PT 2017-2018 — 30-03-2018

DEVOIR SURVEILLE n° 6

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de calculatrice est interdit pour le 1er problème, et autorisé pour le 2ème problème.

Il est interdit d'arrêter de composer avant 17h00.

Vous devez traiter les 2 problèmes sur 2 copies différentes.

Si vous choisissez de ne pas traiter l'un des problèmes, vous devez tout de même me rendre une copie « blanche ».

	Barème	Ramassé à
Premier problème	30 points	15h00
Deuxième problème	80 points	17h00

Vous avez tout intérêt à faire dans l'ordre : le 1er problème, puis le 2ème problème !

Vous êtes libres de commencer le 2ème problème avant 15h00.

PREMIER PROBLEME : Microscope électronique à balayage (d'après banque PT 2017) (barème : 30 points)

L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.

Dans ce problème, on s'intéresse à l'observation d'objets de taille très faible.

Cette étude trouve tout son intérêt en biologie, ainsi que dans le contrôle des matériaux.

On étudie ici une technique de microscopie : la microscopie électronique à balayage.

Pour améliorer la résolution d'un microscope classique, on remplace les photons par des électrons, de charge q = - e et de masse m.

On rappelle la relation de De Broglie : $p = h / \lambda$ où p est la quantité de mouvement, λ la longueur d'onde associée à la particule et h la constante de Planck.

1. Aspect électrique

Les électrons sont accélérés dans un canon à électrons (Figure 7) constitué de deux armatures planes et parallèles, distantes de d = 1 cm, et séparées par du vide quasi-parfait.

Figure 7

1.1. On applique entre les armatures une tension positive $U = V_1 - V_2$. Sur quelle armature les électrons doivent-ils être émis sachant que leur vitesse initiale est nulle ?

1.2. Ecrire l'équation de Poisson satisfaite par le potentiel V en précisant de quelle équation de Maxwell elle découle ; que devient cette équation dans le vide situé entre les deux armatures ?

Ces dernières étant de grande dimension, le potentiel ne dépend que d'une variable z comprise entre 0 et d, l'origine étant prise au point de départ des électrons.

1.3. Exprimer V(z) et en déduire le champ électrique entre les armatures, en fonction de U et d.

1.4. On se place dans le cadre de la mécanique classique.

On donne les valeurs numériques approchées : $\frac{e}{m} \approx 2.10^{11}$ S.I. et $\frac{h}{m} \approx 7.10^{-4}$ S.I.

1.4.1. Exprimer la vitesse v atteinte par les électrons lorsqu'ils arrivent sur l'armature opposée, en fonction de U, e, m.

Calculer v sachant que $U = 10^5$ V. Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

1.4.2. Calculer la longueur d'onde λ associée aux électrons ainsi accélérés.

1.5. On envisage une approche relativiste du mouvement des électrons. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit de la même façon qu'en mécanique classique, mais les expressions de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement doivent être corrigées ainsi :

$$E_c = (\gamma - 1)\, m\, c^2 \quad \text{et} \quad p = \gamma\, m\, v \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{et} \quad c = 3.10^8\ m.s^{-1}.$$

1.5.1. Exprimer γ en fonction de e, U, m, c, puis en déduire λ en fonction de h, m, c, γ.

1.5.2. Calculer la valeur de γ ainsi que la valeur affinée de λ, sachant que $\sqrt{\left(\frac{11}{9}\right)^2 - 1} \approx 0{,}7$.

1.5.3. Conclure d'une part sur le gain en précision du modèle relativiste, et d'autre part sur l'avantage du microscope électronique par rapport au microscope optique.

2. Déflecteur magnétique

Le rôle d'un déflecteur magnétique est simplement de dévier le faisceau d'électrons.

On suppose qu'un électron de vitesse v_0 arrive dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au vecteur vitesse.

2.1. Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

2.2. On admet que la trajectoire de l'électron est circulaire.

2.2.1. Tracer cette trajectoire, en faisant clairement apparaître les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$.

