PT 2016-2017 **16-09-2016**

DEVOIR SURVEILLE n° 1

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de calculatrice est interdit pour l'ensemble des problèmes constituant ce devoir.

Il est interdit d'arrêter de composer avant 17h00.

Vous devez traiter les 3 problèmes sur 3 copies différentes.

Si vous choisissez de ne pas traiter l'un des problèmes, vous devez tout de même me rendre une copie « blanche ».

	Barème	Ramassé à
Premier problème	18 %	14h00
Deuxième problème	44 %	16h00
Troisième problème	38 %	17h00

Vous avez tout intérêt à faire dans l'ordre : le 1er problème, puis le 2ème problème, et enfin le 3ème problème !

Vous êtes libres de commencer le problème suivant avant que je ramasse les copies (vous pouvez par exemple commencer le 2ème problème avant 14h00).

PREMIER PROBLEME : Etude d'un tensiomètre électronique (d'après banque PT 2016)

L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.

Dans le domaine médical, la pression artérielle est l'un des paramètres les plus surveillés dans le cadre des maladies cardio-vasculaires. En effet, quand la pression artérielle est trop élevée, pendant des durées très longues, le muscle cardiaque finit par se fatiguer jusqu'à atteindre des insuffisances cardiaques sévères ; on parle d'hypertension.
A l'inverse, une tension trop basse conduit à sous-alimenter les organes et peut conduire à des étourdissements ou évanouissements. L'hypotension n'est généralement pas considérée comme une maladie.

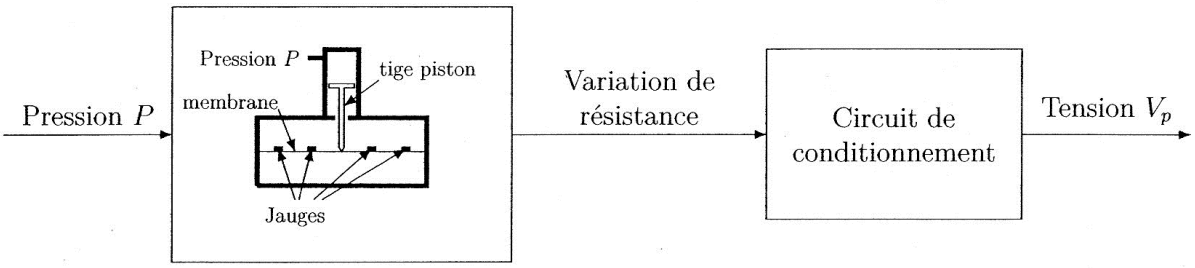
Communément, la mesure de la pression artérielle se fait par la détermination de deux valeurs classiques : la pression systolique (pression la plus élevée suite à la contraction du cœur) et la pression diastolique (pression la moins élevée après le relâchement du cœur quand celui-ci se remplit de sang).
Pour mesurer ces pressions, le médecin utilise classiquement la méthode du brassard associé à son stéthoscope. Le médecin gonfle le brassard jusqu'à couper la circulation sanguine dans le bras. Le médecin pose ensuite le stéthoscope sur l'artère et dégonfle progressivement le brassard. Dès qu'il écoute le sang passer à nouveau dans l'artère, il mesure la pression systolique sur le manomètre associé au brassard. Puis il continue à dégonfler le brassard jusqu'à ne plus écouter aucun bruit, là il lit la pression diastolique.

On peut également mesurer ces pressions avec un tensiomètre électronique (voir figure ci-contre, tensiomètre utilisé en milieu hospitalier). Il existe des modèles simples pour les particuliers et des modèles beaucoup plus complets dans le cadre des milieux médicaux.
Le but de ce problème est d'étudier le capteur de pression.

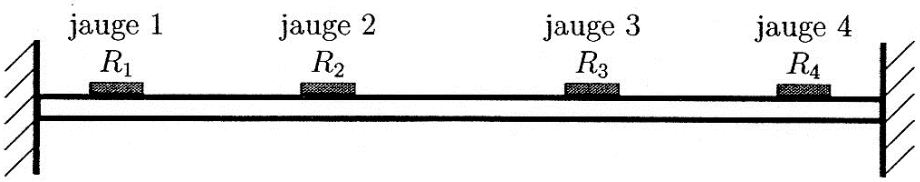
Les applications numériques seront données avec 1 chiffre significatif.

