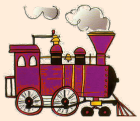

Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

Chapitre 6 : Diffusion thermique

Sommaire

Nous avons présenté dans l'introduction du cours de thermodynamique la notion de transfert thermique, aussi appelé chaleur. Nous l'avions défini comme le mode de transfert d'énergie associé à des phénomènes inobservables à l'échelle macroscopique, par opposition au travail. On se propose dans se chapitre de s'intéresser à un type de transport de chaleur particulièrement important : la conduction thermique (ou diffusion thermique)

1 Description de la diffusion thermique

1.1 Les trois types de transferts thermiques

Il existe trois modes de transferts thermiques :

- l'échange par convection (transfert thermique par déplacement de fluide) ;
  On appelle convection un transfert thermique consécutif à un déplacement de matière. On ne peut donc envisager la convection que lorsqu'un fluide est présent. Elle se produit à la surface d'un solide avec comme fluide de convection un liquide ou un gaz, ou bien encore à la surface d'un liquide

avec comme fluide de convection un gaz. Il y a, comme dans le cas de la conduction thermique, transmission-répartition de l'énergie cinétique d'agitation thermique.
Des inhomogénéités de température au sein du fluide impliquent des inhomogénéités de masse volumique, c'est-à-dire que le fluide présentera des zones plus ou moins denses en particules. Ces inhomogénéités en densité de particules vont entraîner des déplacements de matière des zones les plus denses vers les moins denses donc des zones froides vers les zones chaudes.

Figure 1 – Différentes manifestations du phénomène de convection thermique

- l'échange par diffusion (le seul traité dans ce chapitre) ;

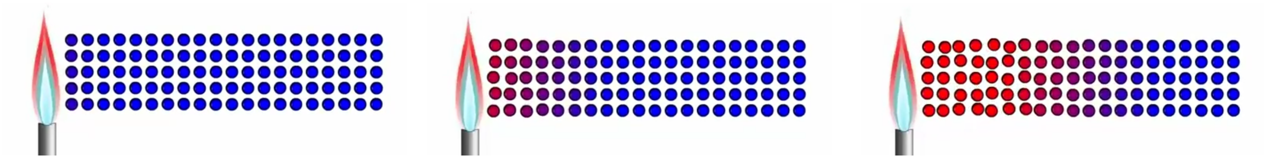

Figure 2 – Phénomène de conduction thermique : la chaleur se propage de proche en proche du fait des chocs entre particules microscopiques.

C'est un mode de transfert qui intervient dans tous les milieux qu'ils soient solides ou fluides. Il se produit lorsque le système présente des inhomogénéités de température. Nous savons que l'énergie cinétique moyenne des particules constituant la matière est fixée par la valeur de la température. S'il existe des inhomogénéités de températures $T = T(x, y, z)$ entre deux zones du système, cela signifie que les particules vont avoir une agitation d'amplitude plus importante dans certaines zones plutôt que dans d'autres. Au cours des interactions avec des particules de plus faible agitation, il se produit toujours un transfert d'énergie des plus agitées au profitdes moins agitées.
En imaginant un système matériel inhomogène en température $T = T(x, y, z)$, isolé de toute interaction avec l'extérieur, dans lequel seul le phénomène de conduction peut se produire, on comprend aisément l'état vers lequel il va évoluer : cet état d'équilibre ne peut être que celui où l'énergie cinétique d'agitation est répartie uniformément, c'est-à-dire un etat où il y a homogénéité de température $T(x, y, z) \simeq T_0$.

> La cause de la conduction thermique est la non-uniformité de la température du matériau.
> La conduction thermique tend à homogénéiser la température.

- l'échange par rayonnement.
Le rayonnement est un mode de transfert énergétique qui se distingue des deux précédents car il ne nécessite pas de support matériel comme la conduction et la convection. En effet, ce transfert d'énergie peut se produire dans le vide. Il correspond à la propagation d'une onde électromagnétique constituée par le couple $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. L'exemple le plus important pour nous est le rayonnement provenant du Soleil mais ce phénomène se manifeste dans bien d'autres cas. Par exemple, un feu dans une cheminée conduit à l'obtention de braises incandescentes. Le rayonnement qu'elles émettent est composé d'une partie lumineuse à dominante rouge mais aussi d'une grande partie d'infrarouges qui

sont responsables de notre sensation de chaleur. Il en va de même lorsque l'on utilise un four de cuisine sur la position grill. Les résistances électriques rougissent et rayonnent alors beaucoup dans l'infrarouge.

