PT 2016-2017 Pour le jeudi 13-04-2017

DEVOIR LIBRE n° 6

L'usage de calculatrices est interdit pour l'ensemble de ce devoir.

PREMIER PROBLEME : Etude d'une bobine inductrice (d'après banque PT 2009)

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

A) Etude d'une bobine plate :

Considérons une spire plane circulaire (C) dans le plan (Oxy), de centre O, de rayon R et d'axe Oz (Figure 1). Cette spire est parcourue par le courant d'intensité constante I. Les vecteurs unitaires sont $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. Un point P de la spire est repéré par l'angle θ. L'élément de spire de longueur dl = R.δθ crée au point M(0, 0, z) un champ élémentaire $\delta\vec{B}_1(M)$. La loi de Biot et Savart dit que $\delta\vec{B}_1(M)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ (μ_0 est la perméabilité magnétique du vide).

On pourra utiliser l'angle β sous lequel le rayon de la spire est vu du point M, soit $\beta = (\widehat{OMP})$.

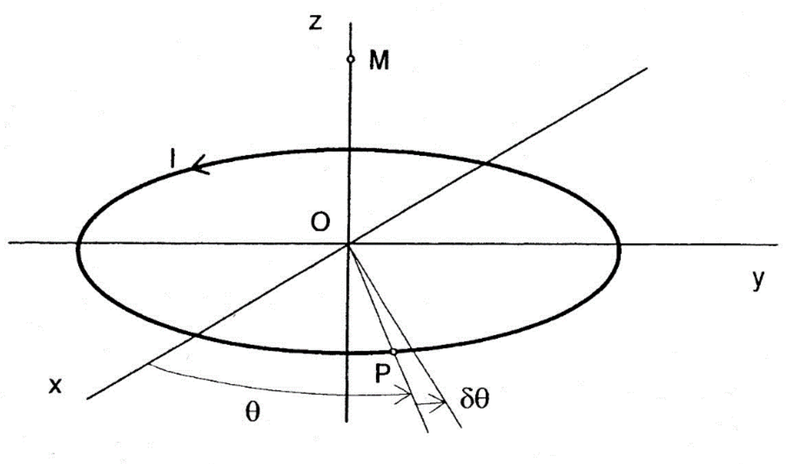


Figure 1

A1) Trouver, à l'aide des symétries, la direction du champ total $\vec{B}_1(M)$ produit par la spire complète au point M(0, 0, z).

En intégrant et en projetant la loi de Biot et Savart, montrer que ce champ résultant $\vec{B}_1(M)$ vaut $\vec{B}_1(M)=\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\beta)\,\vec{u}_z$. En déduire le champ résultant $\vec{B}_1(O)$ au point O.

Une bobine plate est constituée de N spires jointives d'axe commun (Oz) et bobinées entre les rayons R_1 et R_2 (Figure 2). Cette bobine est parcourue par le courant d'intensité I. Le fil de la bobine est supposé infiniment conducteur.

A2) Combien de spires sont contenues dans la portion de bobine comprise entre les rayons r et r + δr ? Quel est le champ $\delta\vec{B}(O)$ produit par cette fraction de bobine au point O ?

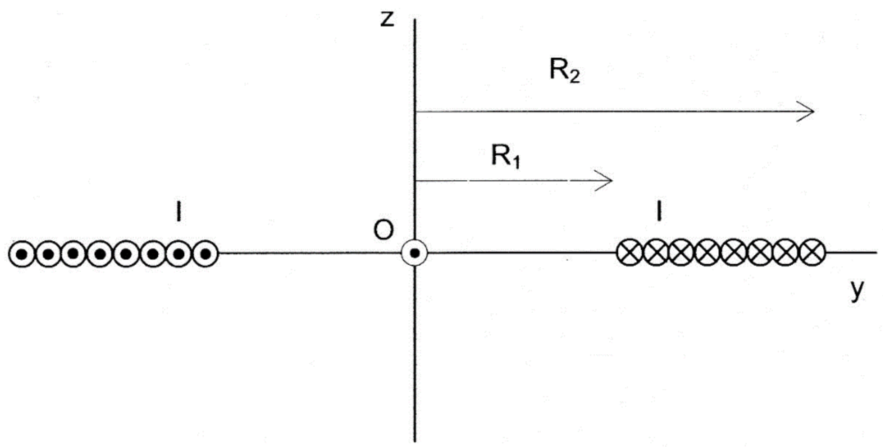


Figure 2

A3) En déduire le champ $\vec{B}(O)$ produit par la bobine complète au point O. Donner le résultat en fonction de μ_0, I, N, R_1 et R_2.