1) Etude du capteur : modélisation de la déformation de la membrane :

Le principe du capteur de pression repose sur l'effet piézorésistif (voir figure ci-dessous). La cellule sensible du capteur est constituée d'une membrane se déformant sous l'effet de la force appliquée par un micro-vérin. Le micro-vérin applique une force F proportionnelle à la pression du brassard. Sur la membrane sont fixées 4 jauges de déformation. Les résistances électriques de ces jauges varient sous l'effet d'une déformation. Puis cette variation de résistance est transformée en tension électrique V_p au moyen d'un circuit de conditionnement.
L'objectif de ce problème est de relier la pression du brassard à la tension mesurée dans le circuit de conditionnement en fonction des différents paramètres caractéristiques du capteur.
La figure ci-dessous montre le principe de fonctionnement du capteur et de la mesure.



Quatre jauges de déformation sont disposées sur la peau extérieure de la membrane, de la manière suivante :



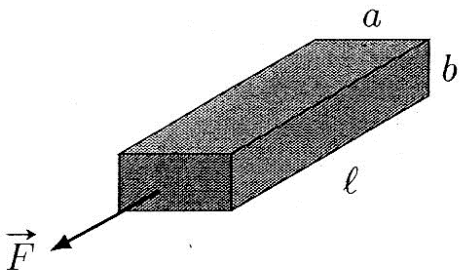
On admet que les jauges de déformations disposées sur la membrane (voir figure précédente) subissent une déformation proportionnelle à l'intensité de la force F appliquée par le piston :

$\varepsilon_1 = - \varepsilon_2 = - \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = k\,F$ où k est fonction des paramètres caractéristiques du capteur.

2) Choix des jauges de déformations :

On cherche maintenant à déterminer la relation entre la variation de la résistance de la jauge de déformation et l'effort presseur F.

Considérons une jauge de déformation de forme parallélépipédique constituée d'un matériau homogène de résistivité ρ (s'exprimant en Ω.m). On note l sa longueur, a et b ses dimensions transversales, s sa section droite (voir figure ci-dessous).



La résistance électrique R de ce corps d'épreuve s'exprime au moyen de la relation $R = \rho \dfrac{l}{s}$.

Q1. Lorsque la jauge d'épreuve est soumise à une force $\vec{F}$ appliquée parallèlement à l, elle se déforme : l, s et ρ subissent de petites variations valant respectivement δl, δs et δρ. Exprimer la variation relative de résistance électrique $\dfrac{\delta R}{R}$.

Les variations de l et de a et b ne sont pas indépendantes : $\dfrac{\delta a}{a} = \dfrac{\delta b}{b} = - \nu \dfrac{\delta l}{l}$ avec ν une constante dépendant du matériau, appelée coefficient de Poisson.

Q2. Exprimer $\dfrac{\delta R}{R}$ en fonction de $\dfrac{\delta l}{l}$, ν et $\dfrac{\delta \rho}{\rho}$.

Dans le cas d'un métal, δρ est lié à la variation δV du volume V selon la loi $\dfrac{\delta \rho}{\rho} = c.\dfrac{\delta V}{V}$, avec c une constante appelée constante de Bridgman.

Q3. Montrer que $\dfrac{\delta R}{R}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\delta R}{R} = K \frac{\delta l}{l}$$ avec K une constante appelée facteur de jauge.

Dans le cas d'un semi-conducteur, $\delta\rho$ est lié à la contrainte $\sigma = \frac{\|\vec{F}\|}{s}$ selon la loi $\frac{\delta\rho}{\rho} = \Pi.\sigma$, avec Π une constante appelée constante de piézorésistivité ; de plus, le module de Young E du matériau lie la contrainte σ et la déformation $\frac{\delta l}{l}$: $\frac{\delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$.

Q4. Exprimer le facteur de jauge dans le cas d'un semi-conducteur.

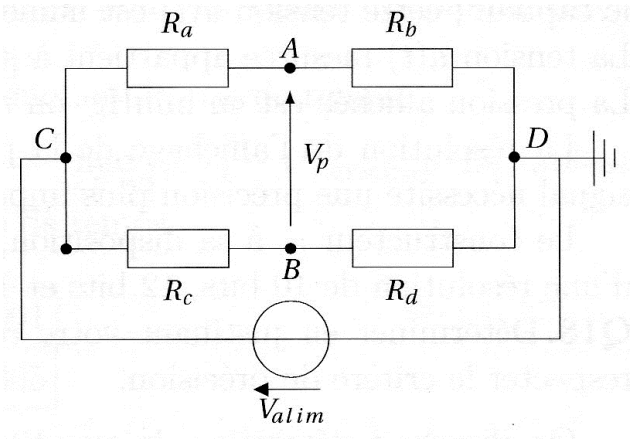
On donne :
- Pour le cuivre : $\nu = 0{,}3$; $c = 1$;
- Pour le silicium : $\nu = 0{,}4$; $E = 10^{11}$ Pa ; $\Pi = 10^{-9}$ Pa^{-1}.

