

DEVOIR LIBRE n° 6

L'usage de calculatrices est interdit pour le 1^{er} problème, et autorisé pour les 2^{ème} et 3^{ème} problèmes.

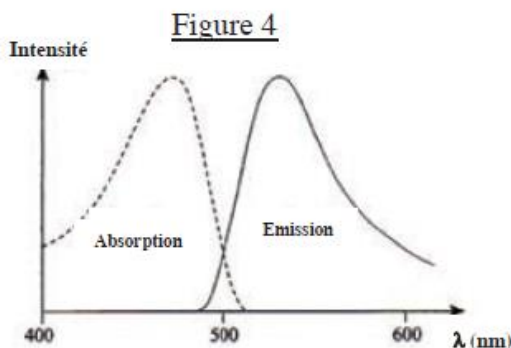
PREMIER PROBLEME : Microscopie optique : le microscope confocal (d'après banque PT 2017)

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

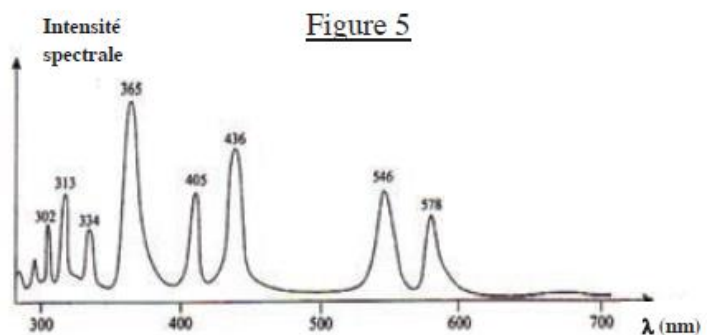
On envisage ici une amélioration du microscope optique classique. La microscopie confocale a été initiée par Marvin Minsky en 1957 et mise en application 30 ans plus tard.

1. Le microscope confocal peut être utilisé pour réaliser une image d'un échantillon marqué par des fluorophores ; ces molécules ont la propriété d'absorber la lumière dans un certain domaine spectral et de la réémettre dans un domaine différent.

Par exemple, l'isothiocyanate de fluorescéine (FITC) possède les profils spectraux de la figure 4. L'échantillon est éclairé par une lampe à vapeur de mercure dont le profil spectral est donné sur la figure 5 :



Profils spectraux du FITC

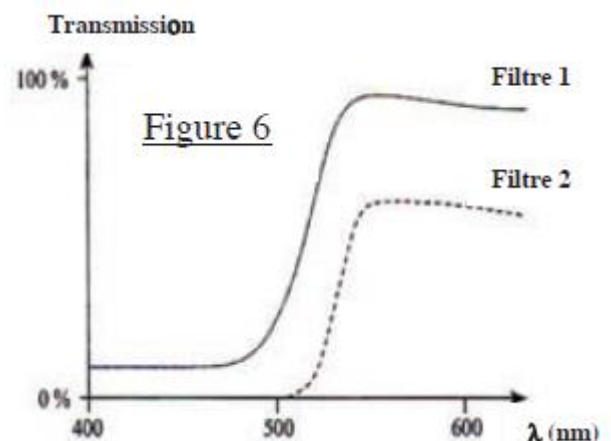


Profil d'intensité spectrale d'une lampe à vapeur de mercure

1.1. Préciser les deux domaines d'émission électromagnétique de la lampe.

1.2. On place un filtre devant le détecteur. On propose ci-contre (Figure 6) deux profils spectraux de transmission pour ce filtre, appelé filtre barrière. Lequel semble le plus adapté ?

1.3. On place également un filtre devant la lampe spectrale. Proposer un profil pour ce filtre, appelé filtre d'excitation.



1.4. En microscopie confocale, on peut utiliser également un LASER comme source d'excitation. Citer une différence entre ce rayonnement et celui d'une lampe spectrale.

2. Un faisceau LASER émet, dans le vide, une onde électromagnétique dont le champ électrique associé s'écrit, dans un repère cartésien orthonormé direct :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k z) \vec{u}_x \quad \text{où } E_0, \omega \text{ et } k \text{ sont des constantes positives.}$$

2.1. Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde progressive, ainsi que la nature de sa polarisation.