Figure 3 – Exemples de tranfert thermique par rayonnement.

1.2 Flux thermique (ou Puissance thermique)

Lors du phénomène de diffusion thermique, la chaleur se propage plus ou moins rapidement suivant le matériau et les conditions de températures. Dans la suite, on sera parfois amené à caractériser la vitesse avec laquelle se phénomène se produit, ce qui nous amène naturellement à définir un débit d'énergie, c'est-à-dire une puissance associée à ce transport : c'est tout simplement la chaleur transférée par unité de temps. Cette puissance est appelée *puissance thermique*. On parle aussi de flux thermique, noté ϕ.

Flux thermique (ou puissance thermique) :

Le flux thermique ϕ_{th} (ou puissance thermique P_{th}) est la chaleur δQ qui traverse une surface par unité de temps :

$$\phi_{th} = P_{th} = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Ainsi, la connaissance du flux thermique nous permettra de déterminer la chaleur transportée (souvent dans le but d'appliquer le premier principe de la thermodynamique) :

$$\delta Q = \phi_{th}\mathrm{d}t \tag{2}$$

Correspondant à une puissance, le flux thermique ϕ_h s'exprime en W ($1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$).

Remarque : Le flux thermique est une grandeur algébrique : son signe dépend de l'orientation de la surface.

Comme à tout débit, il est possible d'associer un *vecteur densité de courant* :

Vecteur densité de courant thermique :

Le *vecteur densité de courant thermique* $\mathbf{j}$ est construit de telle sorte que son flux à travers une surface S représente le flux thermique ϕ_{th} (ou la puissance thermique P_{th}) transféré à travers cette surface :

$$\phi_{th} = \iint_S \mathbf{j_{th}} \cdot \mathbf{dS} \tag{3}$$

2 Lois de la diffusion thermique

2.1 Loi de Fourier

L'objectif de Fourier était d'obtenir une équation gérant l'évolution de la température d'un point du solide en fonction du temps. A partir d'observations expérimentales, il modélisa les transferts de chaleur et aboutit ainsi à une équation faisant intervenir des dérivées partielles. C'est en recherchant les solutions fondamentales de cette équation que Fourier développa la théorie mathématique appelée aujourd'hui séries de Fourier.

2.1.1 Observation expérimentale

Les observations expérimentales de Fourier étaient les suivantes :

- la chaleur se déplace des zones de hautes températures vers les zones de basses températures ;
- la direction du flux de chaleur est perpendculaire aux surfaces isothermes ;
- la chaleur se déplace proportionnellement aux écarts de température existants.

Figure 4 – Joseph Fourier (1768-1830)

2.1.2 Enoncé

Loi de Fourier :

La loi de Fourier relie le courant de diffusion thermique au gradient de température :

$$\mathbf{j_{th}} = -\lambda \boldsymbol{\nabla} T \qquad (4)$$

où $\lambda > 0$ (en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$) est la *conductivité thermique du matériau.*

Remarques :

- La loi de Fourier est bien en accord avec toutes observations expérimentales. On notera la présence du signe $-$ afin de rendre compte de l'orientation du flux thermique vers les basses températures.

- La conduction thermique s'effectue plus ou moins bien en fonction de la nature du système matériel envisagé. Un matériau bon conducteur de chaleur est caractérisé par une conductivité thermique λ élevée. On comprendra aisément que plus le matériau sera dense, plus l'occurrence de chocs entre les constituants sera importante et donc plus la conduction thermique s'effectuera. Par conséquent, ce mécanisme de transfert sera primordial dans les solides.