A4) Application numérique : I = 0,01 A ; N = 250 ; R_1 = 0,2 m ; R_2 = 0,3 m ; ln(1,5) = 0,4 ; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI.

A5) On suppose connu le champ magnétique créé par la bobine entière en tout point de son plan xOy. Quelle en est la direction ?
Déterminer son flux à travers les spires situées dans la portion de bobine comprise entre les rayons r et r + δr sous la forme, compte-tenu des symétries, d'une intégrale simple (en précisant bien les bornes et **sans chercher à calculer cette intégrale**) et en déduire les expressions du flux propre de la bobine et de son inductance propre L_0 en fonction d'une intégrale double que l'on ne cherchera pas à calculer.
L_0 dépend-elle de la valeur de l'intensité I du courant ? Justifier.

A6) Proposer un montage électrique simple permettant de mesurer L_0.

B) Bobine réelle :

La bobine précédente (b) est placée à proximité d'une pièce métallique conductrice, de perméabilité $\mu = \mu_0\,\mu_r$ avec $\mu_r > 1$. Elle peut être rapprochée ou éloignée de la pièce. La bobine, alimentée par une tension $u(t) = U_{eff}\,\sqrt{2}\cos(\omega\, t)$ est parcourue par un courant variable $i(t) = I_{eff}\,\sqrt{2}\cos(\omega\, t - \varphi)$. On se place dans le cadre de l'approximation des états quasi-stationnaires. Pour une position et une pulsation données, U_{eff}, I_{eff} et φ sont fixés.

B1) Les mesures montrent que l'inductance L de la bobine varie en fonction de sa position par rapport à la pièce. Pourquoi ?

B2) Dans quel sens varie l'inductance propre d'une bobine lorsqu'on y introduit un noyau de fer ? En déduire, sans justification, quelle relation d'ordre lie, pour la bobine étudiée, L et L_0, inductance propre en absence de la pièce.

B3) La puissance moyenne P_b absorbée par la bobine dépend-elle aussi de sa position par rapport à la pièce ? Pourquoi ? Rappeler son expression en fonction de U_{eff}, I_{eff} et φ.

DEUXIEME PROBLEME : Principe du moteur synchrone (d'après CCP PSI)

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

1) Stator de la machine synchrone : production d'un champ tournant :

On constitue un système (S_1) de deux solénoïdes identiques de même axe Ox et montés en série de sorte qu'un courant i_1 circule dans le même sens dans les deux solénoïdes (Figure 1).

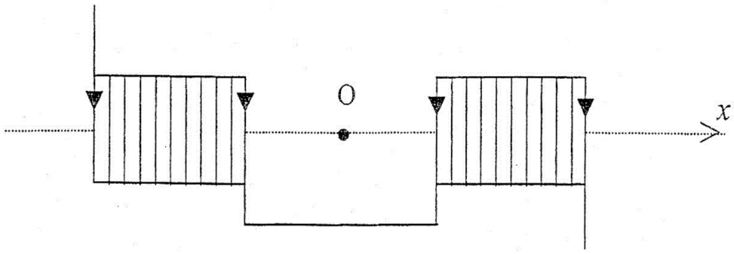


Figure 1

Dans ces conditions, le champ magnétique au centre O du système (S_1) peut se mettre sous la forme : $\vec{B}_1 = K\, i_1\, \vec{e}_x$ (K est une constante et $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire de l'axe Ox).

On place maintenant deux systèmes (S_1) et (S_2) identiques au précédent selon la configuration de la Figure 2 (les axes Ox et Oy de (S_1) et (S_2) sont perpendiculaires et se coupent en O).
Chacun des systèmes (S_1) et (S_2) a une résistance totale R et une inductance totale L.
On branche en parallèle entre les bornes A et B d'une source de tension sinusoïdale idéale de f.é.m. $u = U\sqrt{2}\cos(\omega_0\, t)$:

- le système (S_1) en série avec une résistance R_0 d'une part,
- le système (S_2) en série avec une résistance de même valeur R_0 et avec un condensateur de capacité C d'autre part.

