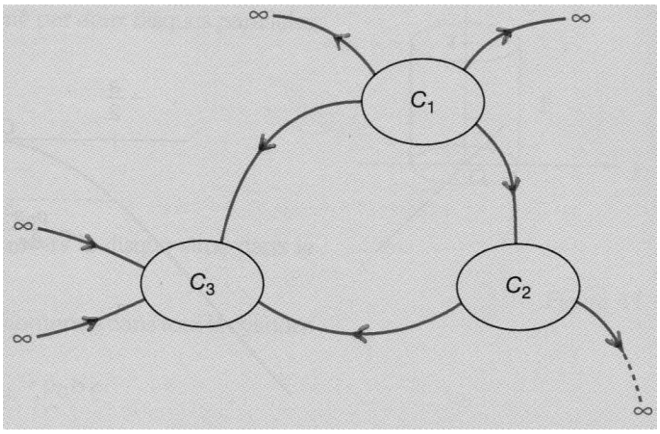
TD EM1 : ELECTROSTATIQUE

Exercice 1 : Propriétés des lignes de champ

Trois corps conducteurs notés C_1, C_2 et C_3 sont représentés avec quelques lignes de champ électrostatique.



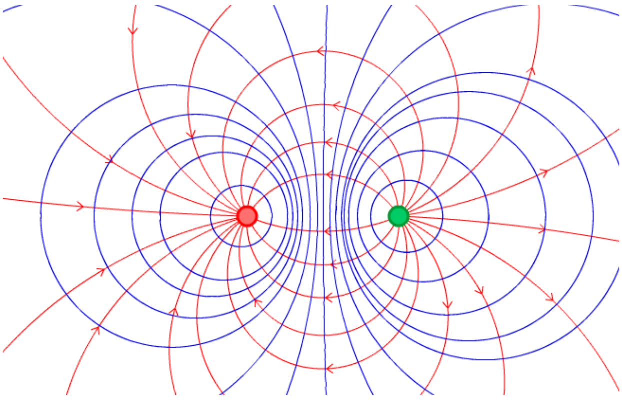
1) En régime stationnaire, un corps conducteur est équipotentiel. Quelle propriété géométrique permet de confirmer que les surfaces des corps C_1, C_2 et C_3 sont équipotentielles ?

2) Sans effectuer de calcul, préciser le signe des potentiels électrostatiques respectifs V_1, V_2 et V_3 et la relation d'ordre qui existe entre eux. On précise que le potentiel est choisi nul à l'infini.

3) Pourquoi les lignes de champ ne se prolongent-elles pas à l'intérieur des conducteurs ?

Exercice 2 : Carte de lignes de champ et d'équipotentielles

On donne une carte de lignes de champ et d'équipotentielles créées par deux fils infinis de densité linéique de charge uniforme + λ et – λ.



1) Où se trouve le fil chargé positivement et où se trouve le fil chargé négativement ?

2) Quelle propriété remarquable y-t-il entre les équipotentielles et les lignes de champ ? Est-ce le cas sur la carte proposée ?

3) Où se trouve la surface équipotentielle V = 0 ? On justifiera la réponse. Que représente cette surface en termes de symétrie ?

4) Comparer la valeur du potentiel sur différentes équipotentielles.

5) Associer les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ.

6) Vérifier que la carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et invariances de la distribution de charges.

Exercice 3 : Relation potentiel - champ

Dans l'espace muni d'un repère cartésien (O,x,y,z), un champ électrique est défini par son potentiel :

- $V(x,y,z) = -E_0 \dfrac{x^2}{2a}$ pour $-a \leq x \leq a$
- $V(x,y,z) = -E_0 x + E_0 \dfrac{a}{2}$ pour $x > a$
- $V(x,y,z) = E_0 x + E_0 \dfrac{a}{2}$ pour $x < -a$

où E_0 est une constante.

1) Montrer que le champ électrostatique a une direction fixe.
2) Exprimer le champ dans les différents domaines.
3) Peut-on parler de champ uniforme ?

Exercice 4 : Disque uniformément chargé en surface

On considère une distribution de charges positives réparties uniformément, avec une densité σ, sur la surface d'un disque (D) infiniment mince de centre O et de rayon R.

