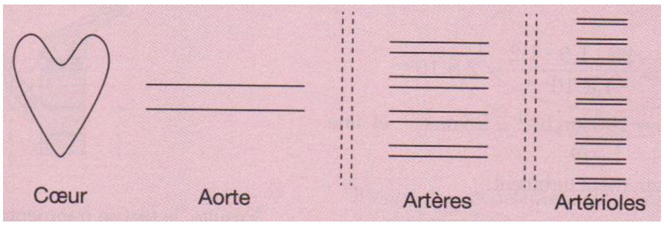
TD T4 : DESCRIPTION D'UN FLUIDE EN ECOULEMENT STATIONNAIRE DANS UNE CONDUITE

Exercice 1 : Ecoulement sanguin

A la sortie du cœur, l'aorte peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon a_0 = 1,0 cm. Le débit volumique est D_v = 6,0 $L.min^{-1}$ et on suppose que l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. La viscosité du sang est $\eta \approx 4.10^{-3}$ Pl et sa masse volumique est $\mu = 1,0.10^3$ $kg.m^{-3}$.

1) Quelle est la vitesse v du sang dans l'aorte ? On supposera que le champ des vitesses est uniforme sur une section droite.

Le sang est évacué du cœur d'abord au niveau de l'aorte, qui se divise ensuite en N_a artères de rayon a_a, puis en N_a' artérioles de rayon a_a' = 20 µm. Le débit volumique au travers d'une artère est $D_{v,a} = 2,0.10^{-6}$ $m^3.s^{-1}$.

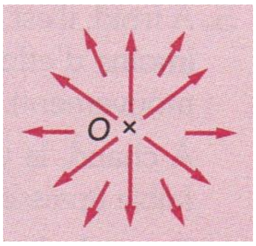


2) Calculer le nombre N_a d'artères.
3) Calculer le nombre N_a' d'artérioles sachant que la vitesse du sang dans une artériole est v_a' = 5,0 $mm.s^{-1}$.
4) L'écoulement est-il laminaire dans une artériole ?

Exercice 2 : Exemples d'écoulement

On s'intéresse ici à deux écoulements stationnaires.

<u>1er écoulement</u> : de l'eau, supposée incompressible, sort d'un tuyau en O (source) avec un débit volumique D_v constant. L'eau se répartit ensuite isotropiquement sur le sol sur une épaisseur e et s'éloigne radialement de O.

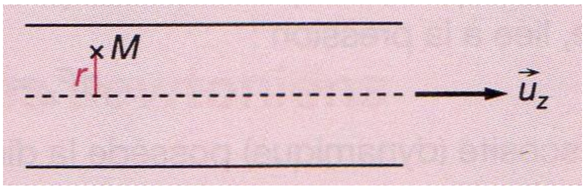


1) Tracer l'allure des lignes de courant. Faire de même avec quelques tubes de courant. Cet écoulement est-il rotationnel ?
2) Proposer une expression pour le champ de vitesse $\vec{v}$, en supposant que la norme de la vitesse ne dépend que de l'éloignement à l'axe Oz.
3) Le fluide modélisé ici est-il parfait ou visqueux ?

<u>2ème écoulement</u> : on considère cette fois-ci la modélisation d'un tourbillon gazeux, autour de l'axe Oz. La vitesse est supposée ne dépendre que de la distance à l'axe Oz, et les particules de fluide ont une trajectoire circulaire.
4) Tracer l'allure des lignes de courant. Faire de même avec quelques tubes de courant. Comment qualifier l'écoulement ?
5) Proposer une expression pour le champ de vitesse $\vec{v}$. On supposera que la circulation de la vitesse sur tout cercle C d'axe Oz est une constante K : $K = \oint_C \vec{v}.\vec{dl}$.

Exercice 3 : Profil des vitesses dans une conduite cylindrique

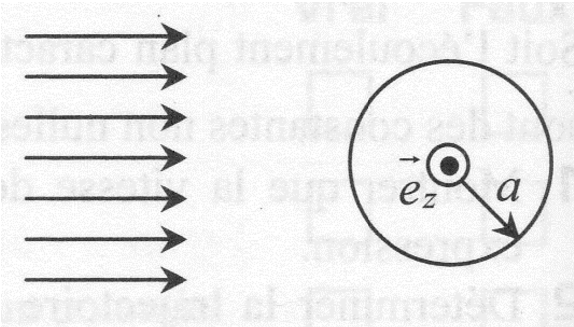
Dans une conduite cylindrique de rayon R, le profil des vitesses d'un fluide visqueux en écoulement lent est le suivant, en coordonnées cylindriques : $\vec{v} = v_0 \left(1 + \alpha \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u}_z$ avec α une constante.



1) Quelle est la valeur de α ?
2) Tracer l'allure de quelques vecteurs-vitesse dans une section droite de l'écoulement.
3) Même question en supposant le fluide parfait.

