

DEVOIR LIBRE n° 5

L'usage de calculatrices est autorisé pour le 1^{er} problème, et interdit pour le 2^{ème} problème.

PREMIER PROBLEME : Optique (d'après banque PT 2001)

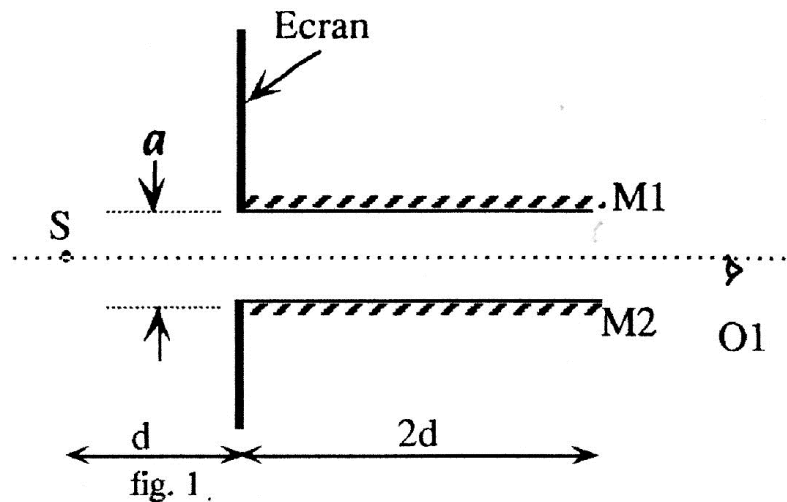
L'usage de calculatrices est autorisé pour ce problème.

Les parties I, II et III sont indépendantes.

I) Miroirs

On considère une source ponctuelle S de lumière blanche, Cette source est placée à une distance d de l'espace limité par 2 miroirs plans M_1 et M_2 , parallèles et séparés par une distance a . Les miroirs ont une longueur $2d$. Le dispositif est représenté figure 1. On ne considérera que les rayons situés dans le plan de la figure. De même, les rayons qui se dirigent en dehors des miroirs sont arrêtés par un écran.

A.N. : $a = 1$ cm, $d = 5$ cm.



- 1) Décrire ce que verrait un observateur O_1 regardant vers la source à travers l'ouverture entre les miroirs.
- 2) Que verrait cet observateur si la longueur des miroirs était $4d$ au lieu de $2d$?
- 3) On reprend des miroirs de longueur $2d$. Dessiner l'enveloppe du faisceau lumineux qui émerge du volume situé entre les 2 miroirs.
N.B. : Vous reproduirez la figure 1 sur votre copie pour répondre à cette question.
- 4) Calculer l'angle d'inclinaison maximale α des rayons en sortie.
- 5) On place une lentille de distance focale $f = 4d$ à la distance d de la sortie des miroirs de la figure 1. Décrire qualitativement le faisceau lumineux qui sort de la lentille.

II) Guide diélectrique

On remplace maintenant le système à miroirs ci-dessus, par un milieu diélectrique plan transparent d'indice n_1 , inséré entre deux milieux d'indice n_2 (figure 2), l'ensemble étant placé dans un milieu d'indice n_3 , avec la condition $n_1 > n_2 > n_3$. A l'aide d'une lentille L_1 , on focalise la lumière émise par une source monochromatique ponctuelle S à l'entrée du milieu 1. On ne considère que les rayons qui entrent dans milieu 1.

Données numériques :

$n_1 = 1,5227$; $n_2 = 1,5200$; n_3 (milieu extérieur) = 1,0000 ; $a = 1,00$ mm ; $L = 10,00$ cm.