1) Déterminer l'expression du potentiel électrostatique créé par cette distribution en un point M, d'abscisse z, situé sur l'axe de révolution Oz du disque.
2) En déduire l'expression du potentiel électrostatique créé par un plan infini chargé uniformément en surface avec une densité σ.
3) Retrouver ce dernier résultat en utilisant l'expression du champ électrostatique créé par un plan infini chargé uniformément en surface avec une densité σ. On rappelle que si ce plan est confondu avec le plan (Oxy), $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ si $z > 0$, et $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ si $z < 0$.
4) Déterminer l'expression du potentiel électrostatique en un point M situé sur l'axe de révolution d'un plan (P), infiniment mince et grand, chargé uniformément en surface avec une densité σ, et percé d'un trou circulaire de centre O et de rayon R_0.

Exercice 5 : Sphère uniformément chargée en volume

On considère une sphère de centre O et de rayon R, chargée en volume uniformément et positivement. On appelle ρ la densité volumique de charge.

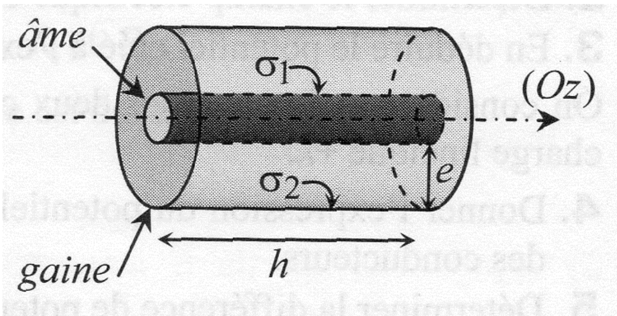
1) Que vaut le champ électrostatique $\vec{E}$ au centre de la sphère ?
2) Analyser les symétries du système. Quel est le repère d'espace le mieux adapté pour son étude ? Déterminer la direction et le sens du vecteur champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.
3) Analyser les invariances du système. En déduire la ou les variable(s) d'espace dont dépendent le champ $\vec{E}$ et le potentiel V.
4) A l'aide du théorème de Gauss, calculer $\vec{E}$ en tout point de l'espace. En déduire V. Tracer les graphes de E et de V.
5) On enlève la sphère. On considère un point P situé à la distance $r > R$ du point O. Quelle charge ponctuelle Q faudrait-il placer en O pour que le champ créé en P par Q soit exactement celui trouvé à la question 3). Commenter le résultat.
6) Tracer l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles. Commenter.

A présent, on considère une sphère de centre O et de rayon R_2, chargée en volume uniformément et positivement. On appelle ρ la densité volumique de charge. On évide partiellement cette sphère en créant une cavité sphérique de centre O et de rayon $R_1 < R_2$.

7) Analyser les symétries du système. En déduire la direction et le sens du vecteur champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace. Analyser les invariances du système. En déduire la ou les variable(s) d'espace dont dépendent le champ $\vec{E}$ et le potentiel V.
8) A l'aide du théorème de Gauss, calculer $\vec{E}$ dans les trois zones suivantes : $0 < r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $r > R_2$.
9) En déduire la valeur du potentiel V dans chacune de ces trois zones.
10) Retrouver les résultats des questions 8) et 9) en utilisant le principe de superposition et les résultats de 4).

Exercice 6 : Capacité linéique d'un câble coaxial

On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs parfaits infiniment longs de même axe (Oz), de sections circulaires. Le premier de rayon R_1 est appelé âme et est porté au potentiel $V_1 > 0$, et le second de rayon intérieur R_2 (où $R_2 > R_1$) est la gaine, portée au potentiel $V_2 < V_1$. L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique non magnétique, homogène, linéaire et isotrope, de permittivité relative ε_r que l'on assimilera ici à celle du vide ($\varepsilon_r = 1$). Une portion de câble de longueur h forme ainsi un condensateur cylindrique dont les armatures sont constituées des surfaces conductrices en regard. On néglige les effets de bord, c'est-à-dire que l'on considère que le champ entre les armatures est le même que si la hauteur h était infinie. On cherche à exprimer ici sa capacité. Pour cette portion de câble, on désigne par σ_1 la densité surfacique de charges supposée uniforme à la surface de l'âme et par σ_2 celle que porte la surface intérieure de la gaine. L'équilibre électrostatique étant réalisé, on admet que dans les conducteurs formant l'âme et la gaine, le champ est nul ainsi que la densité volumique de charge. Les surfaces des deux conducteurs en regard sont porteuses de charges égales en valeur absolue et de signe opposé. On posera $e = R_2 - R_1$ l'espacement radial entre les armatures. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).



