

DEVOIR SURVEILLE n° 3

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

AVERTISSEMENT

Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que

- les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques ;
- tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s ;
- les deux problèmes sont indépendants.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de calculatrice est interdit pour le 1^{er} problème, et autorisé pour le 2^{ème} problème.

Il est interdit d'arrêter de composer avant 17h00.

Vous devez traiter les 2 problèmes sur 2 copies différentes.

Si vous choisissez de ne pas traiter l'un des problèmes, vous devez tout de même me rendre une copie « blanche ».

	Barème	Ramassé à
Premier problème	50 %	15h00
Deuxième problème	50 %	17h00

Le 1^{er} problème est à traiter de 13h00 à 15h00 (ramassé à 15h00).

Le 2^{ème} problème est à traiter de 15h00 à 17h00.

Interdiction de commencer le 2^{ème} problème avant 15h00.

PREMIER PROBLEME : Moteurs à allumage commandé (d'après banque PT 2017)

L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.

Après le déclenchement de l'étincelle par la bougie, la combustion du mélange air-carburant se propage dans le cylindre. Pour obtenir un rendement optimal, il faut que le front de flamme atteigne le piston au moment où celui-ci est au point mort haut. L'étincelle doit être déclenchée légèrement en avance, afin de compenser le temps nécessaire à la propagation. Ce déclenchement précoce est appelé « avance à l'allumage ». Pour le quantifier, il est nécessaire de déterminer la « vitesse de flamme » dans le cylindre.

On modélise tout d'abord les **moteurs thermiques** en considérant une combustion instantanée du mélange (partie A) et on étudie la **combustion dans le cylindre** (partie B). On s'intéresse ensuite à la structure du front de flamme, avec l'**équation de la chaleur** (partie C) et un **bilan massique** (partie D), pour déterminer la **vitesse de flamme** (partie E).

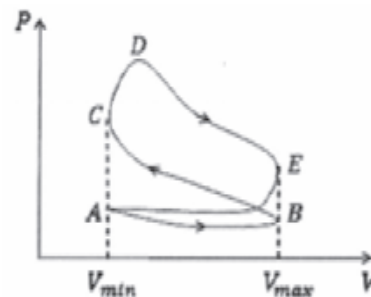
A) MOTEURS THERMIQUES

Le moteur est composé de plusieurs cylindres. Un piston mobile est lié à un système bielle-manivelle, ce qui transforme les allers-retours du piston en mouvement de rotation.

Deux soupapes permettent de faire entrer ou sortir un mélange air-essence. L'explosion entraîne une détente du mélange en repoussant le piston, lui permettant de céder du travail mécanique à l'arbre sur lequel sont fixées les roues.

Plus quantitativement, on distingue quatre temps :

- admission AB du mélange par la soupape d'admission ;
- compression BC par le retour du piston ;
- combustion CD (étincelle produite par la bougie) puis détente DE ;
- échappement EA par la soupape d'échappement.



En pratique, un moteur comporte souvent quatre pistons dont chacun est dans un temps différent de fonctionnement. Cela permet d'homogénéiser le fonctionnement du moteur et de lisser l'action motrice.

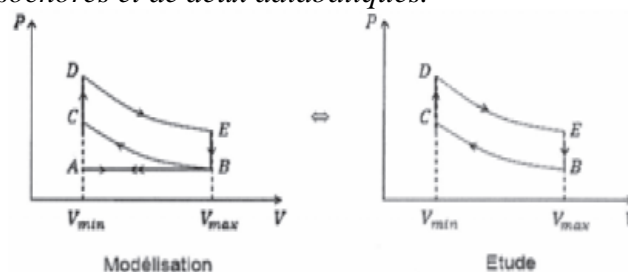
La modélisation du système nécessite un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

- le mélange des fluides présents (air et carburant) est assimilé à un gaz parfait, caractérisé par un

$$\text{rapport } \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4 ;$$

- l'étape EA est assimilée à une étape EB suivie d'une étape BA ;
- les étapes CD et EB sont suffisamment rapides pour qu'elles puissent être considérées isochores ;
- les étapes BC et DE sont supposées adiabatiques.

Le cycle BCDE obtenu peut être tracé dans le diagramme de Clapeyron et se nomme cycle Beau de Rochas, composé de deux isochores et de deux adiabatiques.



On cherche à évaluer le rendement du cycle modèle, en fonction de $\alpha = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$, nommé rapport volumétrique ou de compression. Les adiabatiques sont supposées réversibles, et les isochores mécaniquement réversibles. La quantité de matière dans le cylindre est notée n .