2.2. On donne en unités du système international (S.I.) la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} \text{ S.I.} \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ S.I.} \approx 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ S.I.}$$

Exprimer la célérité c de l'onde dans le vide en fonction de ϵ_0 et μ_0 , puis donner sa valeur.

2.3. La longueur d'onde dans le vide étant $\lambda = 628 \text{ nm}$, déterminer les valeurs de ω et k .

2.4. Exprimer le champ magnétique associé à l'onde.

2.5. Le faisceau LASER est cylindrique de section $s = 0,75 \text{ mm}^2$, et sa puissance moyenne temporelle est $P = 0,1 \text{ W}$.

Exprimer E_0 en fonction de P , s , c et μ_0 , puis calculer sa valeur.

3. Quel phénomène limite généralement la résolution d'un instrument d'optique, et en particulier celle du microscope ?

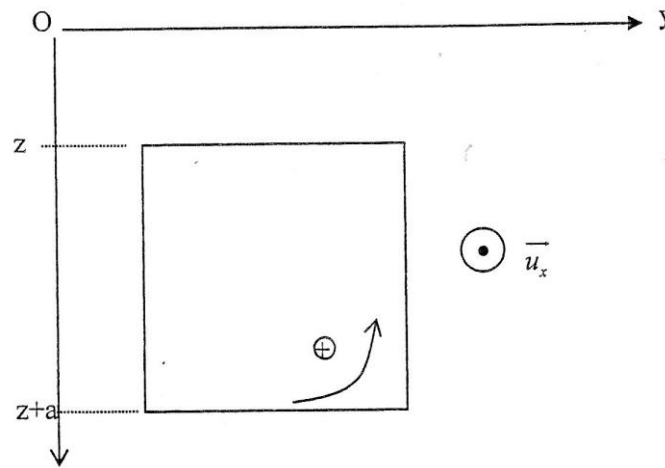
DEUXIEME PROBLEME : Mouvement d'une spire dans un champ magnétique non uniforme (d'après banque PT 2007)

L'usage de calculatrices est autorisé pour ce problème.

On considère un cadre carré de côté a constitué d'un fil conducteur de résistance R et de masse m . Il est placé dans le plan vertical, soumis à la pesanteur ($g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$), et plongé dans un champ magnétique dont on ne considère, dans cette étude, que la composante perpendiculaire au plan de la figure, donnée par la relation :

$$\vec{B} = B(z)\vec{u}_x = (B_0 - bz)\vec{u}_x$$

Le cadre est mécaniquement astreint à se translater selon la direction de Oz ; dans tout le problème, on néglige tout frottement (liaison glissière non dissipative).



On choisit le sens positif dans le sens trigonométrique.

1) Au temps $t = 0$, on libère le cadre dont la vitesse est nulle, le côté supérieur étant à la cote $z = 0$.

a) Si $b = 0$, y a-t-il un phénomène d'induction au cours de la chute ? Justifier.

b) Si $b \neq 0$, prévoir et justifier le signe de l'intensité i du courant induit.

c) Exprimer, en fonction de la cote z du côté supérieur du cadre, le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre. En déduire la force électromotrice induite dans le circuit en fonction de $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$.

2) On souhaite déterminer la loi horaire $z(t)$ régissant le mouvement du cadre.

a) Ecrire l'équation mécanique du mouvement.

b) Ecrire l'équation électrique du circuit.

c) En déduire l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ et faire apparaître une constante de temps τ que l'on exprimera en fonction de a , b , R et m .

d) Exprimer la vitesse $v_z(t)$ du cadre et préciser la vitesse limite v_l .

e) Calculer τ et v_l pour $R = 0,010 \, \Omega$; $m = 0,010 \, \text{kg}$; $b = 6,4 \, \text{T.m}^{-1}$; $a = 0,10 \, \text{m}$.

3) A partir de l'instant $t_0 = 10$ s, on fait rapidement chuter l'intensité du champ magnétique selon la loi : $B(z) = B_0 - b z - b_1 (t - t_0)$, avec $b_1 = 0,30$ SI.

a) Déterminer $v_z(t)$ pour $t \geq t_0$. On posera $\gamma = \frac{b b_1 a^4}{m R}$, et on pourra utiliser la notation $t' = t - t_0$.

b) Tracer l'allure de la courbe donnant v_z en fonction de t , pour t variant de 0 à 13s.