Q5. Evaluer le facteur de jauge dans le cas du cuivre et dans le cas du silicium. Commenter.

Q6. Quel phénomène peut induire une erreur sur la mesure de la contrainte ?

3) Circuit de conditionnement : pont de Wheastone :

Les 4 jauges semi-conductrices identiques, de résistance R_0 à l'équilibre, sont fixées sur la membrane. Les déformations $\frac{\delta l}{l}$ des différentes jauges sont ε_1, ε_2, ε_3 et ε_4.
La déformation des jauges conduit à une variation ΔR_i (i = a, b, c ou d) de leur résistance. Les 4 jauges sont branchées en pont de Wheastone, alimenté sous une tension $V_{alim} = 16$ V. Les bornes A et B sont branchées à un amplificateur de résistance d'entrée très grande.



Q7. Déterminer l'expression de la tension V_p en fonction des paramètres du pont.

A l'équilibre le pont est réglé de manière à avoir $V_p = 0$.

Q8. Déterminer la variation de tension $\Delta V_p = V_p$ lorsque les résistances subissent des variations ΔR_i en fonction des variations ΔR_i, V_{alim}, R_0.

Q9. La jauge 1 correspond à la résistance R_b. Déterminer la position qu'il convient de donner aux autres jauges dans le pont de Wheastone (autrement dit faire le lien entre les jauges 2, 3 et 4 avec les résistances R_a, R_c et R_d du pont).

Q10. Exprimer la tension V_p en fonction de V_{alim}, ε_1 et du facteur de jauge K.

On considère un capteur de pression constitué d'une membrane en silicium de surface S_m.

Q11. Etablir la relation entre la tension V_p et la pression $P = \frac{F}{S_m}$, en faisant intervenir les grandeurs K, V_{alim}, k et S_m.

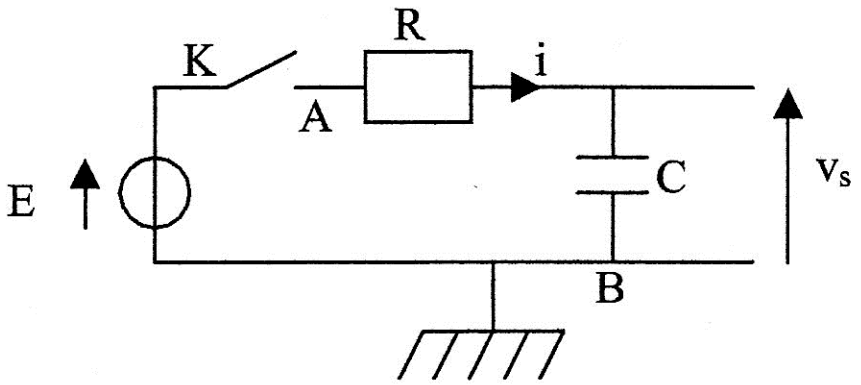
DEUXIEME PROBLEME : Circuit RC (d'après CCP TSI 2005)

L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.

Première partie : Charge d'un condensateur à travers une résistance

Un dipôle comporte entre deux bornes A et B une résistance R et un condensateur de capacité C placés en série.
On place aux bornes A et B du dipôle un générateur de tension idéal de force électromotrice constante E et un interrupteur K.
Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit v_s la tension aux bornes du condensateur.

A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur K.



1) Quel est le comportement du condensateur au bout d'un temps très long (infini) après la fermeture de l'interrupteur ? En déduire les valeurs correspondantes de v_s et de l'intensité i dans le circuit au bout d'un temps très long.

2) On pose $\tau = RC$.
On se place à $t \geq 0$.

Quelle est l'unité de τ dans le système international ? Démontrer le résultat.
Quel est le nom donné à cette constante ?

3.1) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit $v_s(t)$.

3.2) Etablir l'expression de la tension $v_s(t)$ au cours du temps (pour $t \geq 0$). Trouver à partir de cette expression la valeur de $v_s(t)$ pour un temps très long. Vérifier que cette valeur correspond au comportement du condensateur prévu à la question 1.

