PT 2016-2017 **Pour le jeudi 16-03-2017**

DEVOIR LIBRE n° 5

L'usage de calculatrices est interdit pour le 1er problème, et autorisé pour les 2ème et 3ème problèmes.

PREMIER PROBLEME : Interférences lumineuses : dispositif des trous d'Young (d'après CCP TSI 2007)

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

On réalise, dans l'air, l'expérience des trous d'Young à l'aide du dispositif décrit et schématisé ci-dessous.

Un LASER, de longueur d'onde dans le vide λ, émet un faisceau lumineux cylindrique d'axe z'z.

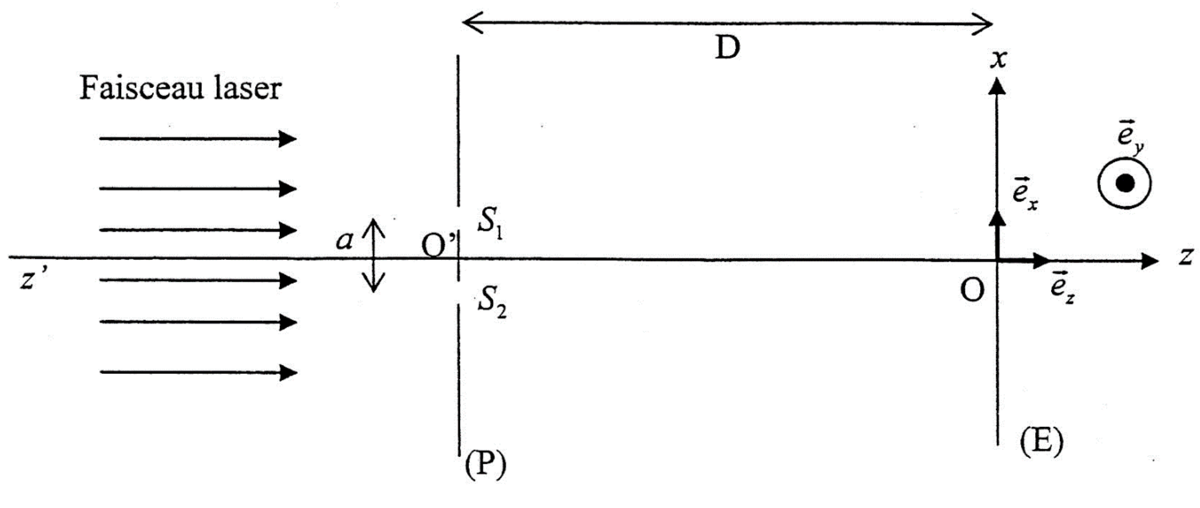
On suppose par la suite, sauf mention contraire dans la question 1), que le faisceau du LASER éclaire entièrement et de manière uniforme les différentes ouvertures qui sont placées sur son passage.

Une plaque opaque (P), percée de deux trous circulaires S_1 et S_2 de même taille et de faibles dimensions, est placée perpendiculairement à l'axe z'z.
On note O' le milieu du segment $[S_1S_2]$. Le point O' appartient à l'axe z'z.
La distance entre les centres des deux trous S_1 et S_2 est notée a.

Le phénomène d'interférences est observé sur un écran (E) placé perpendiculairement à l'axe z'z. Soit O le point de l'écran (E) appartenant à l'axe z'z.
La distance entre la plaque (P) et l'écran (E) est égale à D. On a ainsi D = O'O.

L'espace est rapporté au repère cartésien $\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ défini comme suit :
$\vec{e}_z$: vecteur unitaire de l'axe Oz, orienté de la plaque (P) vers l'écran (E).
$\vec{e}_x$: vecteur unitaire de l'axe Ox, parallèle à $[S_1S_2]$ et orienté de S_2 vers S_1.
$\vec{e}_y$: vecteur unitaire de l'axe Oy, tel que la base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ soit orthonormée directe.

Dans tout le problème, l'indice de réfraction de l'air sera pris égal à 1.



Première partie : réalisation pratique du dispositif

1) Elargisseur de faisceau

Nous nous plaçons, uniquement pour cette question, dans le cas où le LASER dont nous disposons ne permet pas d'éclairer simultanément les deux trous S_1 et S_2 de la plaque (P) : le diamètre du faisceau LASER est inférieur à la distance a.
Nous souhaitons réaliser un dispositif permettant d'élargir le faisceau LASER. Pour cela, nous disposons de deux lentilles : une lentille divergente L_1 et une lentille convergente L_2 de distances focales respectives f'_1 et f'_2, telles que $|f'_1| < f'_2$.