4) On accroche maintenant le cadre à un ressort vertical de constante de raideur $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$, et dont l'extrémité supérieure est fixée en O.

A l'équilibre, le côté supérieur du cadre est à la cote $z_1 = 5$ cm. On le tire vers le bas pour l'amener à la cote $z_2 = 8$ cm, puis on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

Le champ magnétique est $B(z) = B_0 - b z$.

a) Ecrire l'équation du mouvement satisfaite par $z(t)$.

b) Exprimer puis calculer la pseudo-période des oscillations.

c) Exprimer $z(t)$ en précisant les valeurs numériques de toutes les grandeurs intervenant dans l'expression. Calculer la valeur du décrétement logarithmique.

d) Quel effet-conséquence du phénomène d'induction électromagnétique – dans le cas d'un circuit résistif mobile en champ magnétique permanent – les résultats des questions traduisent-ils ?
Citer une application concernant les poids lourds (camions, autocars).

TROISIEME PROBLEME : Propagation guidée (d'après banque PT 2010)

L'usage de calculatrices est autorisé pour ce problème.

On donne $\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

Aucune connaissance préalable de la propagation dans les guides d'onde n'est requise.

I) Propagation dans une structure métallique creuse.

On se place dans un système de coordonnées cartésiennes et on considère un guide d'onde formé d'un conducteur métallique creux, dont la cavité cylindrique a une section droite de forme a priori quelconque ; on étudie la propagation, dans cette cavité, d'une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω dans la direction de l'axe Oz et dans le sens des z croissants.

Le métal est supposé parfait et l'intérieur du guide est constitué de vide.

I-1) Que sous-entend l'hypothèse métal « parfait » ?

Que peut-on dire du champ électrique en tout point du métal parfait ?

I-2) Qu'indique l'équation de Maxwell-Faraday en tout point du métal parfait ?

Dans toute la suite, on suppose que le champ magnétique est nul en tout point du métal parfait.

I-3) Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et en déduire les équations de propagation pour les champs électrique et magnétique.

En déduire la forme des équations de propagation du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{B}$. On pose $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$; quelle est la signification physique de c ?

S'intéressant à une onde harmonique, on note les champs complexes $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sous la forme :

$$\vec{U} = \vec{U}_0(x, y) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \text{ avec } j^2 = -1.$$

I-4) Le coefficient γ est appelé ici constante de propagation ; ce coefficient peut être réel, imaginaire pur ou complexe. Quelle serait la forme de γ dans les trois cas suivants :

- propagation sans pertes
- propagation avec pertes
- pas de propagation de l'onde électromagnétique.

Dans la suite, on se place dans le cas d'une propagation sans pertes.

I-5) Dans le cas d'une propagation sans pertes selon les z croissants, si l'on pose $\gamma = j k$, k est-il un réel positif ou négatif ?

On utilisera dans la suite les expressions : $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) e^{j(\omega t - k z)}$ et $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0(x, y) e^{j(\omega t - k z)}$.

Quel est l'effet de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ en notation complexe ? Quel est ici l'effet de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial z}$ en notation complexe ?

On s'intéresse ici aux modes de propagation dits *transverses magnétiques*, notés TM, c'est-à-dire tels que $\underline{B}_{0z}(x, y) = 0$; on suppose que $\underline{E}_{0z}(x, y) \neq 0$ contrairement au cas de l'onde plane.

De même, la constante k est dans la suite supposée différente du rapport $\frac{\omega}{c}$.

I-6) A l'aide des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, établir 4 équations permettant d'exprimer les valeurs complexes des composantes transverses $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$ d'une part et $\underline{B}_x$, $\underline{B}_y$ d'autre part, en fonction de celle de la composante longitudinale $\underline{E}_z$ et de ses dérivées partielles par rapport à x et y .