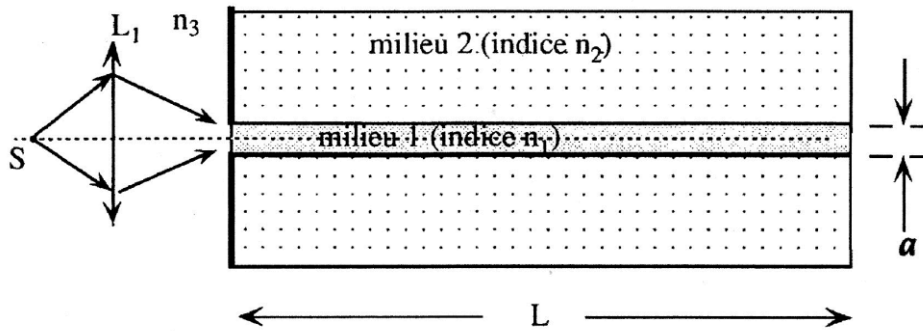


fig. 2

- 1) Calculer en fonction des indices, l'angle d'incidence maximum i_1 d'un rayon à l'interface entre le milieu 1 et le milieu 2 pour que la lumière ne sorte pas du milieu 1.
- 2) En déduire l'angle formé, à l'entrée du milieu 1, par les 2 rayons les plus inclinés par rapport à l'axe et qui seront guidés par ce même milieu.
- 3) Même question pour les rayons en sortie.
- 4) Dans le cas où la lumière arrive à l'entrée du milieu 1 sous forme d'impulsions de durée 1 nanoseconde, calculer l'allongement de ces impulsions en sortie du guide.

III) Interféromètre de Michelson

Un faisceau de faible divergence (inclinaison des rayons par rapport à l'axe compris entre 0 et α_{\max}) issu d'une source ponctuelle est introduit dans un montage interférométrique de Michelson (figure 3). La source est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 508$ nm (raie verte du cadmium). Sur la figure 3, on ne représente que le trajet d'un rayon lumineux incliné d'un angle α par rapport à l'axe de l'interféromètre. Ce rayon est divisé au point d'incidence A sur la lame séparatrice LS en deux rayons. Les miroirs M_1 et M_2 les renvoient vers la lame. Une lentille L placée dans le quatrième bras de l'interféromètre permet de diriger les 2 rayons en un point situé sur son plan focal image. On étudie la figure de franges formée sur l'écran par l'ensemble du faisceau. On ne tiendra pas compte des effets liés à l'épaisseur de la lame séparatrice LS . Le plan (P_0) correspond à la position du miroir M_2 pour laquelle les 2 bras de l'interféromètre ont la même longueur.

Par construction, on observe l'égalité des trajets suivants :

$$AB = AE, \quad BC = GH, \quad CD = HI \quad \text{et} \quad FE = FG$$

On se propose, dans les questions 1 à 4, de calculer la différence ΔL des chemins optiques $(ABCDJ)$ et $(AEFGHIJ)$. Cette différence est décomposée en deux termes δ_1 et δ_2 . Le terme δ_1 est relatif au passage des rayons dans la lentille tandis que le terme δ_2 est relatif à la distance e_0 du miroir mesurée par rapport à la position d'égalité des bras de l'interféromètre.