3.3) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $v_s(t)$ en précisant son asymptote.
Calculer la valeur de la pente de la courbe à t = 0.
Tracer la tangente à l'origine et calculer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.

3.4) Déterminer, en fonction de τ, l'expression du temps t_1 à partir duquel la charge du condensateur diffère de moins de 1 % de sa charge finale.

4) Déterminer l'expression de l'intensité i(t) du courant qui circule dans le circuit pour $t \geq 0$. (L'orientation de i(t) est précisée sur le schéma).

Deuxième partie : Etude énergétique de la charge du condensateur

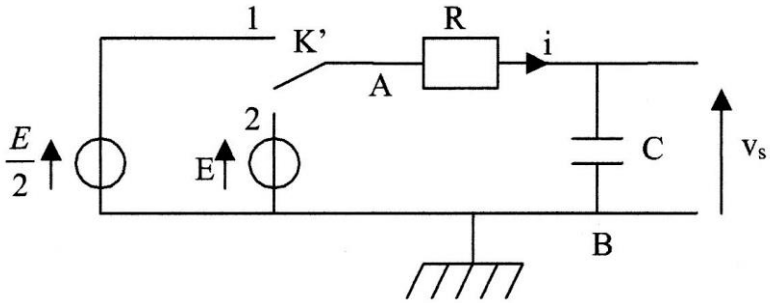
5.1) Exprimer l'énergie E_c emmagasinée par le condensateur lorsque sa charge est terminée en fonction de C et E.

5.2) Déterminer, à partir des résultats de la question précédente, l'expression de l'énergie E_j dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la charge. On exprimera E_j en fonction de C et de E.

5.3) Montrer, à partir des résultats de la partie précédente, que l'énergie E_g fournie par le générateur au cours de la charge est égale à $E_g = C\,E^2$.
Vérifier la conservation de l'énergie au cours de la charge du condensateur.

5.4) Définir et calculer le rendement énergétique ρ de la charge du condensateur par le générateur à travers une résistance non inductive.

6) Afin d'améliorer le rendement de la charge du condensateur, on effectue celle-ci en deux étapes. On considère pour cela le montage ci-contre :



A la date t = 0, le condensateur étant déchargé, on ferme l'interrupteur K' dans la position 1 (phase 1). Lorsque la charge sous la tension $\frac{E}{2}$ est terminée, on bascule K' dans la position 2 (phase 2) et on procède à la charge du condensateur sous la tension E.

6.1) Quelle est l'énergie E_{g1} fournie par le générateur au cours de la première phase de charge ?
Quelle est l'énergie E_{c1} emmagasinée par le condensateur au cours de la première phase de charge ?
Ces résultats pourront être déduits des questions précédentes.

6.2) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la tension v_s au cours de la deuxième phase de charge ?
En prenant pour origine de temps (t = 0) la date à laquelle on bascule l'interrupteur de la position 1 dans la position 2, déterminer l'expression de $v_s(t)$ en fonction du temps au cours de la deuxième phase de charge.

6.3) En déduire, en fonction du temps, l'expression de l'intensité i(t) qui traverse le circuit au cours de la deuxième phase de charge.

6.4) En utilisant les expressions de v_s et de i en fonction du temps, déterminer :

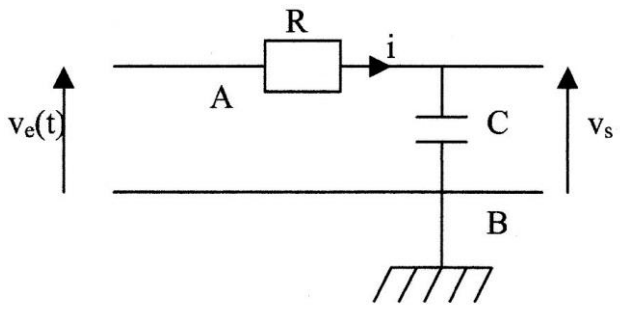
- l'expression de l'énergie E_{g2} fournie par le générateur au cours de la deuxième phase de charge en fonction de C et E.
- l'expression de l'énergie E_{c2} emmagasinée par le condensateur au cours de la deuxième phase de charge en fonction de C et E.

6.5) Calculer le rendement ρ' de la charge du condensateur lorsque cette dernière est effectuée en deux étapes.

7) Compte-tenu des rendements obtenus lors de la charge du condensateur avec les deux méthodes précédentes, indiquer comment il faudrait procéder pour faire tendre le rendement de la charge du condensateur vers 1. Aucun calcul n'est demandé dans cette question.