2.2.2. Déterminer l'expression du rayon du cercle décrit, en fonction de m, v, e, B.

2.3. Que devient cette expression dans le cas d'une particule relativiste ?

3. Lentille magnétique

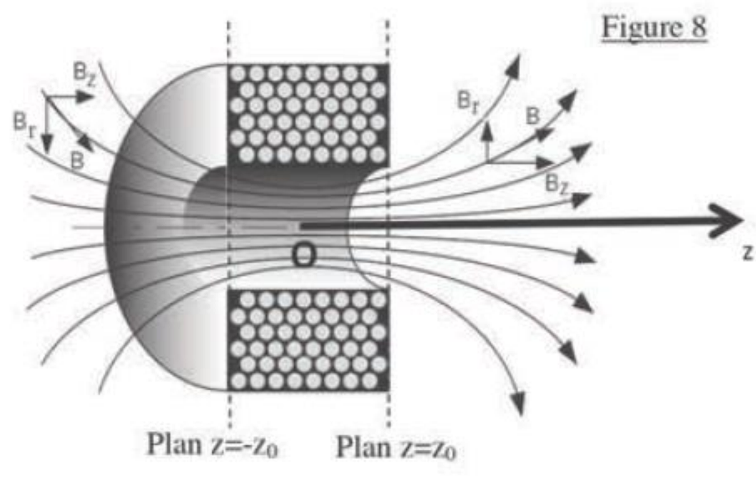
Une lentille magnétique sert à assurer la focalisation du faisceau d'électrons.

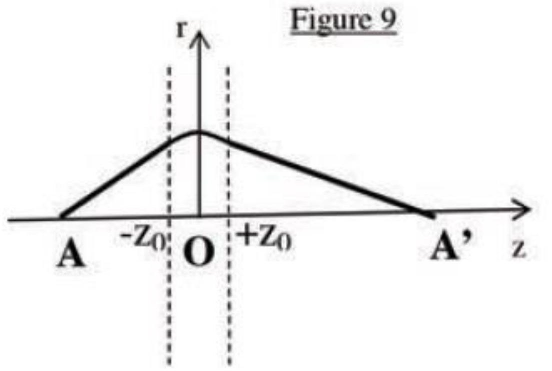
Le champ magnétique est créé par un bobinage de spires de faible largeur 2 z_0 parcouru par un courant d'intensité i.

La figure 8 suivante représente les lignes de champ magnétique.

La position de l'électron est repérée par le point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'axe Oz étant l'axe de symétrie de la bobine centrée en O.

La figure 9 représente la courbe r(z) faisant apparaitre qu'un électron issu d'un point A de l'axe du microscope ressort, après traversée de la lentille, par un point A' du même axe.





On suppose que l'électron est non relativiste, qu'il est soumis uniquement à la force magnétique et que sa vitesse initiale v_0 est quasi colinéaire à l'axe Oz : $\vec{v}_0 \approx v_0\, \vec{u}_z$.

3.1. Justifier le fait que le champ magnétique soit de la forme : $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\,\vec{u}_r + B_z(r,z)\,\vec{u}_z$.
Aucune expression n'est demandée pour B_r et B_z.

3.2. Dans quelle zone le champ magnétique est-il le plus intense ?

3.3. Montrer qu'à l'intérieur de la bobine, les équations du mouvement de l'électron peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\dfrac{e}{m}\, r\, \dfrac{d\theta}{dt}\, B_z \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2 \dfrac{d\theta}{dt}\right) = \dfrac{e}{m}\left(\dfrac{dr}{dt} B_z - \dfrac{dz}{dt} B_r\right) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{e}{m}\, r\, \dfrac{d\theta}{dt}\, B_r \end{cases}$$

3.4. On admet que la résolution du système conduit, pour la fonction r(z), à l'équation approchée suivante : $\dfrac{d^2r}{dz^2} \approx -\dfrac{e^2}{4\,m^2\,v_0^2}\, r_0\, B_z^2$ où r_0 est la valeur de r à l'entrée et à la sortie de la lentille.

En remarquant que $\left(\dfrac{dr}{dz}\right)_{-z_0} \approx -\dfrac{r_0}{\overline{OA}}$ et $\left(\dfrac{dr}{dz}\right)_{+z_0} \approx -\dfrac{r_0}{\overline{OA'}}$, déduire de l'équation précédente que $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ sont liés par la relation de conjugaison d'une lentille et préciser sa distance focale image f ' en fonction de e, m, v_0 et de l'intégrale $I = \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2\, dz$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

3.5. La tension accélératrice U étant fixée, sur quel (s) paramètre (s) peut-on agir pour influer sur f ' ?

DEUXIEME PROBLEME : Lévitation magnétique (d'après banque PT 2010) (barème : 80 points)

L'usage de calculatrice est autorisé pour ce problème.