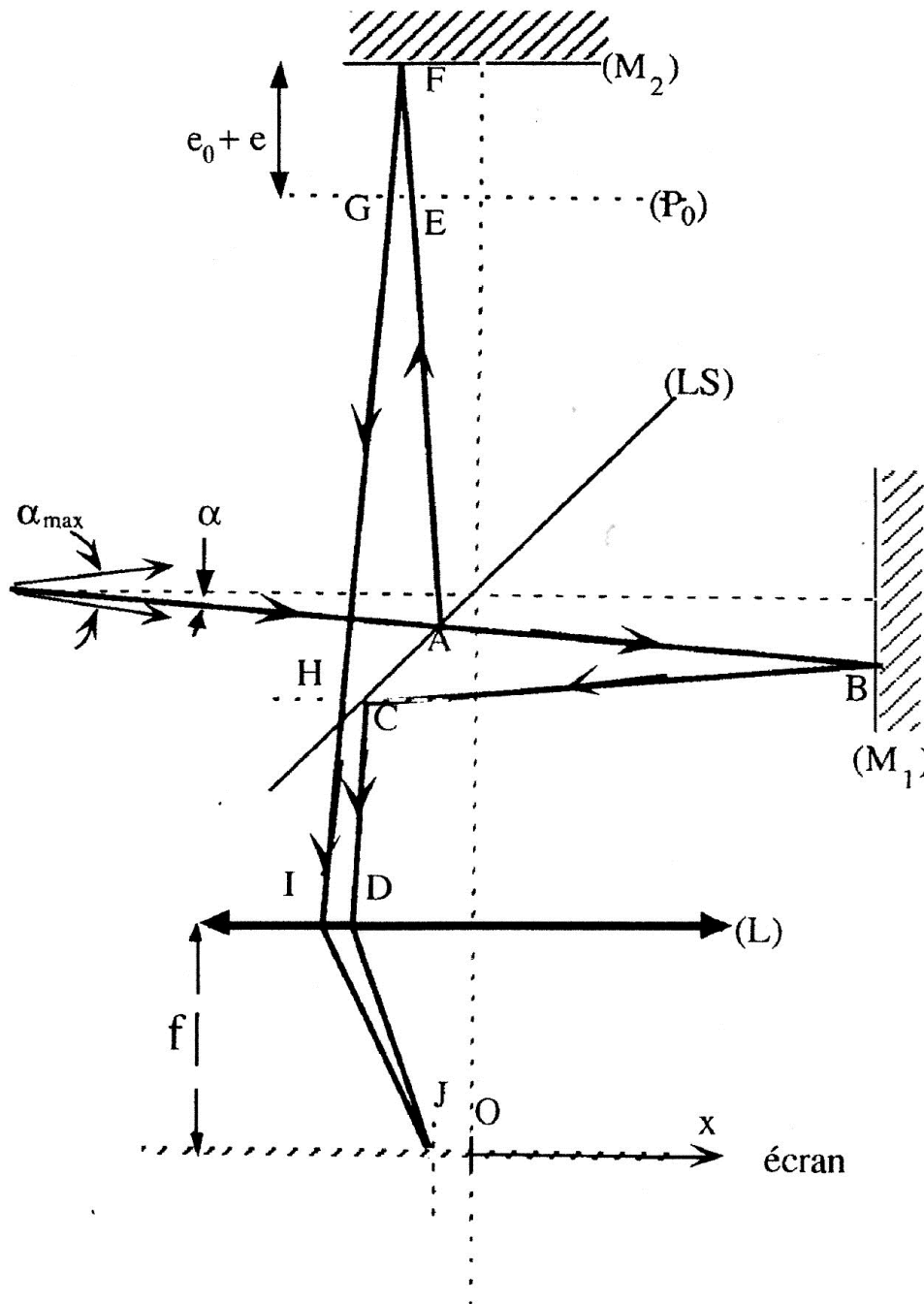


Fig. 3

Figure 3 : Interféromètre de Michelson.

La distance entre M_2 et P_0 est e_0 pour les questions 1 à 7. Elle est $e_0 + e$ pour les questions 8 et suivantes.

N.B. : nous soulignons que les flèches sont la représentation graphique de rayons lumineux et ne doivent pas être confondues avec la représentation d'une onde plane. Une onde plane correspond au cas d'un faisceau d'étendue spatiale transverse infinie, ce qui n'est pas le cas ici.

1) Principe de retour inverse.

- a) En utilisant le principe de retour inverse de la lumière, montrer que la différence de chemin optique imposée par la lentille à 2 rayons incidents parallèles séparés de la distance DI peut être entièrement ramenée à la distance δ_1 à l'entrée de la lentille (fig.4).

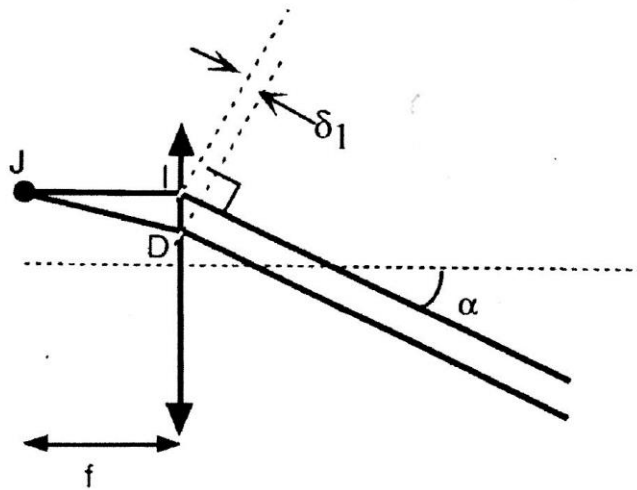


Fig.4

b) Donner l'expression de δ_1 .