Troisième partie : Circuit en régime sinusoïdal

On applique entre les bornes A et B du dipôle de la première partie une tension alternative sinusoïdale de pulsation ω : $v_e(t) = V_e.\cos(\omega.t)$ où V_e est une constante et où la pulsation ω du générateur peut varier.
v_e est la tension d'entrée du filtre et v_s la tension de sortie.



8) Comment se comporte le condensateur à très basse et à très haute fréquence ? En déduire la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, passe-bande, réjecteur de bande…).

9) En faisant varier la pulsation (et donc la fréquence) de la tension d'entrée v_e, on obtient aux bornes du condensateur une tension de la forme : $v_s(t) = V_s(\omega).\cos(\omega.t + \varphi(\omega))$.

On appelle gain en amplitude $G(\omega)$ le rapport des tensions maximales : $G(\omega) = \dfrac{V_s(\omega)}{V_e}$.

Le gain en décibel g est défini par $g = 20 . \log G(\omega)$ où log représente la fonction logarithme décimal.

On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

Remarque : On pourra utiliser les notations complexes si nécessaire. Il faudra pour cela définir clairement les notations utilisées.

9.1) Déterminer l'expression du gain du filtre $G(\omega)$ en fonction de ω, R et C puis en fonction de ω et ω_0.
Déterminer l'expression du déphasage $\varphi(\omega)$ de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée en fonction de ω, R et C puis en fonction de ω et ω_0.

9.2) Indiquer les valeurs de G, g et φ lorsque :
- la pulsation ω tend vers 0,
- la pulsation ω est égale à ω_0,
- la pulsation ω tend vers l'infini.

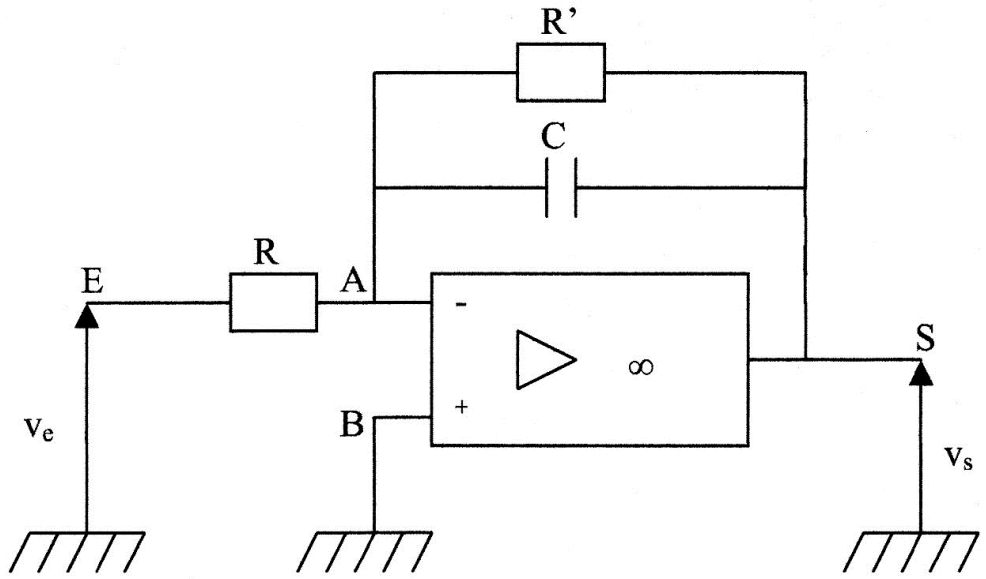
On pourra, pour plus de clarté, présenter les résultats dans un tableau.
Quelle est la pente de la courbe $g(\log \omega)$ lorsque ω tend vers l'infini ? Une démonstration précise est attendue.

9.3) Tracer, sur un premier graphique et en se servant des résultats de la question précédente, le diagramme de Bode asymptotique du gain en décibel $g(\log \omega)$ en fonction de $\log \omega$. Indiquer sur le même graphique l'allure du diagramme de Bode réel.
De même, tracer sur un deuxième graphique et en se servant des résultats de la question précédente, le diagramme de Bode asymptotique du déphasage $\varphi(\log \omega)$ en fonction de $\log \omega$. Indiquer sur le même graphique l'allure du diagramme de Bode réel.