1) Dans quelle mesure les effets de bord sont-ils raisonnablement négligeables ?
2) Donner dans le cadre de ce modèle la relation entre σ_1 et σ_2.
3) En raisonnant sur le câble supposé infini, étudier les symétries et les invariances de la distribution de charge. Quelles en sont les conséquences pour le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) en un point M dans l'espace entre les armatures ?
4) En appliquant le théorème de Gauss à une surface fermée dont on justifiera très soigneusement le choix, exprimer le champ électrostatique qui règne dans le diélectrique entre les deux cylindres. En déduire la différence de potentiel U entre l'âme et la gaine.
5) Tracer quelques lignes de champ du champ électrostatique et quelques surfaces équipotentielles. Commenter.
6) On donne la relation de passage pour $\vec{E}$ en présence de charges surfaciques séparant deux milieux 1 et 2 de part et d'autre de cette surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$, où $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface, $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal localement à cette surface et allant du milieu 1 vers le milieu 2. Cette relation traduit la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ et la discontinuité de sa composante normale en présence de charges surfaciques.
Vérifier cette relation de passage en $r = R_1$ et $r = R_2$.
7) En généralisant la définition de la capacité d'un condensateur plan $C = \frac{Q}{U}$ où Q est la charge portée par son armature positive et U la différence de potentiel entre les armatures, exprimer la capacité linéique du câble notée C_l en fonction de ε_0, R_1 et R_2. Faire l'application numérique pour $R_1 = 1{,}0$ mm et $R_2 = 2{,}5$ mm. On rappelle que $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\,\pi}.10^{-9}$ F.m^{-1}.
8) Que devient cette capacité si $e << R_1$? Etait-ce prévisible ?

Exercice 7 : Ligne bifilaire

Une ligne bifilaire est constituée de deux conducteurs rectilignes cylindriques de rayon a parallèles entre eux et séparés par une distance h telle que h >> a. On se place dans l'approximation d'une ligne infinie.

Dans un premier temps, on considère un seul conducteur, centré sur l'axe (Oz), et on note λ la charge par unité de longueur.

1) Sachant que la charge se répartit uniformément sur la surface du conducteur, donner l'expression de cette charge surfacique σ en fonction de λ et a.
2) Déterminer le champ électrique créé à l'extérieur du conducteur.
3) En déduire le potentiel créé à l'extérieur du conducteur.

On considère maintenant les deux conducteurs, l'un portant la charge linéique - λ (conducteur 1) et l'autre la charge linéique + λ (conducteur 2).

4) Donner l'expression du potentiel créé par cette ligne bifilaire en un point situé à l'extérieur des conducteurs.
5) Déterminer la différence de potentiel entre les deux conducteurs en fonction de λ, ε_0, a et h.
6) En considérant une longueur L de ligne bifilaire, en déduire la capacité par unité de longueur associée à cette ligne.
7) Déterminer la force exercée par le conducteur 1 sur une longueur L du conducteur 2. Commenter.

Exercice 8 : Energie mécanique d'une particule

Un électron est émis en O avec une vitesse initiale négligeable, par une électrode portée à une température élevée. Il est ensuite soumis à un champ électrostatique $\vec{E}$, dont le potentiel électrostatique V(O) est choisi nul au niveau de l'électrode.

1) Définir l'énergie mécanique de l'électron au cours de son mouvement.
2) Du seul point de vue énergétique, à quelle condition, sur la valeur de son potentiel V(P), un point P peut-il être atteint par l'électron ?
3) Quelle est la vitesse de l'électron en sortie S de la cavité accélératrice, si la tension entre les points O et S est égale à U ?

Exercice 9 : Champ de gravitation de la Terre

La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R = 6{,}37.10^3$ km et de masse $m = 5{,}97.10^{24}$ kg répartie uniformément. On donne $G = 6{,}67.10^{-11}$ $kg^{-1}.m^3.s^{-2}$ (constante de gravitation).

1) Calculer, en utilisant le théorème de Gauss, le champ de gravitation en tout point de l'espace (à l'intérieur et à l'extérieur de la Terre).
2) Vérifier qu'à l'extérieur de la Terre, on obtient le même résultat en considérant que toute la masse de la Terre est concentrée en son centre.
3) Faire l'application numérique pour le champ de gravitation à la surface de la Terre et comparer avec l'accélération de la pesanteur.