On dispose les deux lentilles de telle sorte que le foyer image de la lentille divergente L_1 soit confondu avec le foyer objet de la lentille convergente L_2.
La lentille L_1 est placée avant la lentille L_2 sur le trajet du faisceau LASER.
Soit d_{av} le diamètre du faisceau LASER avant son élargissement et d_{ap} le diamètre du faisceau LASER après son élargissement.
Faire un schéma du montage ainsi réalisé et mettant en évidence l'élargissement du faisceau incident.
Calculer le rapport $\frac{d_{ap}}{d_{av}}$ en fonction de f'_1 et f'_2.

2) Quelle est la couleur émise par le LASER dans le cas d'un LASER He-Ne de longueur d'onde dans le vide λ = 632,8 nm ?
Quelles sont les longueurs d'onde et les couleurs respectives qui correspondent aux limites du spectre de la lumière visible ?

Deuxième partie : description qualitative du phénomène

3) Existence d'un champ d'interférences

3.1) En se référant *uniquement aux lois de l'optique géométrique*, quelle devrait être l'allure de la figure observée sur l'écran (E) ?
Pour quelle raison l'optique géométrique ne permet-elle pas de prévoir l'existence d'un champ d'interférences dans le cas du dispositif des trous d'Young ?
A quel phénomène physique doit-on faire appel pour en comprendre l'existence ?

3.2) Réaliser un schéma représentant le champ d'interférences.

4) Description de la figure d'interférences

Les réponses aux questions suivantes seront justifiées. Une démonstration quantitative ne sera toutefois pas exigée.

4.1) Qu'observe-t-on sur l'écran (E) ? Décrire précisément la figure d'interférences obtenue.

4.2) Qu'observe-t-on sur l'écran (E) si l'on obture l'un des deux trous ?

4.3) Comment est modifiée la figure d'interférences si on translate la plaque (P) suivant l'axe Ox ? suivant l'axe Oy ?

4.4) Comment est modifiée la figure d'interférences si on translate l'écran (E) suivant l'axe z'z ?

Troisième partie : description quantitative du phénomène

5) <u>Différence de chemin optique</u>
Soit un point M de l'écran (E), de coordonnées (x,y,0) dans le repère $\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$.

5.1) Exprimer les coordonnées des trous S_1 et S_2 dans le repère $\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$.
Exprimer les distances S_1M et S_2M, respectivement entre les trous S_1 et S_2 et le point M. On exprimera S_1M et S_2M en fonction de a, D, x et y.
En déduire l'expression de la différence de chemin optique $\delta(M) = S_2M - S_1M$ au point M entre les rayons issus de S_1 et S_2. On exprimera $\delta(M)$ en fonction de a, D, x et y. <u>Le calcul sera mené sans aucune approximation</u>.

5.2) La distance a entre les deux trous étant petite par rapport à la distance d'observation D, et le point M étant proche du point O, on peut considérer que a, x, y sont très petits devant D.
En faisant un développement limité au premier ordre de l'expression de $\delta(M)$ obtenue précédemment, en déduire l'expression simplifiée de $\delta(M)$ en fonction de a, D et x.

5.3) En prenant en compte l'expression de $\delta(M)$ calculée à la question précédente, expliquer comment serait modifiée la figure d'interférences si on remplaçait les deux trous par deux fentes très fines appartenant à la plaque (P), parallèles à l'axe Oy et distantes de a ?

6) <u>Intensité lumineuse de l'onde résultante</u>
On représente par $s_1(t)=s_2(t)=s_0\cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t\right)$ l'expression des ondes respectivement aux points S_1 et S_2.
s_0 représente l'amplitude de l'onde considérée, c représente la célérité de la lumière dans le vide et t le temps.
On néglige l'atténuation de l'onde entre les trous et le point M.

6.1) Déterminer l'expression $s_{1M}(t)$ de l'onde issue du trou S_1 lorsqu'elle arrive au point M. On exprimera $s_{1M}(t)$ en fonction de s_0, S_1M, c, λ et t.
Déterminer, de même, l'expression $s_{2M}(t)$ de l'onde issue du trou S_2 lorsqu'elle arrive au point M. On exprimera $s_{2M}(t)$ en fonction de s_0, S_2M, c, λ et t.