  En outre, la présence d'électrons libres dans les conducteurs électriques se traduira par une grande conductivité thermique. Au contraire, le carrelage, le marbre sont des conducteurs moyens. Le bois, la laine de verre, la laine, le polystyrène expansé sont de mauvais conducteurs que l'on qualifie en général d'isolants. Les fluides (liquides et gaz) sont nettement moins bons conducteurs que certains solides cités. Certains liquides comme le sodium liquide ou le potassium liquide sont toutefois de bons conducteurs. Voici quelques ordres de grandeur :

— solides métalliques : $\lambda \sim 100\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ (ex. : $\lambda_{Cu} \simeq 400\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$)
— solides isolants : $\lambda \sim 0{,}01\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ (ex. : $\lambda_{polystyrene} \simeq 0{,}3\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, $\lambda_{laine\ de\ verre} \simeq 0{,}04\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, $\lambda_{bois} \simeq 0{,}3\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$)
— liquides non métalliques : $\lambda \sim 0{,}1\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ (ex. : $\lambda_{eau} \simeq 0{,}6\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$)
— gaz : $\lambda \sim 0{,}01\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ (ex. : $\lambda_{air} \simeq 0{,}03\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$)

Dans le domaine de l'habitat, l'air des doubles vitrages, le polystyrène, le bois et la laine de verre sont des exemples d'isolants très utilisés (ordres de grandeur à connaître)

2.2 Equation de la chaleur

2.2.1 Position du problème

On étudie le transfert thermique dans une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface est calorifugée (Fig. 5). On note $\mathbf{e_x}$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la barre. Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ de la barre sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats aux températures respectives T_1 et T_2. Ce type de problème est un problème unidimensionnel : le champ de température ne dépend spatialement que de x :

$$T(\mathbf{r}, t) = T(x, t) \tag{5}$$

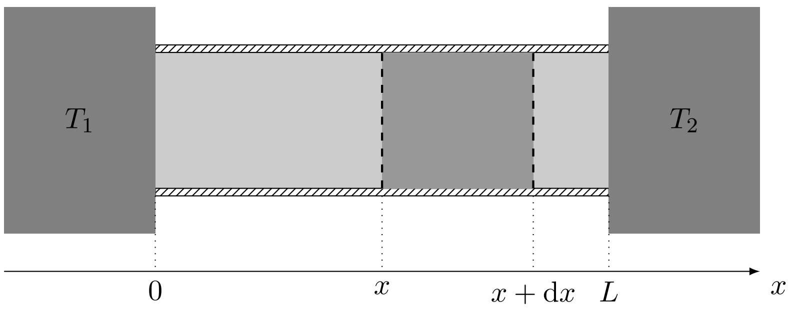

Figure 5

Établissons l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x,t)$ en utilisant la loi de Fourier et en appliquant le premier principe, sous forme de bilan enthalpique, à la transformation de la tranche mésoscopique de la barre comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ durant l'intervalle de temps $[t, t + \mathrm{d}t]$:

▷

Equation de la chaleur :

Dans le cas d'une phase condensée où la conductivité thermique λ est indépendante de x, en l'absence de terme de source, la température vérifie l'équation de la chaleur :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \qquad (6)$$

où $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé *coefficient de diffusion* (en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$).

Remarques :

- L'équation de la chaleur est aussi appelée *équation de diffusion thermique* ;
- L'analyse du coefficient de diffusion permet de comprendre l'influence du matériau considéré :
  — au numérateur : λ rend compte de la capacité du matériau à conduire la chaleur ;
  — au dénominateur : $\rho c = \frac{mc}{V} = \frac{c}{V}$: capacité thermique volumique (rend compte de la capacité du matériau à absorber de la chaleur par unité de volume (= énergie qu'il faut apporter par unité de volume pour augmenter la température d'un kelvin).

> « Les différents corps ne possèdent point au même degré la faculté de *contenir* la chaleur, *de la recevoir, ou de la transmettre* à travers leur superficie, et de la conduire dans l'intérieur de la masse. Ce sont trois qualités spécifiques que notre théorie distingue clairement, et qu'elle apprend à mesurer. »
>
> J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*

Ordres de grandeurs :
— cuivre : $D_{\mathrm{Cu}} \simeq 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$;
— eau : $D_{\mathrm{eau}} \simeq 10^{-7}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$;
— air : $D_{\mathrm{air}} \simeq 20 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$;
— polystyrène : $D_{\mathrm{polystyrène}} \simeq 10^{-7}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$;
Rq : capacité thermique volumique : $(\rho c)_{\mathrm{eau}} \simeq 4200\,\mathrm{kJ \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}}$; $(\rho c)_{\mathrm{air}} \simeq 1{,}3\,\mathrm{kJ \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}}$;