10) On appelle pulsation de coupure ω_c, la pulsation pour laquelle la différence entre le gain (en décibel) et le gain maximum est de – 3 dB.
ω_c est telle que $g(\omega_c) = g_{max} - 3$ dB et g_{max} est la valeur maximale de $g(\omega)$ lorsque ω appartient à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Exprimer ω_c en fonction de R et de C puis en fonction de ω_0.

Quatrième partie : Caractère intégrateur d'un filtre

On considère le montage ci-dessous dans lequel l'amplificateur linéaire intégré est idéal et fonctionne en régime linéaire.



11) Déterminer l'équation différentielle (1) vérifiée par $v_s(t)$ en fonction de $v_e(t)$, R, R' et C.

12) Réponse à un signal d'entrée sinusoïdal
Le signal d'entrée du filtre est un signal sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude V_e. On a ainsi :
$v_e(t) = V_e.\cos(\omega.t)$.

12.1) Caractère intégrateur
A quelle condition portant sur R', C et ω, le montage précédent est-il intégrateur ?
Déterminer dans ce cas la réponse $v_s(t)$ du filtre en fonction du temps. On ne fera pas intervenir de constante d'intégration.

12.2) Condition de linéarité du montage
A quelle condition portant sur R', C et ω, la tension de sortie est-elle proportionnelle à la tension d'entrée ? Montrer que le montage est alors un amplificateur inverseur dont on précisera le gain.

13) Réponse à un échelon de tension
On se place dans le cas où la tension d'entrée $v_e(t)$ est un échelon de tension tel que :
$v_e(t) = 0$ pour $t < 0$,
$v_e(t) = E$ pour $t \geq 0$ où E représente une tension constante.

13.1) Cas général
Le condensateur étant initialement déchargé à t = 0, déterminer l'expression de $v_s(t)$ pour $t \geq 0$ dans le cas général où la tension $v_s(t)$ vérifie l'équation différentielle (1).

13.2) Caractère intégrateur
En réalisant un développement limité au premier ordre en $\frac{t}{R'C}$ de l'expression obtenue dans la question précédente, déterminer l'expression de la fonction $v_s(t)$. Montrer qu'alors le circuit précédent est intégrateur. A quelle condition portant sur R', C et t le résultat précédent est-il valable ?
Quelle valeur la tension $v_s(t)$ ne pourra-t-elle pas dépasser ?

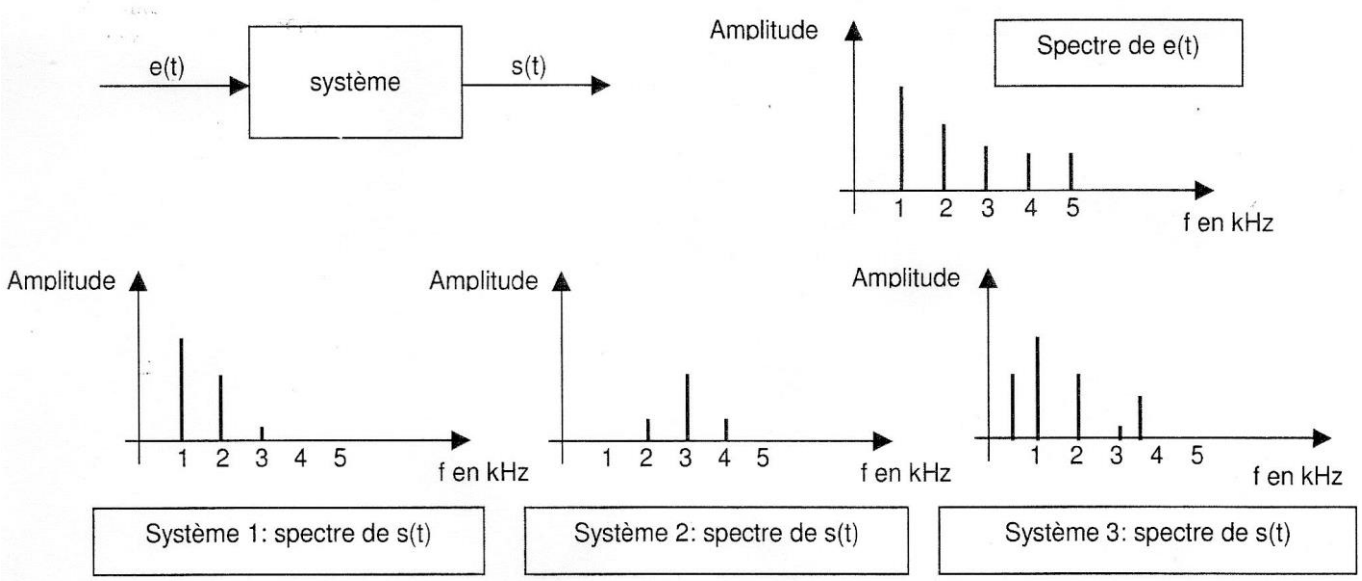
TROISIEME PROBLEME : Notion d'harmoniques – Analyseur de Fourier très simplifié (d'après CAPES externe 2005)

L'usage de calculatrice est interdit pour ce problème.