Remarque : Un calcul géométrique donne l'expression suivante que vous admettez pour la distance DI : $DI = 2 e_0 \tan(\alpha)$.

2) Calculer le terme δ_2 .

3) Montrer alors, en justifiant le calcul, que la différence de chemin optique $\Delta L = 2 e_0 \cos(\alpha)$.

4) Calculer alors le déphasage $\Delta\phi$ entre les 2 rayons qui interfèrent.

La figure d'interférence observée dans le plan focal image de la lentille admet une symétrie de révolution par rapport à l'axe optique de la lentille. Dans la suite du problème, nous nous limiterons à l'observation de la distribution d'intensité sur l'écran suivant une droite de direction Ox passant par l'axe optique de la lentille.

5) Quelle est l'abscisse x sur l'écran de la frange d'interférence d'ordre p ? (e_0 différent de 0). Pour cela, on effectuera un développement limité du second ordre sur les fonctions trigonométriques.

6) Quelle est la forme des franges d'interférence ? Déterminer la loi $I(x)$ de l'intensité lumineuse (on désignera par $2 I_0$ la valeur maximale de cette intensité).

7) On positionne les miroirs M_1 et M_2 de manière à avoir l'égalité des chemins optiques quelle que soit la valeur de l'angle α .

a) Décrire qualitativement la répartition d'intensité observée sur l'écran.

b) On introduit ensuite sur le trajet AB une lame mince parallèle d'indice $n = 1,600$ et d'épaisseur l inconnue, disposée parallèlement au miroir M_1 . Décrire qualitativement la répartition d'intensité observée sur l'écran.

c) On place au centre de l'écran (point O) un photo-détecteur et on observe 20 passages du signal par un maximum en déplaçant le miroir M_2 jusqu'à retrouver en tout point de l'écran l'éclairement obtenu à l'égalité des chemins optiques. Calculer l .

On retire la lame mince insérée dans le montage en 7.b et 7.c, on se propose maintenant de réaliser un système pour la mesure de déplacements (en valeur et en sens). Pour cela, on place une barrette linéaire de photo-détecteurs dans le plan focal image de la lentille. La suite du problème va consister, étant donné le type de barrette retenu (caractérisé par la largeur des photo-détecteurs), à fixer les valeurs numériques des composants optiques à utiliser à savoir : la distance focale de la lentille et la position précise des deux photo-détecteurs à activer sur la barrette. De même, nous chercherons à chiffrer les performances de l'instrument par la course maximale de mesure.

Pour ce faire, on réalise une asymétrie e_0 sur la longueur des bras de l'interféromètre. Cet instrument de mesure doit permettre la mesure d'un petit déplacement e autour la position e_0 . Ainsi, la distance entre le plan P_0 et le miroir M_2 s'écrit alors : $E = e + e_0$ avec e_0 fixée à 5,0 mm et $e \ll e_0$.

Détail de la démarche de conception du système :

Le miroir mobile M_2 se déplace à la vitesse constante v , nous admettons la loi $E = e_0 + v t$, soit $e = v t$.

On considère trois photo-détecteurs d'une barrette CCD, numérotées 1, 2 et 3 et positionnés comme indiqué sur la figure 5.

Le photo-détecteur numéro k fournit un courant $i_k(t)$ proportionnel à l'intensité lumineuse $I_k(t)$ au centre du détecteur : $i_k(t) = a I_k(t)$.