Représentons un profil de température pouvant conduire à une augmentation de température :

▷

- En approchant les dérivées partielles par des accroissements finis, il est possible d'estimer le lien entre la longueur L caractéristique du problème et l'échelle de temps τ caractéristique du régime transitoire :

▷

La diffusion est un phénomène lent à grande distance :

$$\tau \sim \frac{L^2}{D} \tag{7}$$

Si on double la longueur de la barre, il faut quatre fois plus de temps pour que le régime s'établisse. Cette dissymétrie entre espace et temps est caractéristique des phénomènes diffusifs.

Ordre de grandeur : pour un solide de coefficient de diffusion $D \sim 10^4\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$ (tel que le cuivre) :
— si $L \sim 1\,\mathrm{cm}$, alors $\tau \sim 1\,\mathrm{s}$;
— si $L \sim 1\,\mathrm{m}$, $\tau \sim 3\,\mathrm{h}$.

3 Etude en régime permanent

3.1 Résistance thermique

On considère le même problème que celui de la section précédente.

En utilisant les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$, cherchons la solution $T(x)$ dans le cas du régime permanent :

▷

En régime permanent, le profil de température est linéaire. Déduisons de ce calcul le flux thermique à travers une section transversale de la barre orientée vers les x croissants :

▷

On constate que le flux thermique ne dépend pas de x, ce qui est cohérent avec le régime permanent. En effet, la quantité d'énergie interne contenue entre deux sections fixes d'abscisses x_1 et x_2 ne doit pas dépendre du temps. Le flux entrant par la section d'abscisse x_1 doit être égal au flux sortant par la section d'abscisse x_2.

Par analogie avec la loi d'OHM, on est amené à définir la *résistance thermique* du matériau :

Résistance thermique :

L'écart de température ΔT entre deux sections d'un matériau est proportionnel au flux thermique ϕ circulant dans le matériau :

$$\Delta T = R_{th}\phi \tag{8}$$

Le coefficient de proportionnalité R_{th}, appelé *résistance thermique*, dépend de la longueur L du matériau, de la surface S des sections considérées et de la conductivité thermique λ :

$$\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}} \tag{9}$$

Remarque : On notera que l'expression de la résistance thermique est la même que celle de la résistance électrique ($R = \frac{L}{\sigma S}$ avec σ la conductivité électrique du matériau).

3.2 Associations de résistances thermiques

La notion de résistance thermique étant définie par analogie avec l'électrocinétique, les lois d'association des résistances thermiques sont analogues à celles des résistances électriques.

Etablissons les lois d'association de résistances thermiques :

▷

3.3 Echange conducto-convectif en régime permanent : loi de Newton

3.3.1 Modèle de la couche limite

La *couche limite* d'épaisseur e présente à la surface d'un solide est le siège d'un important transfert thermique dès qu'il existe un gradient de température du fait de la faible épaisseur de cette couche. Le transfert thermique réalisé est d'orientation perpendiculaire à la paroi du solide (gradient transversal). On peut alors négliger les transferts thermiques dans le fluide en déplacement car le gradient de température y est nettement moins élevé. La couche limite est représentée sur le schéma de la figure 6 où les flèches représentent le champ des vitesses du fluide dans une situation d'écoulement laminaire.