Nous ne sommes pas suffisamment avancés en cours pour que vous puissiez aborder « sereinement » la partie II) 2) (étude de l'effet de peau). Vous pouvez tout de même vous laisser guider par l'énoncé et répondre aux questions. Dans tous les cas, faire les questions non traitées en temps voulu en vous aidant du corrigé.

La lévitation magnétique est utilisée pour faire circuler des trains à grande vitesse, en Chine ou au Japon par exemple. L'objet de ce problème est d'étudier les difficultés de mise en œuvre de la lévitation magnétique dans le cadre d'un modèle simple.

Données :

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\ \pi\ 10^{-7}$ H.m^{-1}.

Expressions de la divergence et du rotationnel d'un vecteur exprimé sur la base locale des coordonnées cylindriques :

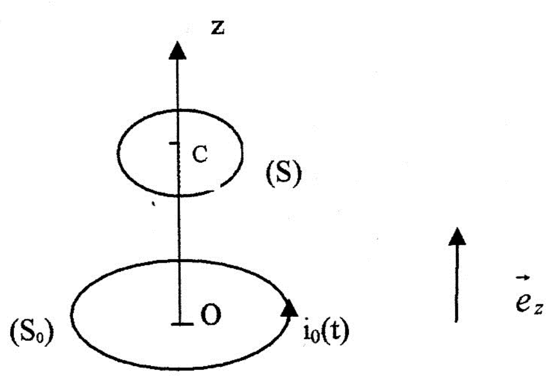
$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

On rappelle que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}(\vec{A})\right) - \vec{\Delta}(\vec{A})$

I) Interaction entre deux spires : (barème : 45 points)

On considère une spire S_0 située dans le plan horizontal, de centre O, d'axe Oz, de rayon a, parcourue par un courant sinusoïdal $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et une bobine (S) de même axe, de centre C situé à la cote positive $z_0 = a$, de rayon b, de résistance R et d'inductance L, comprenant N spires supposées confondues.
Dans toute l'étude, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.



On se place dans le cas où b << a.
Pour les applications numériques, on prendra : a = 1 m ; b = 0,1 m ; z_0 = a ; I_0 = 100 A ; f = 1000 Hz ; N = 5000 ; R = 100 Ω et L = 0,15 H.

1) On cherche à déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par S_0 en un point M de l'axe Oz, de cote z.
1-1) Justifier précisément la direction du champ.

1-2) L'élément de spire situé au point P de longueur $d\vec{l}$ crée au point M(0, 0, z) un champ élémentaire $d\vec{B}_P(M)$. La loi de Biot et Savart dit que $d\vec{B}_P(M)=\dfrac{\mu_0\, i_0}{4\pi}\dfrac{d\vec{l}\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ (μ_0 est la perméabilité magnétique du vide).

On pourra utiliser l'angle α sous lequel le rayon de la spire est vu du point M, soit $\alpha = (\widehat{OMP})$.

En intégrant et en projetant la loi de Biot et Savart, montrer que le champ résultant $\vec{B}(z)$ vaut $\vec{B}(z)=\dfrac{\mu_0\, a^2\, I_0 \cos(\omega t)}{2\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z$.

Exprimer le champ magnétique en C (**z = a**) en fonction de $B_0=\dfrac{\mu_0\, I_0}{4\sqrt{2}\, a}$.

2) Détermination du courant dans la bobine (S).

2-1) Quel est le phénomène responsable de la présence d'un courant i(t) dans (S) ?

En admettant que le champ est uniforme au voisinage de l'axe dans un plan orthogonal à celui-ci, calculer la fem dans la bobine (S). On introduira $E_0 = N\,\pi\, b^2\,\omega\, B_0$.

2-2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i(t).

2-3) Déterminer la solution de régime forcé sous la forme $i(t) = I \sin(\omega\, t - \varphi)$. Donner I et φ en fonction de E_0, ω, R et L.

2-4) Calculer I et φ.

3) Première détermination de la force.

3-1) Quelle est l'origine de la force subie par la bobine (S) due à la spire (S_0) ?