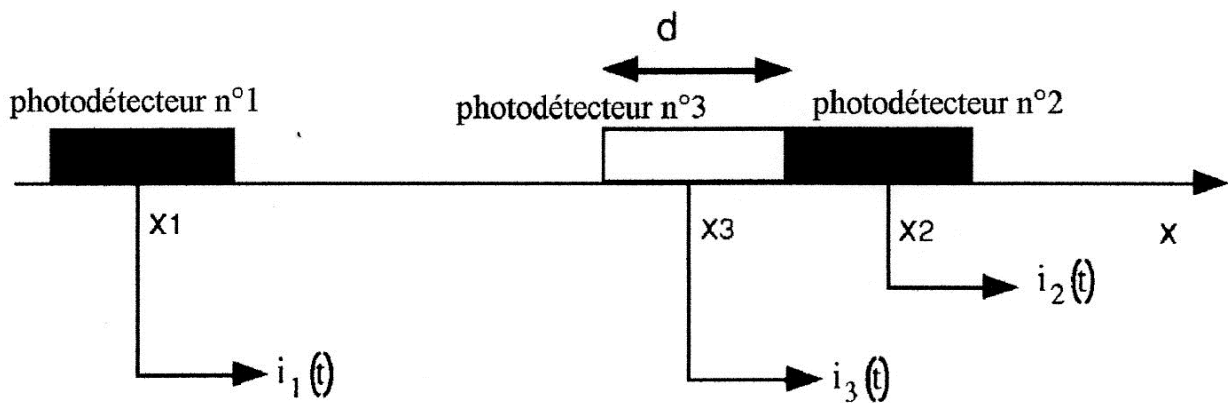


Fig 5

étape 1 :

La position du premier photo-détecteur est fixée sur l'axe optique de la lentille : $x_1 = 0$. Détermination de la **position x_2** du second photo-détecteur à valider de façon à ce que les signaux $i_1(t)$ et $i_2(t)$ soient en quadrature à l'instant $t = 0$: questions 8, 9, 10.

étape 2 :

Le critère de tolérance sur la quadrature des signaux $i_1(t)$ et $i_2(t)$ permet alors la détermination de la **plage de déplacement maximale e_{max}** de mesure : question 11.

étape 3 :

Un critère fixe la différence de phase acceptable estimée à l'instant $t = 0$ entre les signaux $i_2(t)$ et $i_3(t)$. Cela permet la détermination de la **taille des photo-détecteurs d** : question 12.

étape 4 :

Application numérique : de la taille des photo-détecteurs on déduit la **focale de la lentille** et la **position du photo-détecteur n° 2** : question 13.

- 8) Donner l'expression générale $I(x, e)$ de l'intensité lumineuse au point d'abscisse x pour un déplacement e du miroir autour de la position e_0 .
Montrer que le courant délivré par le photo-détecteur au centre de l'écran ($x_1 = 0$, photo-détecteur n° 1) prend la forme : $i_1(e) = a I(x_1, e) = a I_0 (1 + \cos(\phi_1(e)))$ et détailler l'expression de $\phi_1(e)$.
- 9) Montrer que le courant délivré par le photo-détecteur au point d'abscisse x_2 (photo-détecteur n° 2) prend la forme: $i_2(e) = a I(x_2, e) = a I_0 (1 + \cos(\phi_2(e)))$ et détailler l'expression de $\phi_2(e)$.
- 10) Préciser la position x_2 pour laquelle: $\phi_1(0) - \phi_2(0) = \pi / 2$.
- 11) A partir des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, on génère les signaux $i'_1(t)$ et $i'_2(t)$, en supprimant la composante continue du signal. Le critère de calcul retenu pour dire que les signaux $i'_1(t)$ et $i'_2(t)$ sont quasiment en quadrature est : $\phi_1(e_{\max}) - \phi_2(e_{\max}) = \pi / 2 + \pi / 36$. Calculer la course maximale e_{\max} du miroir mobile M_2 pour laquelle les signaux issus des photo-détecteurs 1 et 2 peuvent être supposés quasiment en quadrature.
- 12) Le courant délivré par le photo-détecteur au point d'abscisse x_3 (photo-détecteur n° 3) s'écrit : $i_3(e) = a I(x_3, e) = a I_0 (1 + \cos(\phi_3(e)))$. Le critère retenu pour choisir l'écart centre à centre entre les photo-détecteurs 2 et 3 est : $\phi_3(0) - \phi_2(0) = \pi / 36$. On remarquera que, pour $e = 0$, le profil d'intensité lumineuse sur la droite Ox de l'écran s'écrit :
 $I(x, 0) = I_0 (1 + \cos(\phi(x, 0)))$ avec $\phi(x, 0)$ qui suit une loi quadratique en x . Montrer que la longueur d d'un photo-détecteur vaut :
- $$d = B \left(1 - \sqrt{\frac{17}{18}} \right) \text{ et préciser l'expression de } B.$$
- 13) Application numérique : calculer la position x_2 idéale théorique du centre de la photodiode délivrant le signal $i_2(t)$ et la distance focale de la lentille pour une dimension des photo-détecteurs $d = 9,0 \mu\text{m}$.
- 14) Les signaux issus des photo-détecteurs positionnés en $x_1 = 0$ et $x_2 \neq 0$ sont envoyés respectivement sur les voies 1 et 2 d'un oscilloscope réglé en mode XY.
Décrire qualitativement la courbe tracée par le spot électronique lorsque le miroir se déplace de la position e_0 à la position $e_0 + e$. Préciser le sens de déplacement du spot si e est positif.