6.2) En déduire l'expression $s_M(t)$ de l'onde qui résulte de la superposition des deux ondes $s_{1M}(t)$ et $s_{2M}(t)$ au point M. On exprimera $s_M(t)$ en fonction de s_0, S_1M, S_2M, c, λ et t.
Mettre l'expression de $s_M(t)$ sous la forme du produit d'un terme indépendant du temps (amplitude de l'onde) et d'un terme dépendant du temps.

6.3) Sachant que l'intensité lumineuse I_M (appelée aussi éclairement) qui résulte, au point M, de l'onde $s_M(t)$ est proportionnelle au carré de l'amplitude de $s_M(t)$ avec K constante de proportionnalité, exprimer l'intensité lumineuse I_M au point M en fonction de s_0, K, δ et λ puis en fonction de s_0, K, a, x, λ et D.

6.4) Calculer, en détaillant clairement le raisonnement effectué, l'expression de l'interfrange i de la figure d'interférences. Exprimer i en fonction de a, λ et D.

6.5) Tracer l'allure du graphe de I_M en fonction de x.

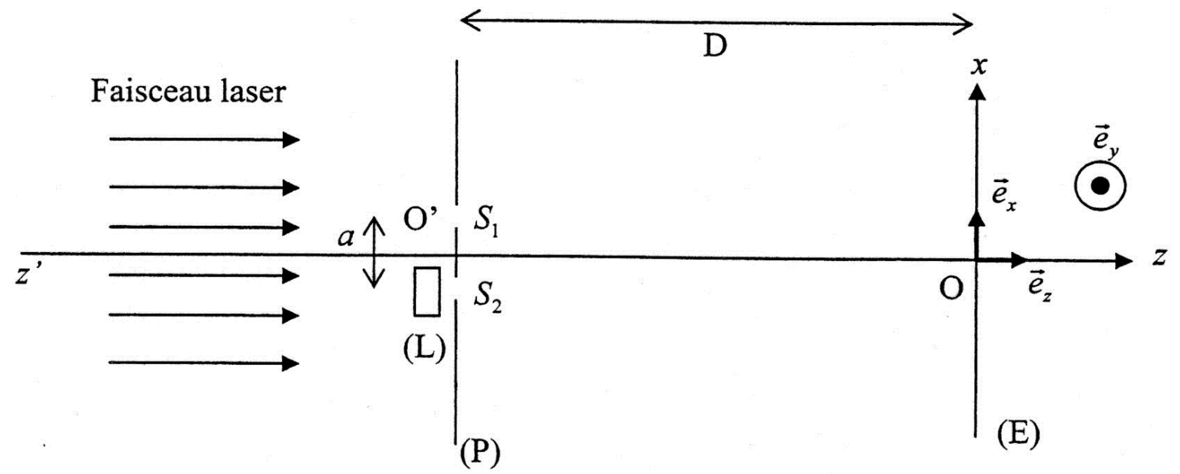
6.6) Quelle est la position de la frange d'ordre 0 ?

Quatrième partie : modification du dispositif interférentiel

Nous nous plaçons encore pour cette partie dans le cas où la distance a entre les deux trous étant petite par rapport à la distance d'observation D, et le point M étant proche du point O, on peut considérer que a, x, y sont très petits devant D.