En régime permanent sinusoïdal, les intensités réelles $i_1(t)$ et $i_2(t)$ des courants circulant dans (S_1) et (S_2) sont de la forme : $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega_0\, t - \varphi_1)$ et $i_2(t) = I_2\sqrt{2}\cos(\omega_0\, t - \varphi_2)$.

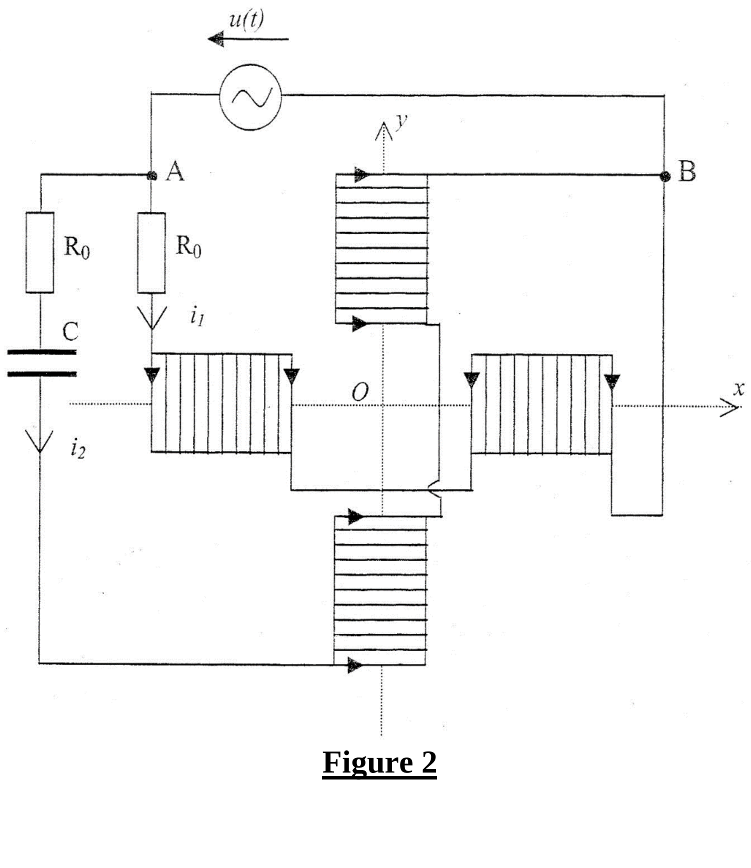


Figure 2

1) En utilisant les propriétés de symétrie du champ magnétique, justifier la direction du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le système (S_1) au point O.

2) Donner les expressions de I_1, I_2, $\tan \varphi_1$ et $\tan \varphi_2$ en fonction de U, R, R_0, L, C et ω_0.

3) a) Les valeurs de R, L et ω_0 étant imposées, quelles valeurs faut-il donner à R_0 et C pour que :

$$I_1 = I_2 \quad \text{et que} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi / 2 \ ?$$

b) Que valent alors φ_1 et φ_2 ?

4) En considérant remplies les conditions précédentes ($I_1 = I_2$ et $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi / 2$), déterminer les composantes sur Ox et sur Oy du champ magnétique total $\vec{B}$ en O (on notera B_T son module que l'on exprimera en fonction de U, K et $L\omega_0$).

5) a) Justifier l'appellation de « champ tournant » pour ce champ magnétique total $\vec{B}$.

b) Préciser à quelle vitesse ce champ tourne dans le plan Oxy.

2) Entraînement du rotor du moteur synchrone :

La partie mobile du moteur synchrone (rotor) est constituée d'un bobinage alimenté par un courant continu et assimilable à un aimant de moment magnétique $\vec{M}$, de module M_0 constant. On suppose que $\vec{M}$ est animé dans le plan Oxy d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz (perpendiculaire à ce plan) à la vitesse angulaire ($-\omega$).

Le mouvement s'effectue dans une partie de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$ supposé uniforme d'amplitude B_T qui, lui, tourne dans le plan Oxy autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ($-\omega_0$) (**ω_0 n'étant pas a priori égale à ω**).

On note $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire de l'axe Oz et θ_0 la valeur initiale de l'angle $(\vec{M}, \vec{B})$ (Figure 3).