Q1. Identifier les phases de contact avec les sources chaude et froide. Pourquoi ces phases ne sont pas réversibles ?

Q2. Evaluer le transfert thermique avec la source chaude Q_c en fonction de la quantité n , de la capacité thermique à volume constant $C_{v,m}$ et des températures atteintes aux points C et D.

Q3. Faire de même avec Q_f .

Q4. Définir le rendement η , puis déterminer son expression en fonction des températures T_B , T_C , T_D et T_E .

Q5. Ecrire la loi de Laplace (après avoir rappelé les hypothèses nécessaires) pour les étapes BC et DE. Exprimer ensuite le rendement en fonction uniquement du rapport de compression α et du rapport γ du gaz.

Q6. Comment se comporte η en fonction de α ? Quel phénomène technique empêche de se rapprocher autant qu'on le désire d'un rendement unité ?

B) COMBUSTION DANS LE CYLINDRE

On modélise la combustion du carburant dans le cylindre avec les hypothèses suivantes :

- le mélange stoechiométrique combustible – comburant (dioxygène de l'air) est préalablement effectué dans le carburateur ;
- les réactifs et les produits sont en phase gazeuse ;
- la quantité de matière est conservée lors de la combustion ;
- les gaz frais sont à température uniforme et au repos dans le référentiel terrestre avant la réaction.

On note symboliquement la réaction : $C + O \rightarrow P + Q$, où C désigne le combustible, O le comburant, P et Q les produits de la réaction.

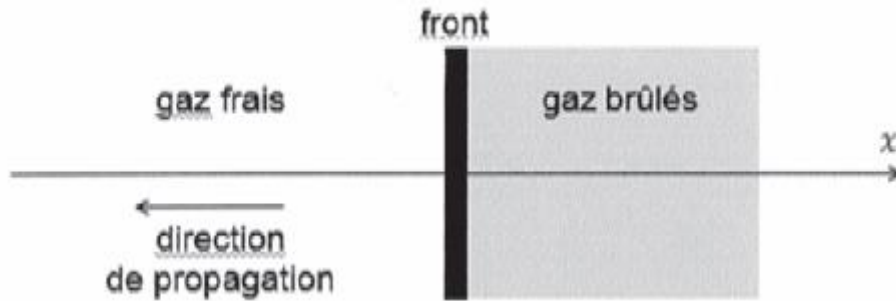
Q7. Ecrire l'équation de la combustion entre l'isooctane C_8H_{18} et le dioxygène.

Q8. Justifier, en s'appuyant sur la composition de l'air, l'hypothèse simplificatrice selon laquelle la quantité de gaz ne change pas.

C) EQUATION DE LA CHALEUR

On se place dans une géométrie simple : la réaction a lieu dans un tube calorifugé de section S : le problème est unidimensionnel selon l'axe des abscisses x .

On considère que la pression P , la capacité thermique massique c_p et la conductivité thermique λ sont constantes, uniformes et indépendantes de la température.



On note T la température, μ la masse volumique totale, μ_C celle de l'espèce C et v la vitesse du gaz dans le référentiel qui se déplace avec la flamme.

L'équation locale qui traduit un bilan d'énergie s'écrit : $\text{div } \vec{j}_{\text{th}} + \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0$, où \vec{j}_{th} est la densité de courant thermique.

Q9. Simplifier l'expression dans le cadre d'une situation unidimensionnelle selon l'axe des abscisses.

Q10. Vérifier que les différents termes de cette équation correspondent à des puissances volumiques.

Cette équation ne permet pas de décrire correctement la diffusion thermique dans le cylindre puisque la réaction de combustion dégage de la chaleur.

On note Q la chaleur dégagée par la combustion d'une mole de combustible C (enthalpie molaire).

Q11. Montrer que la puissance volumique dégagée par la combustion s'écrit $P_{\text{vol}} = Q v_r$, où $v_r = -\frac{1}{V} \frac{dn_C}{dt}$ est la vitesse volumique de la réaction de combustion.

On ajoute cette « source » au bilan d'énergie pour écrire : $\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} + \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} = Q v_r$.

On s'intéresse maintenant à la densité de courant thermique qui comprend un terme diffusif et un terme convectif : $\vec{j}_{\text{th}} = \vec{j}_{\text{th}}^d + \vec{j}_{\text{th}}^c$.