DEUXIEME PROBLEME : Pulsar et électromagnétisme (d'après banque PT 2011)

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

Le pulsar est un objet céleste compact (étoile à neutrons) en rotation sur lui-même autour d'un axe et possède un très fort champ magnétique \vec{B}_p . On se propose d'étudier quelques-unes de ses propriétés et leur incidence sur les particules qui se trouvent à leur voisinage.

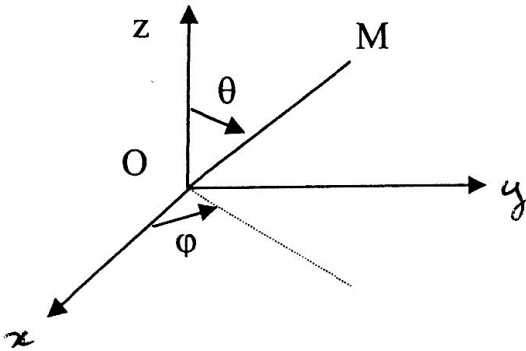
On rappelle la formule donnant la divergence d'un vecteur $\vec{A}(r) = A(r)\vec{e}_r$ radial ne dépendant que de la distance $r = OM$ en coordonnées sphériques :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A(r))$$

Pour les applications numériques, on donnera un chiffre significatif.

On donne la valeur approchée de la constante de gravitation : $G = 6.10^{-11}$ SI.

Coordonnées sphériques :



A) Etude mécanique :

A-1) Rappeler les expressions de la loi de Coulomb et celle de la loi de Newton concernant l'interaction de deux masses ponctuelles. Rappeler le théorème de Gauss pour le champ électrique. Considérant une distribution de masse qui crée un champ de gravitation $\vec{g}(M)$, donner la forme du théorème de Gauss.

A-2) On considère une étoile sphérique de rayon R qui est constituée de matière en autogravitation (en interaction avec elle-même). Un point M est repéré en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . La masse volumique est notée $\mu(r)$.

Exprimer la masse dm comprise entre les rayons r et $r + dr$ en fonction de $\mu(r)$. En déduire la masse totale sous forme intégrale.

A-3) Exprimer la force de gravitation entre 2 éléments de masse m et m' situés à la distance r l'un de l'autre. Montrer que la force dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on exprimera en fonction de m, m', G et r . On supposera que cette énergie s'annule à l'infini.

Dans toute la suite, sauf aux questions A-10 à A-13, on considère que la masse volumique est uniforme, égale à celle du cœur μ_c .

A-4) Lorsque le rayon de l'étoile est r , calculer le champ de gravitation créé à l'extérieur de l'étoile en un point M situé à une distance $r' = OM > r$. Montrer que ce champ est identique à celui qui serait créé par une masse ponctuelle $m(r)$ située au centre O de l'étoile.

A-5) On apporte ensuite de l'infini une masse élémentaire dm de sorte que le rayon devienne $r + dr$; montrer que la variation d'énergie potentielle de l'étoile s'écrit $dE_p = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^4 dr$.

On constitue ainsi l'étoile de rayon R et de masse M_0 , calculer son énergie potentielle. Montrer qu'elle se met sous la forme $E_p = -K \frac{GM_0^2}{R}$. Donner la valeur de K .

A-6) Déterminer le champ de gravitation à l'intérieur de l'étoile (en r) en fonction de la masse M_0 , du rayon R , de G et de r .

A-7) En supposant l'équilibre hydrostatique réalisé, et en admettant que la force volumique de pression vaut $-\text{grad } P$, donner la relation différentielle entre la pression $P(r)$ et $g(r)$ la composante radiale du champ de gravitation. Que peut-on dire de la valeur de P en $r = R$? En déduire l'expression de la pression.