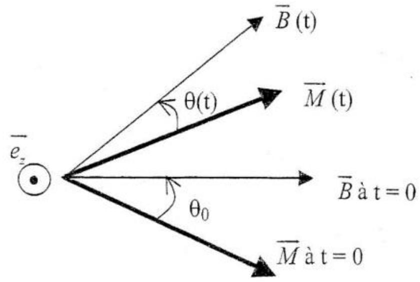


Figure 3

1) Exprimer $\theta(t)$. En déduire la valeur instantanée du couple $\vec{\Gamma}(t) = \Gamma(t)\vec{e}_z$ exercé par le champ $\vec{B}$ sur le rotor.

2) Pourquoi le moteur synchrone ne peut-il fonctionner que pour une vitesse angulaire ($-\omega$) égale à ($-\omega_0$) ?

3) On se place dans le cas $\omega = \omega_0$:

3.1) Exprimer la valeur Γ_0 de $\Gamma(t)$.

3.2) Quelle condition l'angle $\theta = (\vec{M}, \vec{B})$ entre $\vec{M}$ et $\vec{B}$ en régime permanent doit-il vérifier pour que cette machine fonctionne effectivement en moteur ?

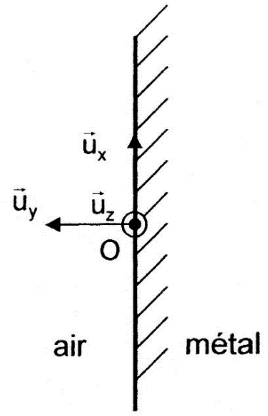
3.3) Quelle est, dans ce cas (fonctionnement en moteur), la puissance mécanique $P_{méca}$ fournie par le moteur ?

3.4) On suppose que la machine, fonctionnant en moteur, entraîne une « charge » qui impose au moteur un couple résistant de module constant Γ_r (les autres couples résistants étant négligés). Quelle condition doit vérifier Γ_r pour que le moteur puisse effectivement entraîner la charge ?

TROISIEME PROBLEME : Réflexion d'une OPPH sur une plaque métallique (d'après banque PT 2009)

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

On considère une plaque métallique conductrice, de grandes dimensions considérées comme infinies suivant Ox et Oz, de conductivité γ, de perméabilité μ_0 et de permittivité ε_0, occupant tout le demi-espace $y < 0$, comme le montre la figure ci-contre.



On envoie une OPPH (onde plane progressive harmonique) incidente, de polarisation rectiligne, notée $\left(\vec{E}_i, \vec{B}_i\right)$ sur cette plaque métallique, le vecteur d'onde de l'onde incidente étant $\vec{k}_i = - k\,\vec{u}_y$ ($k > 0$). Le champ électrique associé à l'onde incidente a pour expression : $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t + k y)\vec{u}_x$. Le trièdre trirectangle Oxyz est direct, l'axe Oy est orienté vers la gauche.

Données :

- $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} ; $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ H.m^{-1} ; $c = 3{,}00.10^8$ m.s^{-1}.
- On donne la relation de passage pour $\vec{E}$ en présence de charges surfaciques séparant deux milieux 1 et 2 de part et d'autre de cette surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$, où $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface, $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal localement à cette surface et allant du milieu 1 vers le milieu 2.
- On donne la relation de passage pour $\vec{B}$ en présence de courants surfaciques : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{j}_S(M) \wedge \vec{n}_{12}$ où $\vec{n}_{12}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux et est dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface.

A) Réflexion sur un plan conducteur parfait :

Dans toute cette partie A), la conductivité γ est supposée infinie ; le métal est alors considéré comme un conducteur parfait.

A1) Rappeler les équations de Maxwell dans le vide, en l'absence de charges et en l'absence de courants.

A2) Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide. Comment s'appelle ce type d'équation ? Quelle relation existe entre la vitesse de propagation c et les constantes ε_0 et μ_0 ?

A3) Traduire le fait que le champ $\vec{E}_i$ satisfait à cette équation aux dérivées partielles : quelle relation lie ω, k et c ?

A4) Quelle est l'expression du champ magnétique incident $\vec{B}_i$? Préciser son amplitude B_0. Quelle équation de propagation vérifie le champ $\vec{B}_i$?

On cherche une onde réfléchie sous la forme d'une OPPH, de polarisation rectiligne, notée $\left(\vec{E}_r, \vec{B}_r\right)$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_r$. En surface du métal ($y = 0$) règnent une densité surfacique de charges σ et un courant surfacique $\vec{j}_S$, uniformes et non permanents.