Q12. Rappeler l'expression de la loi de Fourier pour exprimer j_{th}^d , en projection sur l'axe des abscisses. Rappeler qualitativement le sens physique du signe « - ».

Q13. Par analogie avec le vecteur densité de courant de masse $\vec{j} = \mu \vec{v}$ qui définit le transport convectif, exprimer le vecteur \vec{j}_{th}^c en fonction de μ , \vec{v} , c_p et T .

La conservation de la masse permet de montrer que la quantité μv est uniforme. On pose $\mu v = \mu_f U$, où μ_f est la masse volumique des gaz frais loin de la flamme et U représente la vitesse des gaz frais par rapport à la flamme (soit en valeur absolue la vitesse de la flamme dans le référentiel terrestre).

On introduit la fraction massique $w_C = \frac{\mu_C}{\mu}$.

Q14. Réécrire l'équation différentielle vérifiée par la température. Simplifier en considérant la structure de flamme stationnaire : $T = T(x)$, pour obtenir une relation en fonction des paramètres c_p , λ , μ_f , U , Q et v_r .

D) BILAN MASSIQUE

Un bilan de masse sur le combustible C de masse molaire M_C , prenant en compte les aspects diffusifs et convectifs, permet d'obtenir l'équation : $U \frac{dw_C}{dx} - \frac{\mu D}{\mu_f} \frac{d^2 w_C}{dx^2} = -\frac{M_C v_r}{\mu_f}$, où D est un coefficient de diffusion.

Q15. Déterminer la dimension du coefficient D .

On définit la concentration massique réduite χ et la température réduite θ par : $\chi = \frac{w_C}{w_{Cf}}$ et $\theta = \frac{T - T_f}{T_b - T_f}$.

Ces deux grandeurs sans dimension sont liées par $\chi = 1 - \theta$.

Q16. Déterminer les valeurs que peut prendre θ .

Q17. Indiquer ce que représente χ .

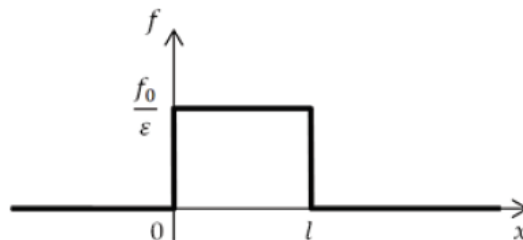
L'équation issue du bilan de masse peut être réécrite : $U \frac{d\theta}{dx} - D_f \frac{d^2 \theta}{dx^2} = f$, où D_f est une constante et f une fonction de θ .

E) VITESSE DE FLAMME

Pour résoudre l'équation, on modélise la fonction f par un créneau :

- pour $\theta \in [0, 1 - \varepsilon[$, $f(\theta) = 0$;
- pour $\theta \in [1 - \varepsilon, 1[$, $f(\theta) = \frac{f_0}{\varepsilon}$;
- pour $\theta = 1$, $f(\theta) = 0$.

Dans la suite, on fixe l'origine O de l'axe des abscisses au point où $\theta = 1 - \varepsilon$, et on note l l'abscisse du point où θ devient égal à 1. Si on considère alors f comme une fonction de x , on admet que $f(x)$ a l'allure suivante :



Q18. Montrer que dans chacun des trois domaines (domaine 1 : $x < 0$, domaine 2 : $0 < x < l$, domaine 3 :

$x > l$), la fonction $\theta(x)$ est de la forme : $\theta(x) = A e^{\frac{x}{d}} + Bx + C$, où A , B et C sont des constantes différentes dans chacun des domaines.

Les conditions aux limites permettent de déterminer les expressions dans chacun des domaines :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(x) = (1 - \varepsilon) e^{\frac{x}{d}} \\ \theta_2(x) = 1 + \frac{f_0}{\varepsilon U} (x - l) + \frac{f_0 d}{\varepsilon U} \left(1 - e^{-\frac{x-l}{d}} \right) \\ \theta_3(x) = 1 \end{array} \right.$$

Q19. Justifier la continuité des fonctions $\theta(x)$ et $\frac{d\theta}{dx}$.

Q20. Utiliser ces continuités en $x = 0$ pour montrer que $1 = \frac{\varepsilon U}{f_0}$ et pour établir une relation entre ε , f_0 , d et U .

En pratique, $\varepsilon \ll 1$, et on rappelle que pour $|\alpha| \ll 1$, $e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2)$.