I) Quelques généralités :

1. Soit un système physique qui à une grandeur d'entrée fonction du temps e(t) fait correspondre une grandeur de sortie fonction du temps s(t). A quelle condition ce système peut-il être dit linéaire ?

2. On étudie expérimentalement le transfert de plusieurs systèmes (système 1, système 2, système 3) à l'aide d'un analyseur de spectre numérique ; pour cela on applique à leur entrée le même signal e(t). On donne ci-dessous les spectres de Fourier du signal e(t) et ceux des signaux obtenus en sortie des trois systèmes.
2.a. Qu'appelle-t-on spectre de Fourier d'un signal périodique s(t) ?
2.b. Le système 1 est-il linéaire ? Quel est son rôle ?
2.c. Qu'en est-il des systèmes 2 et 3 ?

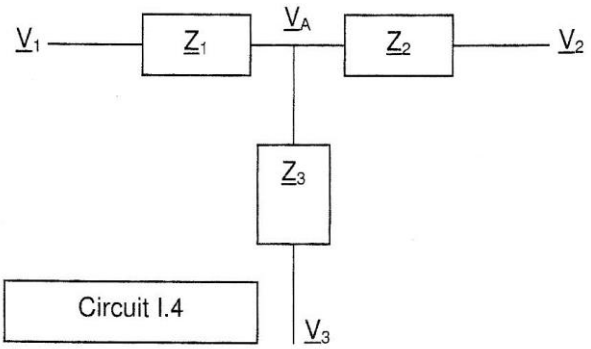


3. Impédance complexe :
On utilise des dipôles linéaires en régime sinusoïdal.
On note $u(t) = U\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi_u)$ la tension aux bornes du dipôle et $i(t) = I\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi_i)$ l'intensité du courant qui traverse le dipôle, u(t) et i(t) seront définis en convention récepteur.
A chaque grandeur temporelle $x(t) = X\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi_x)$, on associe le complexe suivant $\underline{x}(t) = X\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi_x)}$, on peut aussi utiliser l'amplitude complexe $\underline{X} = X\sqrt{2}e^{(j\varphi_x)}$

3.1. Que représentent les grandeurs U, ω et φ_u ? Peut-on les mesurer et comment ?
3.2.a. Etablir l'expression de l'impédance $\underline{Z}$ complexe associée à chacun des dipôles idéaux suivant :
- résistance « pure »
- capacité « pure »
- inductance « pure »

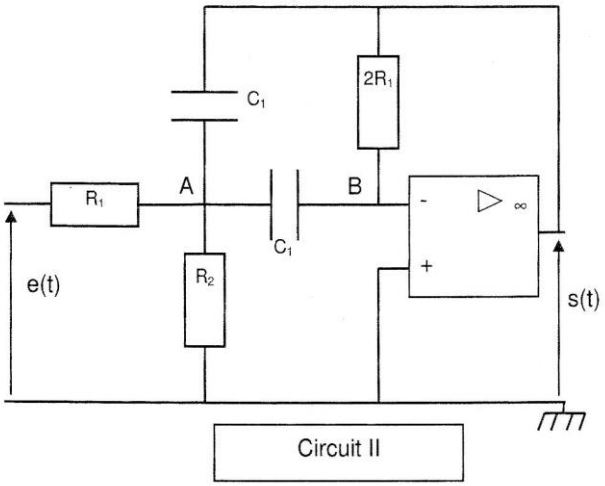
3.2.b. On mesure pour un dipôle linéaire particulier : $\underline{Z}$ = A + j.B ; A = 1 kΩ et B = 1 kΩ.
Calculer i(t) si $u(t) = 10\sqrt{2}.\cos(\omega t)$ avec u(t) en volts.

4. Théorème de Millmann :



Calculer l'amplitude complexe $\underline{V}_A$ du potentiel au nœud A dans le circuit I.4 en fonction des admittances $\underline{Y}_i = \dfrac{1}{\underline{Z}_i}$ et des amplitudes complexes $\underline{V}_i$ des potentiels des extrémités des branches.