7) Interposition d'une lame à faces parallèles

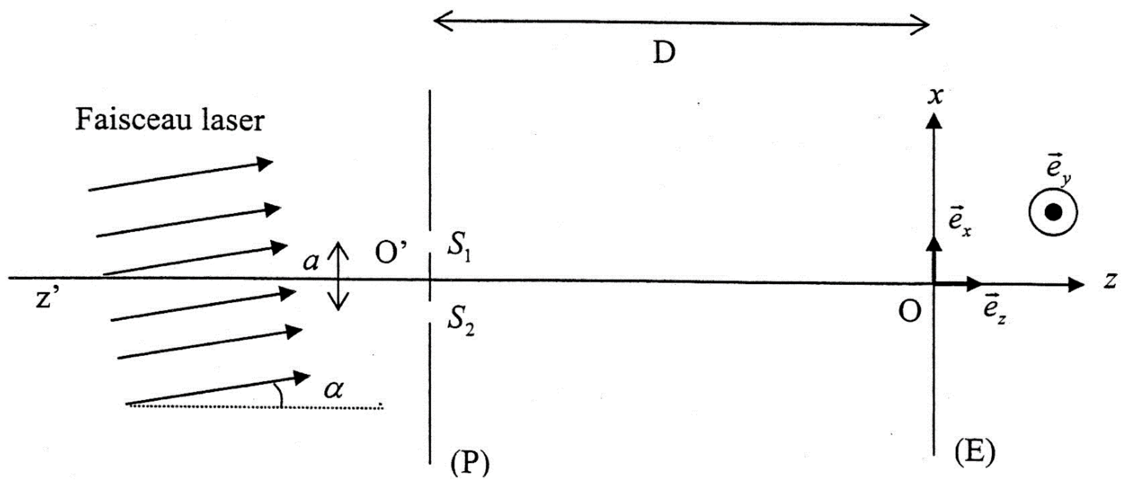
Dans cette question uniquement, on rajoute devant le trou S_2 une petite lame (L) (verre ou mica) à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice n pour la longueur d'onde λ utilisée. Le faisceau LASER arrive toujours perpendiculairement à la plaque (P) et traverse la lame (L) sous incidence normale.



Calculer la différence de chemin optique δ'(M) au point M entre les rayons issus de S_1 et S_2. Exprimer δ'(M) en fonction de n, e, a, x et D.
En déduire, en utilisant les résultats de la partie précédente, de quelle distance d la figure d'interférences sera translatée. On exprimera d en fonction de n, e, a et D.
Dans quel sens se déplace la figure d'interférences par rapport au cas de la question précédente ?

8) Inclinaison du faisceau LASER

Les rayons du faisceau LASER ne sont plus parallèles à l'axe z'z. Ils sont inclinés d'un angle α par rapport à cet axe. On se placera dans le cas où l'angle α est petit.

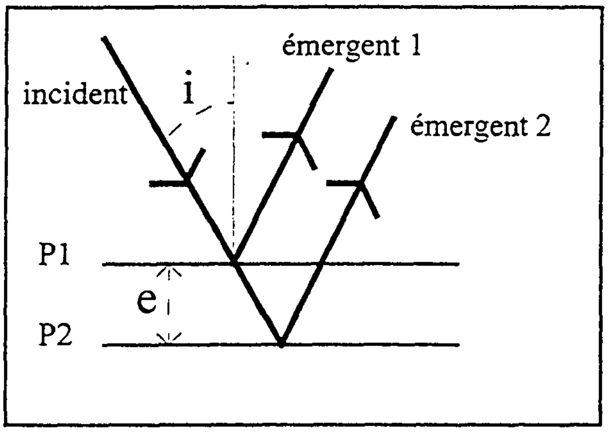


Comment est modifiée la figure d'interférences ?
Quelle est dans ce cas la position de la frange d'ordre 0 ?

DEUXIEME PROBLEME : Interférences

L'usage de calculatrices est autorisé pour ce problème.

Partie I : Interférences à l'infini produites par une lame d'air éclairée par une lumière monochromatique



Le dispositif interférentiel sera modélisé par deux plans parallèles séparés par une épaisseur e.

Les propriétés de ces deux plans sont caractérisées par les hypothèses suivantes :

*** hl** Un rayon lumineux incident qui atteint le premier plan est dédoublé en deux rayons d'amplitudes égales, l'un est réfléchi suivant les lois de Descartes de la réflexion, l'autre est transmis sans déviation.
Un rayon lumineux qui atteint le deuxième plan est réfléchi suivant les lois de Descartes puis traverse le premier plan sans déviation ni réflexion.

*** h2** Les rayons se propagent dans l'air aussi bien entre les plans qu'en dehors. On prendra l'indice de l'air égal à 1.

*** h3** Les réflexions se font sans aucun déphasage.

*** h4** Les transmissions se font sans aucun déphasage.

I.A. On réalise l'interférence à l'infini des deux rayons émergents. Etablir l'expression de la différence de marche entre les deux rayons en fonction de e et de l'angle d'incidence i.

I.B. On note p l'ordre d'interférence lorsque l'incidence i est nulle. Donner l'expression de l'intensité de la figure d'interférence (à une constante multiplicative près) en fonction de i et de p.