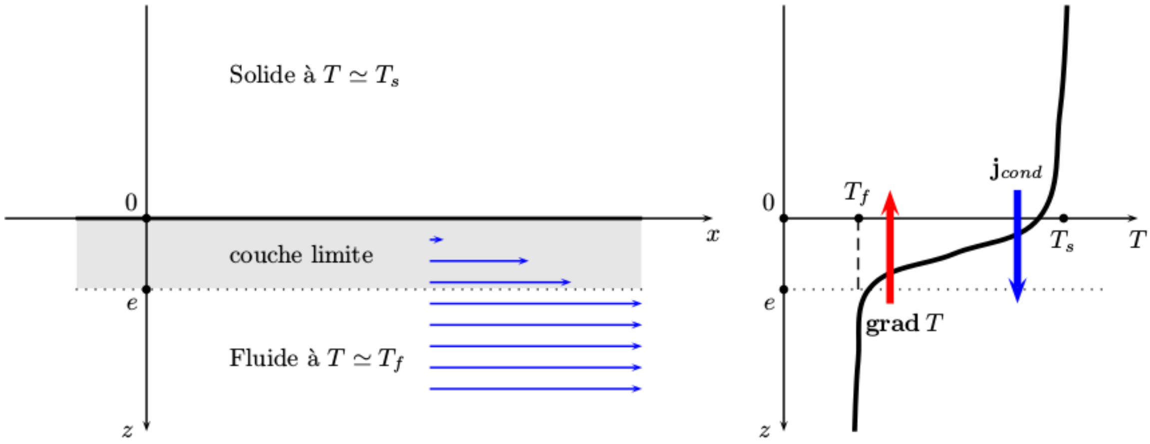

FIGURE 6 – Couche limite et gradient de température

3.3.2 Loi de Newton

L'approche simplifiée de la convection consiste à assimiler le gradient de température dans la couche limite au taux de variation :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{couche\ limite} \simeq \frac{T_f - T_s}{e} \tag{10}$$

Dans ces conditions, le vecteur densité de courant thermique $\mathbf{j}_{\text{cond}}$ dans la couche limite de fluide caractérisé par la conductivité thermique λ_f correspond au transfert thermique dû aux échanges conducto-convectif :

$$\mathbf{j}_{cc} = \mathbf{j}_{cc} = \lambda_f \frac{T_s - T_f}{e} \mathbf{e_z} \tag{11}$$

loi de Newton :

Le vecteur densité de courant thermique $\mathbf{j}_{cc}$ modélisant les échanges conducto-convectifs entre un milieu 1 de température T_1 et un milieu 2 de température T_2 est donné par la relation :

$$\mathbf{j}_{cc} = h(T_1 - T_2)\mathbf{n}_{1\to 2} \tag{12}$$

où h est appelé *coefficient conducto-convectif* et $\mathbf{n}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire normal à la surface à l'endroit considéré, orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

Remarques :

- L'énergie transférée par conduction à travers la couche limite et ensuite transportée par le fluide en mouvement au-delà de la couche limite.
- Le coefficient h est d'autant plus important que la convection est forte. La convection augmente donc le flux de chaleur pris à un objet : on perd plus de chaleur dans le vent que lorsqu'il n'y a pas de vent.
- Dans le cadre du programme, l'expression de la loi de NEWTON sera fournie dans l'énoncé. Il s'agit simplement de savoir l'exploiter pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.

3.3.3 Convection naturelle - convection forcée

Il existe deux cas de figure pour la convection : la convection naturelle et la convection forcée. Dans la convection naturelle, le fluide est mis en mouvement par l'effet d'un champ de force qui existe naturellement.

C'est typiquement le cas lorsqu'il s'agit du champ de pesanteur. Ce dernier est le moteur des mouvements du fluide qui se trouve placé en situation de déséquilibre mécanique du fait du transfert thermique. Prenons le cas d'un convecteur de chauffage dans une pièce qui est souvent improprement appelé *radiateur*. La température de l'air proche du radiateur chaud augmente. Cet air se trouve dans une situation de déséquilibre mécanique puisqu'il se trouve situé en dessous d'un air plus froid et donc plus dense. L'air chaud monte ...

Si cette mise en mouvement est jugée insuffisante, rien n'empêche d'utiliser un ventilateur pour provoquer artificiellement le mouvement du fluide. On parle alors de convection forcée. Si le fluide n'est pas un gaz mais un liquide, on utilise une pompe pour forcer sa circulation et donc pour forcer la convection. En convection forcée, on diminue l'épaisseur de la couche limite, ce qui explique les différences obervées dans les ordres de grandeur du coefficient conducto-convectif présentés dans le tableau suivant :

Type de transfert	Nature du fluide	coefficient conducto-convectif (en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$)
Convection naturelle	gaz liquide	1 à 10 10 à 100
Convection forcée	gaz liquide	10 à 100 100 à 1000