3-2) Déterminer cette force, toujours en supposant que le champ est uniforme au voisinage de l'axe.

4) Amélioration du modèle.

4-1) Dans un plan méridien, tracer l'allure des lignes de champ créées par (S_0).

On considère un point M repéré en coordonnées cylindriques (r, θ, z) au voisinage de l'axe. Et on cherche à déterminer une expression approchée du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par (S_0).

4-2) Montrer que sur la base locale des coordonnées cylindriques, une des composantes de $\vec{B}(M)$ est nulle.

4-3) Pourquoi peut-on assimiler la composante axiale $B_z(M)$ à B(z) déterminée en **1-2)** ?

4-4) Que vaut le flux du champ magnétique à travers une surface fermée ? Quelle est l'équation locale associée ?

4-5) En utilisant un cylindre élémentaire de rayon r d'axe Oz de bases situées aux cotes z et z + dz, montrer qu'au voisinage de l'axe la composante radiale vaut $B_r(M)=-\dfrac{r}{2}\dfrac{dB(z)}{dz}$.

4-6) Déterminer cette composante à la cote z = a sous la forme $B_r(r,a)=\dfrac{r}{a}B_1\cos(\omega\, t)$; le résultat obtenu est-il conforme à l'allure des lignes de champ ?

4-7) Déterminer la force, puis la force moyenne sur une période subie par (S) en fonction de B_1, N, a, b, I et φ.

4-8) Que devient cette force dans le cas limite où les effets résistifs masquent les phénomènes dus à l'auto-induction ?

4-9) Calculer numériquement cette force moyenne.

5) Autre point de vue.

5-1) Déterminer le moment magnétique total $\vec{m}$ associé à (S) en fonction de i(t).

5-2) La composante sur Oz de la force subie par un moment magnétique dans un champ s'écrit $\vec{f} = m \frac{d\vec{B}}{dz}$, m étant la composante du moment magnétique sur l'axe Oz et $\vec{B}$ le champ sur l'axe. Exprimer cette force moyenne en C, en fonction de B_1, N, a, b, I et φ et conclure.
5-3) On note F(z) la composante verticale de la force moyenne exercée sur la bobine située à la cote z et on indique que sur l'intervalle utilisé en z, F(z) est décroissante.
On étudie l'équilibre de la bobine de masse m dans le champ de la spire.
5-3-a) Ecrire la relation qui permet de déterminer la cote z_e à l'équilibre. Si l'on utilise un matériau plus léger pour les spires de la bobine, l'altitude d'équilibre sera-t-elle plus ou moins élevée ? Justifier la réponse.
5-3-b) Discuter la stabilité de l'équilibre.

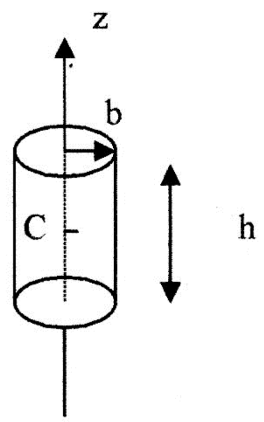
6) Champ total.
Dans cette question, C est confondu avec O et la résistance R est supposée nulle.

6-1) Justifier l'expression approchée suivante de l'inductance de la bobine (S) : $L = \frac{\mu_0}{2} N^2 \pi b$.

6-2) En utilisant les résultats de la partie I), déterminer l'expression du courant i(t).
6-3) Déterminer l'expression du champ magnétique créé par (S) en O puis le champ total en O. Pouvait-on prévoir cet effet ?

II) Effets volumiques : (barème : 35 points)

Dans le dispositif de la partie I), la bobine (S) est remplacée par un cylindre conducteur de conductivité γ, de hauteur h, de rayon b, également d'axe Oz. Le centre C du cylindre est à la cote z = a.