A-8) On suppose le gaz parfait. Déterminer le lien entre la température $T(r)$, la pression, la masse volumique μ_c , la masse molaire M_m et la constante des gaz parfaits \mathcal{R} . En déduire que la pression peut être reliée à la densité volumique d'énergie interne par la relation $P(r) = (\gamma - 1) e(r)$. En déduire E_{int} l'énergie interne de l'étoile.

Quelle relation simple lie E_p et E_{int} ?

A-9) On donne $\mu_c = 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$; $R = 10 \text{ km}$; $\gamma = 5 / 3$. Calculer la masse M_0 , E_p , E_{int} et la pression au centre $P(0)$.

Pour les questions A-10 à A-13, on suppose que la pression vérifie l'équation d'une transformation polytropique $P(r) = K_0 \mu(r)^k$, on posera $k = 1 + 1/n$; on ne considère donc plus que μ est constant.

A-10) On rappelle l'équation de Maxwell-Gauss pour le champ électrique : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, avec ρ la densité volumique de charge. Donner l'équivalent de l'équation de Maxwell-Gauss pour le champ de gravitation. En déduire l'équation différentielle qui lie $g(r)$ à $\mu(r)$.

En utilisant en outre l'équation de la statique des fluides, obtenir l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par $\mu(r)$: $\frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{(k-2)} \frac{d\mu}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{k K_0} r^2 \mu$.

A-11) En posant $x = r/a$ et $y = (\mu(r) / \mu_c)^{1/n}$, montrer que les variables x et y vérifient l'équation différentielle suivante (où $y' = \frac{dy}{dx}$ et $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, *non précisé par l'énoncé original...*) :

$$y'' + 2y' / x = -y^n \quad (1)$$

à condition de donner à a une valeur que l'on explicitera en fonction de G , K_0 , k et μ_c .

A-12) On désigne par $y = y_n(x)$ la solution de cette équation (1) pour n donné. Justifier les conditions limites $y_n(0) = 1$ et $\frac{dy_n}{dx}(0) = 0$. Vérifier que pour $n = 1$, la solution est donnée par $y_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

A-13) Pour quelles valeurs cette fonction s'annule-t-elle ? En déduire l'expression du rayon de l'étoile en fonction des données. Calculer sa valeur. Pour déterminer K_0 , on utilisera la pression au centre calculée en A-8.

B) Electromagnétisme :

On suppose que le pulsar possède un champ magnétique de type dipolaire qui est engendré par un dipôle de moment magnétique \vec{M}_0 centré sur le cœur O de l'étoile.

B-1) On donne l'expression du champ magnétique en un point P dû au dipôle magnétique $\vec{M}_0 = M_0 \vec{e}_z$. On repère P en coordonnées polaires (r, θ) d'axe polaire Oz.

$$B_r = \frac{2\mu_0 M_0 \cos(\theta)}{4\pi r^3} \quad B_\theta = \frac{\mu_0 M_0 \sin(\theta)}{4\pi r^3}$$

Déterminer l'équation $r(\theta)$ des lignes de champ. En tracer l'allure.

B-2) Rappeler l'expression de la force électromagnétique qui s'exerce sur une particule chargée de charge q et de masse m , animée d'une vitesse \vec{v} lorsqu'elle se trouve dans un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} .

On se place dans le cas où le champ électrique est nul, le champ magnétique constant $\vec{B} = B \vec{e}_z$.