Q21. Dans cette approximation, montrer que $\frac{U}{f_0} = 2d$.

Q22. Justifier l'appellation « épaisseur de flamme » pour d .

Q23. Dans des conditions usuelles ($T_b \approx 2000$ K), f_0 est de l'ordre de 10^4 Hz et D_f de l'ordre de 10^{-5} m².s⁻¹. Calculer la vitesse de flamme U et l'épaisseur de la flamme d .

DEUXIEME PROBLEME : Etude d'une installation exploitant l'énergie géothermique (d'après banque PT 2001)

L'usage de calculatrice est autorisé pour ce problème.

I) Evolution de la température dans la croûte terrestre :

La croûte terrestre est considérée comme homogène. De l'énergie y est libérée, avec une puissance volumique μ , supposée uniforme. On utilisera un modèle unidimensionnel : la température T du sous-sol ne dépend que de la variable z . La surface libre du sol est le plan horizontal $z = 0$ et la croûte terrestre correspond à des valeurs de z négatives.

Données du problème :

Conductivité thermique du sous-sol : $\lambda = 2,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Capacité thermique volumique du sous-sol : $c = 2,5.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$

Puissance volumique libérée au sein de la croûte terrestre : $\mu = 5,0.10^{-6} \text{ W.m}^{-3}$

Flux thermique surfacique à la surface (en $z = 0$) : $j_0 = 100 \text{ mW.m}^{-2}$

Température du sol à la surface (en $z = 0$) : $T_0 = 285 \text{ K}$.

- 1) Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(z, t)$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(z)$ en régime permanent.
- 2) En déduire $T(z)$.
- 3) A quelle profondeur faut-il forer pour rencontrer une température égale à $200 \text{ }^\circ\text{C}$?
- 4) Calculer la puissance thermique produite dans un volume de roche égal à $1,0 \text{ km}^3$. Proposer une origine pour ce phénomène.
- 5) Calculer la puissance thermique à travers une surface de $1,0 \text{ km}^2$ découpée sur le plan $z = -5000 \text{ m}$.

II) Etude d'un module expérimental :

L'exploitation envisagée consiste à forer au moins deux puits voisins. L'un des puits sert à extraire une saumure (liquide) chaude, l'autre à la réinjecter, plus froide, dans le sous-sol après qu'elle ait fourni de l'énergie dans l'usine d'exploitation. Les deux puits sont en communication souterraine par un réseau de fractures naturelles ou artificielles. La saumure froide réinjectée pourra donc se réchauffer à nouveau au contact des roches profondes.

On considère un module expérimental où la saumure est extraite à la température $T_{c1} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ et réinjectée à $T_{c2} = 65 \text{ }^\circ\text{C}$. Le débit massique de la saumure q_{ms} est égal à $42,5 \text{ kg.s}^{-1}$. La capacité thermique massique de la saumure est $c_{ps} = 4,2 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

- 1) Calculer la puissance thermique extraite, littéralement et numériquement.
- 2) Etablir l'expression du rendement r d'une machine motrice ditherme réversible (cycle de Carnot).
- 3) La saumure chaude sert de source chaude, dont la température varie de T_{c1} à T_{c2} , pour un moteur thermique dont la source froide est à la température constante $T_F = 7 \text{ }^\circ\text{C}$.
Calculer littéralement et numériquement la puissance mécanique maximale récupérable avec cette installation et le rendement global ρ de l'opération.

- 4) Des considérations cinétiques conduisent à admettre une expression plus réaliste du rendement d'une machine motrice ditherme : $r = 1 - \sqrt{\frac{T_F}{T_C}}$. Calculer littéralement et numériquement une nouvelle estimation de la puissance mécanique récupérable et du rendement de l'installation.

III) Les deux puits ont une profondeur égale à 5000 m. Ils sont complètement remplis de saumure.

- 1) En négligeant les variations de la pesanteur avec z , calculer la pression de la saumure au fond du puits. La masse volumique de la saumure est égale à $1060 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. On prendra $g = 9,80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et une pression $P_0 = 1,00\cdot 10^5 \text{ Pa}$ pour $z = 0$.
- 2) La saumure chaude prélevée à la profondeur de 5000 m reste à température constante durant toute la remontée dans le puits d'extraction. On rappelle la relation empirique de Duperray concernant la pression de vapeur saturante de l'eau :
- $$P_s = P_0 \left(\frac{t}{100} \right)^4$$
- , avec la température t exprimée en $^{\circ}\text{C}$ et $P_0 = 1,00\cdot 10^5 \text{ Pa}$. On admet que la saumure possède ici les mêmes propriétés que l'eau. Des phénomènes gênants risquent de se produire dans le puits. Quelle est leur nature et à quelle profondeur peuvent-ils se produire ?
- 3) Montrer qu'une pression du fluide supérieure à 15 bars en tête de puits, c'est-à-dire pour $z = 0$, suffit à éviter les difficultés évoquées dans la question précédente.