1) Modèle sommaire :

1-1) A quelle condition peut-on considérer que l'expression, en tout point du cylindre, du champ appliqué s'écrit $\vec{B}(M,t) = B_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z$? Nous prendrons cette forme dans un premier temps.
1-2) Quelle équation de Maxwell traduit le phénomène d'induction ?
1-3) Montrer que le champ électrique dans le cylindre est orthoradial et qu'il ne dépend que de r puis le déterminer sous la forme $\vec{E}(M,t) = K\, r \sin(\omega t)\vec{e}_\theta$.
1-4) Rappeler la loi d'Ohm sous forme locale. On définit le moment magnétique du cylindre à partir de la densité de courant volumique par la relation : $\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \overrightarrow{CP} \wedge \vec{j}(P)\, d\tau$ où $\vec{j}$ est la densité de courant.
Montrer sans calcul que $\vec{m}$ est colinéaire à Oz, et déterminer son expression.
1-5) A partir de l'expression du moment magnétique, le calcul de la force donne : $\vec{F} = \frac{-3\pi b^4 h \gamma}{16\, a} B_0^2\, \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t)\vec{e}_z$.

Que vaut cette force en moyenne ? Quelle différence avec la partie I) fait que l'on ne retrouve pas un résultat similaire ?

1-6) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_i$ dans le cylindre créé par les courants induits, sachant que $\vec{B}_i$ est nul en r = b.

1-7) Montrer qu'une condition pour que ce champ puisse être négligé s'écrit $b << \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}}$.

2) Amélioration du modèle : étude de l'effet de peau :

Dans un premier temps, on considère une géométrie plus simple dans laquelle le métal conducteur occupe tout le demi-espace (x > 0) tandis que le demi-espace (x < 0) est vide dans lequel règne un champ uniforme $\vec{B}_e(M,t) = B_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z$. Dans le métal, il y a un champ que l'on note $\vec{B}(M,t) = B(x,t)\vec{e}_z$.

2-1) Montrer que le champ magnétique dans le conducteur vérifie l'équation $\vec{\Delta}(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

2-2) Pourquoi peut-on dire que cette équation prend en compte les phénomènes d'auto-induction ?

2-3) On cherche une solution en régime harmonique permanent sous la forme complexe $\underline{\vec{B}(M,t)} = \underline{B}(x)\exp(i\omega t)\vec{e}_z$. Quelle équation différentielle vérifie $\underline{B}(x)$?

2-4) On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique $\vec{B}$ en présence de courants surfaciques séparant deux milieux 1 et 2 de part et d'autre de cette nappe de courant : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$, où $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la nappe de courant, $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal localement à cette surface et allant du milieu 1 vers le milieu 2, et $\vec{j}_S$ est le vecteur densité de courant surfacique. Que devient ici cette relation de passage en x = 0 ?

2-5) Résoudre l'équation caractéristique associée ; on posera $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$; quelle est la dimension de δ ?

En déduire B(x, t). Commenter la solution obtenue.

2-6) Déterminer la densité de courant dans le conducteur sous forme réelle.

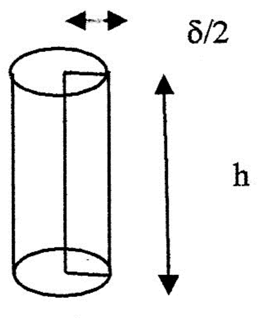
2-7) Déterminer la force moyenne élémentaire qui s'exerce sur un volume élémentaire dτ de conducteur.

2-8) Déterminer la résultante moyenne des forces qui s'exercent sur la portion de conducteur constituée par un cylindre de base S, d'axe Ox, de longueur infinie.

On revient à la géométrie du II-1), et on suppose que δ << b.

2-9) Justifier que l'on peut écrire une densité de courant volumique au voisinage du bord sous la forme : $\vec{j} = -\frac{B_0\sqrt{2}}{\mu_0 \delta}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\theta$ étant le vecteur unitaire orthoradial.

2-10) Calculer l'intensité du courant qui traverse une section de hauteur h et de largeur δ / 2.



En déduire le moment magnétique de cette distribution de courant.

2-11) Déterminer la force moyenne subie par le cylindre sachant que $\frac{d\vec{B}}{dz}(z=a) = -\frac{3B_0}{2a}\cos(\omega t)\vec{e}_z$ et que $h \ll a$ et b.
On utilise un dispositif à noyau de fer qui renforce le champ magnétique créé par la spire. Calculer cette force moyenne pour h = 0,01 m et B_0 = 0,22 T.
2-12) En pratique, à la place de la bobine, on utilise un corps supraconducteur. Le système acquiert ainsi une propriété mécanique indispensable. De quelle propriété s'agit-il ?