I.C. On suppose, dans cette question et les suivantes que l'angle d'incidence est suffisamment petit pour que l'on puisse écrire $\cos i = 1 - \frac{i^2}{2}$. Etablir l'expression donnant les angles correspondant aux maxima d'intensité successifs (franges brillantes).
On supposera que p est exactement un nombre entier.
On notera i_k l'incidence correspondant au k-ième maximum (compté à partir de i = 0).
On exprimera i_k en fonction de k et de p.
Tracer de façon grossière l'intensité en fonction de i (on se limitera à quatre ou cinq maxima).

I.D. Donner l'expression de i_k si p n'est pas exactement un nombre entier.
(On notera : p_o = partie entière de p, et $q = p - p_o$)
On exprimera i_k en fonction de k, de q et de p.
Préciser comment se déforme la courbe de l'intensité en fonction de i lorsque e augmente (on supposera que p est très grand devant 1).

I.E. Donner l'expression des angles i'_k correspondant aux minima successifs d'intensité.

Partie II : Quelques manipulations avec l'interféromètre de MICHELSON

On utilise un interféromètre de MICHELSON éclairé par une lampe spectrale qui émet un rayonnement que l'on considérera comme monochromatique dans un premier temps.

Initialement, l'interféromètre est réglé à la « teinte plate », situation appelée aussi « contact optique ». La source lumineuse est suffisamment large et proche de l'appareil pour qu'un condenseur adéquat permette d'éclairer les miroirs avec un faisceau de rayons dont les incidences varient de l'incidence normale jusqu'à une incidence oblique assez importante.

On translate le miroir mobile de l'interféromètre grâce à la vis de « chariotage ». On observe alors des anneaux sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale f' = 50 cm. L'axe de cette lentille est parallèle aux rayons émergents qui se sont réfléchis sur les miroirs sous incidence normale.

Pour II.A et II.B, on ne demande que des réponses simples et courtes sans aucune démonstration théorique. Pour chaque question, on attend un dessin grossier ou une ligne de texte (voire deux).

II.A. **a)** Faire un dessin du dispositif.
b) Pourquoi effectue-t-on l'observation dans le plan focal image d'une lentille convergente ?
c) Situer le centre des anneaux.
d) Comment le système d'anneaux évolue-t-il si :
* la lentille pivote un peu autour d'un de ses diamètres ?
* la lentille est décalée un peu dans une direction perpendiculaire à son axe ?

e) Pourquoi est-il important de disposer d'un faisceau de rayons d'inclinaisons très variées ?

II.B. **a)** Reprendre brièvement les hypothèses *hl, *h2, *h3 et *h4 du modèle proposé pour le dispositif interférentiel de la première partie en montrant comment elles sont justifiées dans la situation qui vient d'être obtenue.
b) Expliciter l'angle i défini dans la première partie en fonction de la position sur l'écran et de la focale de la lentille (faire un dessin).

II.C. L'index solidaire du miroir mobile indique la valeur 4,13 mm. On mesure sur l'écran les rayons des anneaux sombres successifs, les résultats sont reportés dans le tableau ci-après :

numéro de l'anneau	1	2	3	4	5
rayon (en mm)	59	93	119	140	159

Montrer que l'expérience conduit à une relation entre rayon et numéro de la forme :

$$\mathbf{R_k^{\,2} = a\,k + b}$$

Préciser la valeur numérique de a et son unité.

En utilisant les résultats de la première partie expliciter la relation littérale que l'on obtient entre la longueur d'onde, l'épaisseur de la lame d'air équivalente à l'interféromètre, la focale de la lentille et le coefficient a.

II.D. On actionne à nouveau, et toujours dans le même sens, la vis de chariotage pour translater le miroir mobile, l'index indique alors 4,19 mm. On effectue à nouveau les mesures des rayons des anneaux sombres successifs, les résultats sont donnés ci-après.

numéro de l'anneau	1	2	3	4	5
rayon (en mm)	22	47	62	75	86

On retrouve une relation expérimentale de la forme : $R'_k{}^2 = a'k + b'$. Préciser la valeur numérique de a'.

II.E. En regroupant les résultats obtenus en C et en D, montrer que l'on peut obtenir un système d'équations dont les trois inconnues sont la longueur d'onde et les épaisseurs de la lame d'air équivalente dans les situations C et D.

Résoudre ce système et donner les valeurs numériques de ces trois grandeurs.