A5) Quelles sont les unités de σ et de $\vec{j}_S$? Que valent les champs électrique et magnétique dans le métal ? Quelles sont les deux relations de passage en y = 0 ? Quelle composante du champ électrique est toujours continue à la traversée d'une surface ?

A6) Pourquoi les ondes incidente et réfléchie ont-elles la même fréquence ? Quelle relation lie ici $\vec{k}_r$ à $\vec{k}_i$? Détailler le raisonnement.

A7) Etablir l'expression du champ $\vec{E}_r$ en tout point du plan $y = 0^+$, puis en déduire celles de $\vec{E}_r$ et de $\vec{B}_r$ en tout point du demi-espace $y > 0$.

A8) Que vaut le champ électromagnétique total $\left(\vec{E}_{tot}, \vec{B}_{tot}\right)$ résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ? Quelle est sa particularité ?

A9) Quelle propriété particulière possède le plan y = 0 vis-à-vis du champ électromagnétique total. En déduire les expressions de σ et de $\vec{j}_S$. Donner une interprétation qualitative des résultats obtenus.

A10) Quelle est l'énergie volumique associée à l'onde incidente ? Même question pour l'onde réfléchie. Comparer les résultats.

A11) Quelle puissance instantanée P_i apportée par l'onde incidente traverse une surface S orthogonale à la direction de propagation ? Même question pour l'onde réfléchie (P_r). Comparer ces résultats à ceux obtenus à la question A10). Commenter.

A12) Comparer les moyennes temporelles de P_i et de P_r ; commenter physiquement.

B) Réflexion de l'onde avec prise en compte de la conductivité du métal :

En réalité, le métal de la plaque a une conductivité qui n'est pas infinie, ce qui permet au champ électromagnétique de pénétrer dans le métal ; il sera noté $\left(\vec{E}_t, \vec{B}_t\right)$. Les résultats suivants seront admis :

en posant $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\, \gamma\, \omega}}$, il vient, lorsque $k\delta \ll 1$, avec $k = \dfrac{\omega}{c}$,

$$\vec{E}_t = \sqrt{2}\, k\, \delta\, E_0 \exp\left(+\frac{y}{\delta}\right) \cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_t = 2\frac{E_0}{c} \exp\left(+\frac{y}{\delta}\right) \cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_z .$$

Le courant surfacique est alors nul ; dans le métal règnent une densité de courant $\vec{j}$ et une densité de charge $\rho = 0$.

Donnée numérique : $\gamma = 10^7$ S.m^{-1}.

B1) Quelle est la dimension de δ ? Que représente cette grandeur ? Application numérique : représenter la courbe $\log(\delta)$ en fonction de $\log(\omega)$ pour 1 rad / s < ω < 10^6 rad / s. On donne $\log(2\pi) = 0{,}8$.

B2) Rappeler l'expression, en fonction de $\vec{j}$ et de $\vec{E}$, de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière et, en appliquant la loi d'Ohm locale dans le métal, évaluer sa moyenne temporelle.
En déduire la puissance moyenne totale $< P_J >$ dissipée dans la portion de cylindre d'axe Oy, de section S et délimitée par les plans y = 0 et y = - L, avec $L \gg \delta$.

B3) Déterminer la puissance moyenne $< P_t >$ rayonnée par l'onde transmise à travers la section droite d'abscisse $y = 0^-$; comparer au dernier résultat de la question B2) ; commenter en détails.
Que remarquerait-on si, la pulsation étant fixée, on faisait tendre la conductivité vers l'infini ? Commenter.

B4) Ecrire la relation de passage en y = 0 pour le champ électrique, et en déduire, pour tout y > 0, le champ $\vec{E}_r$ de l'onde électromagnétique réfléchie, puis le champ $\vec{B}_r$.

B5) Quelle est la puissance moyenne $< P_r >$ rayonnée par l'onde réfléchie à travers une surface S orthogonale à la direction de propagation ?

B6) En limitant l'analyse aux termes de degré inférieur ou égal à 1 en $k\delta$ (ne pas oublier que $k\delta \ll 1$), quelle relation simple obtient-on entre les puissances moyennes rayonnées $< P_i >$ (voir question A12)), $< P_r >$ (voir question B5)), et $< P_t >$ (voir question B3)). Commenter.