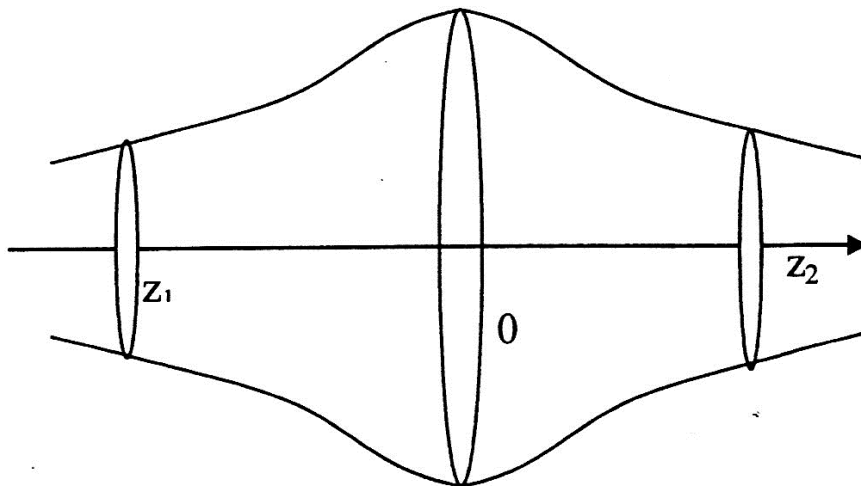
On donne les conditions initiales $v_z(0) = v_{0z}$, $v_x(0) = v_{0\perp}$ et $v_y(0) = 0$.

Déterminer le mouvement de la particule de masse m soumise uniquement à la force magnétique. On précisera en particulier la trajectoire dans le plan xOy et on exprimera son rayon.

Que peut-on dire de l'énergie cinétique ainsi que de l'énergie cinétique orthogonale de la particule définie par $E_{c\perp} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)$?

B-3) Dans le cas précédent on considère que la particule chargée en mouvement dans le plan xOy se comporte comme une spire parcourue par un courant. Montrer que l'on peut lui associer un moment magnétique noté μ avec $\mu = E_{c\perp} \times \frac{1}{B}$; on admet par la suite que cette quantité est un invariant du mouvement même si le champ n'est plus constant.

B-4) On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz et on considère que le champ s'écrit $\vec{B}(M) = B_z(r, z) \vec{e}_z + B_r(r, z) \vec{e}_r$, B_z étant lentement variable (par rapport aux coordonnées d'espace). Un tube de champ est donc de révolution d'axe Oz. On considère le tube ci-dessous.



a) Pourquoi le flux de \vec{B} à travers une section est-il constant ? En déduire le lien entre B_z et r .

On considère une particule chargée initialement en mouvement circulaire sur la section $z = 0$ de rayon r_0 . La particule possède en outre une vitesse axiale v_{0z} faible ce qui va amener la trajectoire à dériver tout en conservant une forme circulaire mais de rayon ρ variable.

- b) En considérant l'invariant de la question B-3, montrer que $\rho^2 B_z = \text{constante}$. En déduire que l'on peut considérer que la trajectoire est une succession de cercles qui suivent un tube de champ.
- c) Comment évolue l'énergie cinétique orthogonale lorsque la particule s'approche de la cote z_2 ? En déduire l'évolution de la vitesse axiale v_z . Donner une condition sur le rayon r_2 du tube en z_2 pour que la particule ne puisse aller au-delà. Dans ces conditions, que peut-on dire du mouvement ultérieur ?

B-5) Dans le cas d'un champ magnétique \vec{B} dipolaire, décrire qualitativement le mouvement possible d'une particule chargée ; on généralisera le résultat précédent et on s'aidera d'un schéma faisant apparaître deux lignes de champ.

B-6) On considère une particule chargée (q) à l'équilibre au voisinage de la surface de l'étoile où règne le champ magnétique dipolaire \vec{B} . En considérant le phénomène d'induction dans le référentiel barycentrique R^* de l'étoile (référentiel dans lequel le centre d'inertie de l'étoile est immobile, et dans lequel l'étoile est en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$), déterminer le champ électrique en ce point \vec{E}_1 en fonction de $\vec{r} = r \vec{e}_r$ (en coordonnées cylindriques), \vec{B} et du vecteur rotation $\vec{\Omega}$. Donner son expression à l'équateur en fonction de la valeur du champ magnétique B .

B-7) Pour un pulsar typique, $B = 100 \text{ T}$, $R = 10 \text{ km}$, $\Omega = 6 \text{ rad.s}^{-1}$, calculer la valeur du champ électrique de surface à l'équateur.

Le champ électrique intense qui est créé expulse des particules de la surface du pulsar créant une électrosphère en co-rotation avec celui-ci. Comme une particule ne peut dépasser la vitesse de la lumière, montrer que cette électrosphère s'étend sur une distance finie que l'on déterminera.