II. Filtre sélectif :



On étudie le montage ci-contre : (circuit II)

L'amplificateur linéaire intégré est idéal ($i^+ = 0$ et $i^- = 0$) et fonctionne en régime linéaire ($V^+ - V^- = 0$).

1. Fonction de transfert :

On impose à l'entrée une tension e(t) sinusoïdale de pulsation ω.

1.a. On définit le transfert en tension $\underline{T}(\omega) = \underline{s}(t) / \underline{e}(t)$. Montrer que le transfert en tension ne dépend pas du temps, et justifier que l'étude de l'évolution de $\underline{T}(\omega)$ en fonction de ω permet de connaître le comportement en fréquence du circuit.

1.b. Pourquoi étudie-t-on le transfert pour une tension sinusoïdale ?

1.c. Établir le système d'équations vérifiées par $\underline{V}_A$, $\underline{V}_B$, $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E}$ et des éléments du montage.

1.d. Montrer que l'on peut mettre $\underline{T}(\omega)$ sous la forme $\underline{T}(\omega) = \dfrac{-1}{1 + j\left(R_1C_1\omega - \dfrac{1}{R_eC_1\omega}\right)}$ avec

$$R_e = \frac{2R_1.R_2}{R_1 + R_2}.$$

1.e. Mettre $\underline{T}(\omega)$ sous la forme canonique $T(\omega) = \dfrac{-1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ et identifier Q et ω_0 en fonction de R_1, R_2 et C_1.

1.f. Calculer des valeurs à donner à R_1, R_2 et C_1 pour avoir f_0 = 3,0 kHz et le facteur de qualité Q = 20.
On mènera les calculs avec 1 chiffre significatif dans cette question.

2. Etude du gain :

On étudie $T(\omega) = |\underline{T}(\omega)|$.

2.a. Montrer que T(ω) passe par un maximum pour une valeur de ω que l'on exprimera.
2.b. Définir, puis calculer les pulsations de coupure à - 3 dB en fonction de ω_0 et Q.
En déduire la largeur de la bande passante B_ω.
2.c. Déduire de ce qui précède une interprétation possible du facteur de qualité Q.
2.d. Calculer numériquement la largeur de la bande passante en fréquence B_f ($B_f = B_\omega / 2\pi$).
2.e. Tracer l'allure de T(ω).

3. Etude pratique :

3.a. Représenter un montage expérimental qui permettrait de visualiser e(t) et s(t). On fera apparaître tous les appareils et connexions nécessaires.
3.b. Décrire un protocole expérimental qui permettrait d'étudier le comportement en fréquence du circuit.
3.c. L'ALI est alimentée avec une source (+ 15 V, - 15 V).
A quoi sert cette alimentation ?
Que se passerait-il si l'amplitude théorique de s(t) dépassait 15 V ?
3.d. Que se passerait-il si on inversait les bornes + et – de l'ALI dans le circuit II ?

4. Analyseur de Fourier élémentaire :

On met à l'entrée de ce circuit II le signal e(t) représenté ci-contre (figure II.4).

avec f =1/T= 3,0 kHz et E = 10 V.

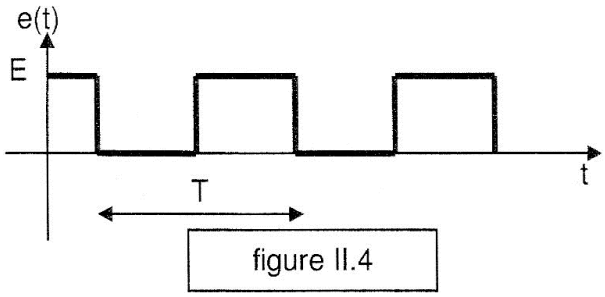


figure II.4

On montre que l'on peut décomposer le signal e(t) en une combinaison linéaire de sinusoïdes sous la forme : $e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\sin(2\pi.f.t) + \frac{2E}{3\pi}\sin(2\pi.3f.t) + \frac{2E}{5\pi}\sin(2\pi.5f.t) + ...$

4.a. Comment s'appellent les diverses fréquences qui apparaissent dans l'expression de e(t) ?
4.b. Tracer l'allure du signal de sortie s(t) si le circuit II est réglé pour f_0 = 3,0 kHz et Q = 20.
4.c. Comment pourrait-on utiliser le circuit II pour déterminer le spectre en fréquence de e(t) ?