Donner l'indication initiale de l'index, lorsque l'appareil était réglé sur la teinte plate.

En estimant à 0,005 mm la précision du repérage de l'index du miroir mobile et à 2 mm celle de la mesure du rayon d'un anneau, évaluer grossièrement la précision des résultats obtenus. Conclure sur la pertinence de l'exploitation des mesures (la longueur d'onde émise vaut en réalité 590 nm).

II.F. On continue à charioter le miroir mobile en faisant augmenter progressivement l'épaisseur de la lame d'air équivalente.

a) Décrire, en la justifiant, l'évolution des anneaux :

* au centre, y-a-t-il apparition ou disparition des anneaux pendant le chariotage ?

* les anneaux sont-ils plus écartés les uns des autres ou resserrés les uns contre les autres une fois le chariotage effectué ?

b) Lors de cette opération, on constate que le contraste des anneaux varie périodiquement, s'annulant pour les valeurs de l'index indiquées ci-après (en mm).

4.25	4.54	4.84	5.13

Expliquer les raisons de ces variations de contraste.

Utiliser les mesures pour préciser quantitativement la réponse (utiliser la valeur de la longueur d'onde donnée à la question II.E).

TROISIEME PROBLEME : Acquisition d'une figure d'interférence (d'après banque PT 2006)

L'usage de calculatrices est autorisé pour ce problème.

L'objectif de ce problème est d'enregistrer la figure d'interférence obtenue grâce aux fentes de Young. Pour obtenir la courbe de l'éclairement en fonction de la position, il faut utiliser un capteur photo-sensible que l'on déplace dans le champ d'interférence.

La partie I *(non traitée ici)* permet de réaliser le capteur qui transforme l'intensité lumineuse en tension. Cette tension est enregistrée par la carte d'acquisition d'un ordinateur.
Dans la partie II *(non traitée ici)*, on étudie le principe de fonctionnement d'un moteur pas à pas qui est utilisé pour déplacer avec précision le capteur.
La partie III *(seule partie traitée ici)* permet d'interpréter la courbe d'interférence enregistrée.
Les trois parties sont largement indépendantes.
Les figures sont regroupées en fin de cet énoncé.

Interprétation de la courbe d'interférence :

Le moteur pas à pas entraine une courroie sur laquelle on a fixé le capteur (voir la figure 7). Ce capteur se déplace à une distance D = 2,0 m des fentes de Young dans le champ d'interférence. A l'aide d'une carte d'acquisition et d'un logiciel, on peut commander le moteur pas à pas et enregistrer la tension à chaque pas. Après étalonnage du déplacement engendré par un pas, on obtient la courbe de la figure 8 qui donne l'éclairement en fonction de l'abscisse. Les fentes sont éclairées par une onde assimilée à une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ = 633 nm, en incidence normale.
On rappelle que l'interfrange pour les fentes d'Young vérifie $i = \frac{\lambda D}{e}$ où e est l'écartement des fentes et que la largeur angulaire β de la tache centrale de diffraction d'une fente de largeur d vérifie $\beta = \frac{2\lambda}{d}$.

1- Exploitation de la courbe d'interférence :

1-a. Donner, sans calcul, une interprétation claire de cette courbe.
1-b. Déterminer l'écartement e entre les deux fentes et leur largeur d.
1-c. Proposer un autre dispositif permettant d'enregistrer la courbe d'éclairement d'une figure d'interférence.

2- Vérification optique de l'écartement :

Les fentes étant très proches, on ne peut pas mesurer avec précision leur écartement. On va donc faire les mesures sur l'image agrandie des fentes par une lentille mince.
Avec une lentille convergente de distance focale image f' = 10,0 cm, on réalise l'image des fentes de Young sur un écran placé à une distance L = 2,00 m des fentes (voir figure 9).
On note A un point objet réel sur l'axe optique dans le plan de front des fentes et A' son image réelle sur l'écran. On a donc $\overline{AA'}$ = L et on note p = $\overline{OA}$ l'abscisse de A, l'origine étant choisie au centre optique O de la lentille.

On rappelle les relations de conjugaison pour une lentille mince : $-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'}$

grandissement transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

2-a. Déterminer l'équation vérifiée par p = $\overline{OA}$ pour que l'image se forme sur l'écran. Montrer que cette équation admet deux racines que l'on exprimera en fonction de L et f'.