IV) Echangeur à contre-courant :

L'échangeur, supposé parfaitement calorifugé, est siège d'un transfert thermique entre deux liquides circulant à contre-courant :

- la saumure, de débit massique $q_{ms} = 42,5 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, de capacité thermique massique $c_{ps} = 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ dont la température est T_{c1} à l'entrée et T_{c2} à la sortie de l'échangeur.
- un fluide f , de débit massique q_{mf} , de capacité thermique massique à pression constante $c_{pf} = 2,0 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, qui entre dans l'échangeur à la température T_{f1} et en ressort à la température T_{f2} (voir les figures 1 et 2).

L'échangeur est modélisé par deux conduites de sections rectangulaires, séparées par une plaque métallique de longueur $L = 2,0 \text{ m}$, de largeur a et d'épaisseur $e = 0,50 \text{ mm}$. La conductivité thermique du métal constituant la plaque est $\lambda_p = 45 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. L'ensemble est parfaitement calorifugé.

Sur les figures 1 et 2, la plaque métallique est hachurée.

L'échangeur est repéré par un axe Ox , parallèle aux écoulements et un axe Oz perpendiculaire à Ox : voir la figure 2. Le plan xOy est plan de symétrie de la plaque.

On se propose de déterminer, en régime stationnaire, les températures respectives $T_c(x)$ et $T_f(x)$ des fluides traversant l'échangeur. Les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur des fluides sont négligées.

- 1) On considère une tranche d'échangeur comprise entre les abscisses x et $x + dx$. En n'envisageant que le phénomène de conduction thermique dans la portion de plaque métallique de longueur dx , exprimer la puissance thermique élémentaire transférée de la saumure au fluide f , en fonction de λ_p , a , e , $T_c(x)$, $T_f(x)$ et dx , en précisant les sens d'orientation et les signes. Chaque face de la plaque est à la température du fluide avec lequel elle est en contact.

- 2) Ecrire le bilan thermique de la saumure entre les abscisses $x + dx$ et x .
- 3) Ecrire le bilan thermique du fluide f entre les abscisses x et $x + dx$.
- 4) En déduire une relation simple entre $\frac{dT_c(x)}{dx}$ et $\frac{dT_f(x)}{dx}$, puis exprimer $T_f(x)$ en fonction de $T_c(x)$.
- 5) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T_c(x)$.
- 6) Intégrer cette équation différentielle dans le cas où $q_{mf} = 89,3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $q_{ms} = 42,5 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.
- 7) Calculer alors la valeur de a si $T_{f1} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 8) Si la valeur de a vous paraît excessive, comment procéder pour rendre l'échangeur moins encombrant.

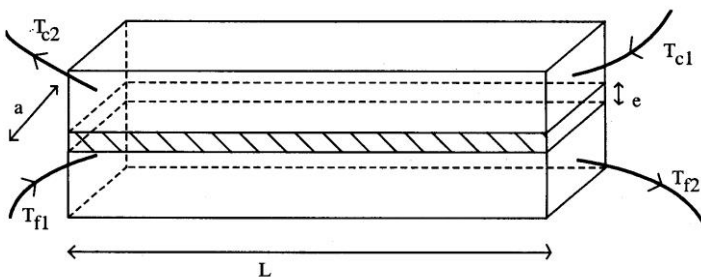


Figure 1

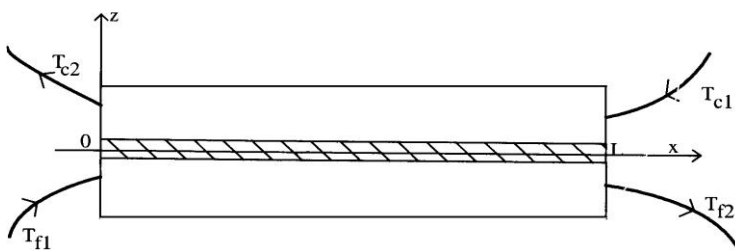


Figure 2