Exercice 4 : Ecoulement autour d'un obstacle cylindrique

On s'intéresse à l'écoulement plan d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre solide, de rayon a, de hauteur infinie et d'axe (Oz). Représenter schématiquement les lignes de courant d'un tel écoulement en indiquant les points remarquables. Préciser la condition que doit satisfaire la vitesse $\vec{v}$ du fluide sur les parois du cylindre.

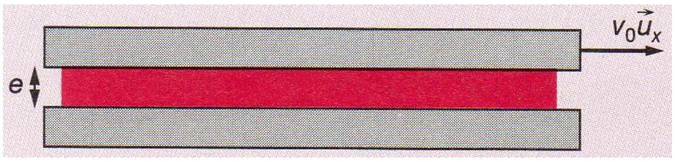


Exercice 5 : Trajectoires et lignes de courant

Soit un champ de vitesse $\vec{v} = a\,x\,\vec{e}_x + a\,y\,\vec{e}_y$.
1) Déterminer les équations des trajectoires.
2) Déterminer les équations des lignes de courant.
3) Conclure.

Exercice 6 : Modélisation d'une lubrification

Un fluide newtonien est réparti sur une hauteur e entre deux plaques horizontales très longues. La plaque du dessous est immobile et celle du dessus possède la vitesse constante v_0.



1) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement ?
2) En appliquant le théorème de la résultante cinétique projeté suivant (Ox) à une tranche de fluide d'épaisseur z située entre 0 et z (0 < z < e), justifier que le régime permanent amène à la relation : $\frac{dv}{dz} = c^{te}$. En déduire le profil de vitesses v(z) dans le fluide et tracer son allure dans la couche de fluide.
3) Quelle est la composante horizontale de la force exercée par le fluide, par unité de surface, sur la plaque supérieure ?

Un bloc métallique parallélépipédique, de surface carrée de côté a = 10 cm et de masse m = 1,0 kg, est posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l'horizontale. Le plan incliné est lubrifié, c'est-à-dire enduit d'une huile de viscosité dynamique η. La plaque se met alors en mouvement. On suppose que l'écoulement de l'huile peut être modélisé de la même manière qu'en régime permanent, avec une épaisseur e = 1,0 mm d'huile. Le champ de pesanteur est noté g = 9,8 m.s^{-2}.

4) En déduire l'équation du mouvement du bloc.
5) Après un certain temps, la vitesse du bloc se stabilise à la valeur v_f = 0,50 m.s^{-1}. En déduire la viscosité η de l'huile.
6) Quelle est la durée du régime transitoire ?

Exercice 7 : Chute d'un grêlon

Un grêlon sphérique de masse m, de rayon r = 3 mm et de masse volumique $\rho_{glace} = 0{,}9.10^3$ kg.m^{-3}, tombe verticalement, l'espace étant rapporté à l'axe (Oz) vertical ascendant. Le champ de pesanteur est uniforme g = 9,8 m.s^{-2} dirigée suivant la verticale descendante, l'air a une viscosité $\eta = 2.10^{-5}$ Pl.
1) L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M = 29 g.mol^{-1}, de pression P = 1,0 bar et de température T = 273 K. Calculer sa masse volumique ρ_{air}. Que dire alors de la poussée d'Archimède s'exerçant sur le grêlon en comparaison de son propre poids ?
2) a) On cherche la vitesse atteinte par le grêlon en régime permanent. On se place dans le cadre d'une hypothèse de « vitesses faibles » où l'écoulement est laminaire. La force de traînée vérifie la formule de Stokes : $\vec{F} = 6\pi\eta r v \vec{e}_z$. Déterminer la vitesse limite dans le cadre de cette modélisation.
b) Calculer le nombre de Reynolds en prenant pour dimension caractéristique de l'écoulement le diamètre du grêlon 2r. Que dire alors de l'hypothèse d'écoulement laminaire ?
c) Dans le cadre d'une hypothèse de « grandes vitesses » où l'écoulement est turbulent, la force de traînée est quadratique en vitesse : $\vec{F} = K\rho_{air} S v^2 \vec{e}_z$ avec $S = \pi r^2$ et K = 0,23. Déterminer la vitesse limite dans le cadre de ce modèle. Calculer le nombre de Reynolds, commenter.
3) Dans le cas de vitesses faibles, exprimer le nombre de Reynolds Re en fonction de ρ_{air}, ρ_{glace}, η, g et r. En déduire l'ordre de grandeur du rayon maximal r_{max} du grêlon pour que la formule de Stokes soit valable. On pourra prendre pour critère un Re inférieur à 1. Commenter.
4) Dans le cas de vitesses grandes, exprimer de même le nombre de Reynolds Re en fonction de ρ_{air}, ρ_{glace}, η, K, g et r. En déduire l'ordre de grandeur du rayon minimal r_{min} du grêlon pour que cette hypothèse soit valable. On pourra prendre pour critère un Re supérieur à 2000. Commenter.