2-b. Exprimer, dans celui des deux cas où $|\gamma|$ est supérieure à 1, le grandissement γ en fonction de L et de f'. Faire l'application numérique.

2-c. L'écartement e' des fentes images vaut 10,2 mm. Vérifier que la valeur qu'on peut en déduire pour l'écartement e des fentes est cohérent avec celle obtenue au **1-b**.

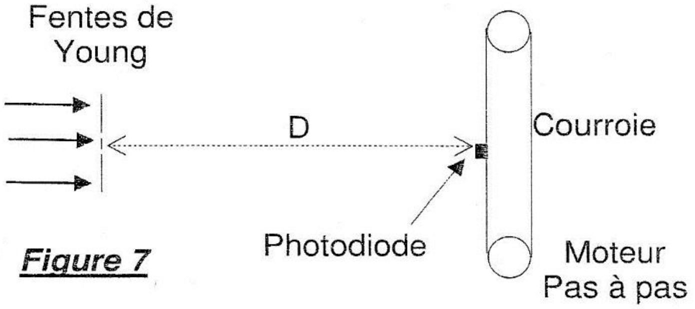


Figure 7

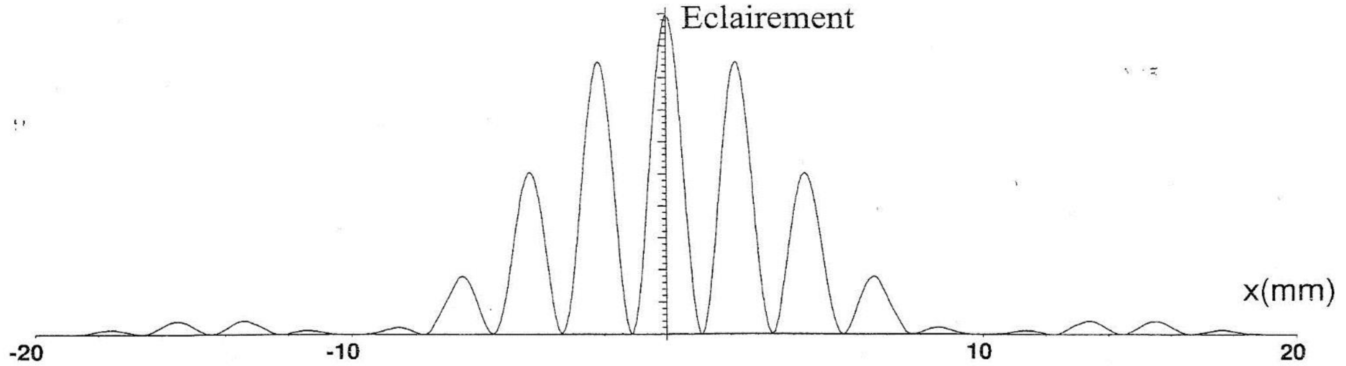


Figure 8

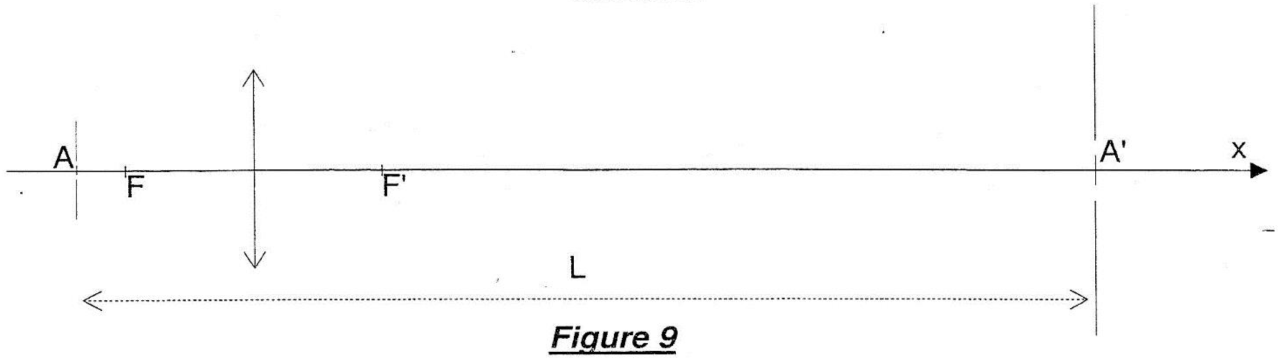


Figure 9