La résolution de ce système, *non demandée ici*, donne les résultats suivants :

$$\frac{k c^2}{\omega} \underline{B}_y = \underline{E}_x = \frac{j k \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad -\frac{k c^2}{\omega} \underline{B}_x = \underline{E}_y = \frac{j k \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

I-7) En utilisant une des équations de propagation établies à la question I-3), montrer que la composante longitudinale $\underline{E}_z$ du champ électrique complexe satisfait l'équation suivante :

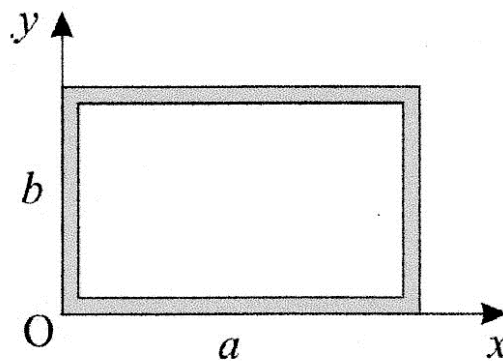
$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + K^2 \underline{E}_z = 0,$$

où K est une constante que l'on exprimera en fonction de k , de la pulsation ω et de $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

I-8) On rappelle en fin d'énoncé les relations de passage pour le champ électromagnétique. Quelles sont les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui sont toujours continues à la traversée d'une surface ? En déduire, pour les deux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, quelles composantes (tangentielles ou normales) doivent s'annuler dans le vide au voisinage immédiat du métal parfait.

II) Cas d'une structure rectangulaire.

On considère ici un guide d'onde de section rectangulaire de côtés a et b selon la figure ci-dessous.



II-1) A quelles conditions aux limites satisfait la composante longitudinale $\underline{E}_{0z}(x, y)$ sur les quatre portions de plan limitant la cavité ? Justifier.

II-2) Détermination des solutions

II-2-1) Dédire de l'équation établie au I-7) l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\underline{E}_{0z}(x, y)$.

II-2-2) On cherche une solution de cette équation du type :

$$\underline{E}_{0z}(x, y) = (A' \sin(k_1 x) + B' \cos(k_1 x)) \times (C' \sin(k_2 y) + D' \cos(k_2 y))$$

Quelle est la relation entre les deux coefficients k_1 et k_2 d'une part et k , ω et c ?

En utilisant deux des conditions aux limites établies à la question II-1), montrer que les constantes B' et D' sont nécessairement nulles.

Dans toute la suite, on posera $\underline{E}_{0z}(x, y) = E_0 \sin(k_1 x) \times \sin(k_2 y)$, E_0 étant une constante.

II-2-3) Compte tenu des deux dernières conditions aux limites, montrer que les coefficients k_1 et k_2 s'expriment chacun en fonction d'un nombre entier arbitraire (respectivement n et m).

Quelle est alors l'expression de k en fonction de ω , c , n , m , a et b ?

Expliquer le terme « mode TM_{mn} ».

Que déterminent physiquement les indices m et n ? Quelles sont les valeurs minimales que peuvent prendre ces indices ?

Dédire de ces résultats et de l'expression de k la fréquence minimale d'une onde pouvant se propager dans le guide en mode TM.

II-2-4) Déterminer, à partir des résultats de la question I-6), les expressions des composantes transverses de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$.

Vérifier que les conditions aux limites correspondantes sont bien assurées.

II-2-5) Rappeler l'expression de la phase de l'onde à l'instant t en un point M de la cavité du guide en fonction de ω , t , k et z .

En déduire la vitesse de phase de l'onde en fonction de ω , c , n , m , a et b . Commenter.

Ce dispositif est-il dispersif ? Justifier.

II-2-6) Application numérique : pour un guide de dimensions $a = 3,0$ cm et $b = 2,0$ cm, déterminer la fréquence minimale, notée f_c , d'une onde se propageant dans le guide. Calculer la vitesse de phase du mode TM ($n = 1$, $m = 1$), lorsque la fréquence est égale à $2 f_c$.

Rappel : relations de passage :

- On donne la relation de passage pour $\vec{E}$ en présence de charges surfaciques séparant deux milieux 1 et 2 de part et d'autre de cette surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$, où $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la surface, $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal localement à cette surface et allant du milieu 1 vers le milieu 2, et σ est la densité surfacique de charges.
- On donne la relation de passage pour $\vec{B}$ en présence de courants surfaciques séparant deux milieux 1 et 2 de part et d'autre de cette nappe de courant : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$, où $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 au voisinage immédiat de la nappe de courant, $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal localement à cette surface et allant du milieu 1 vers le milieu 2, et $\vec{j}_s$ est le vecteur densité de courant surfacique.