



Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

Chapitre 2 : Description d'un fluide en écoulement

Sommaire

	Page
1 Description d'un écoulement	1
1.1 Descriptions lagrangienne et eulérienne	1
1.1.1 Description lagrangienne	1
1.1.2 Description eulérienne	2
1.2 Ligne et tube de courant	2
1.3 Débits, flux et densité de courant	3
1.3.1 Débit volumique	3
1.3.2 Débit massique - Densité de courant	4
1.3.3 Généralisation : tout débit est le flux d'une densité de courant	4
1.4 Caractéristiques d'un écoulement	4
1.4.1 Écoulement stationnaire (ou permanent)	4
1.4.2 Écoulement incompressible	5
1.4.3 Écoulement irrotationnel	6
2 Le phénomène de viscosité	7
2.1 Force de viscosité	7
2.2 Origine microscopique de la viscosité	8
2.3 Conditions aux limites	8

1 Description d'un écoulement

1.1 Descriptions lagrangienne et eulérienne

Deux points de vue sont possibles pour décrire l'écoulement d'un fluide. Si l'on regarde couler une rivière :

- un observateur peut suivre des yeux une feuille à la surface de l'eau (point de vue lagrangien)
- un observateur peut aussi regarder fixement une zone de la rivière et voir passer la feuille quand elle traverse son champ de vue (point de vue eulérien)

Dans les deux cas, on décrit le fluide à l'échelle mésoscopique.

1.1.1 Description lagrangienne

- le fluide est découpé en particules de fluides, chacune étant par définition un système fermé, c'est-à-dire un système de masse constante.
- ces particules de fluides sont mobiles. L'ensemble des points occupés par une particule constitue la trajectoire de cette particule.
- L'écoulement est connu lorsque l'on connaît la position $R(t)$ et la vitesse $V(t)$ de chaque particule de fluide.

▷

Cette description est très intuitive car elle correspond au point de vue adoptée en mécanique du point : l'ensemble des forces appliquées à une particule de fluide permet de prévoir son mouvement.

1.1.2 Description eulérienne

- On découpe le fluide en volumes élémentaires **immobiles**, chacun constituant un système ouvert. Etant immobiles, leurs positions $\mathbf{r}(x, y, z)$ ne dépendent donc pas du temps.
- On associe un observateur à chacun de ces volumes, qui repère la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ des particules passant par ce volume élémentaire au cours du temps.
- L'écoulement est connu lorsque l'on connaît le **champ de vitesse** $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

▷

1.2 Ligne et tube de courant

Ligne de courant :

Définie à un instant t donné, c'est la courbe tangente en chacun de ses points au champ des vitesses.

La ligne de courant est définie à partir du champ de vitesses. D'une manière générale, on parle de **ligne de champ**, concept que l'on rencontrera notamment en électromagnétisme afin de caractériser les champs électriques et magnétiques.

En pratique, on pourra retenir la méthode suivante :

Détermination de l'équation des lignes de courant :

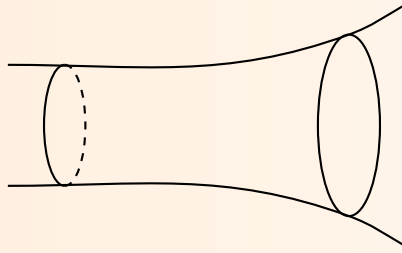
Les équations des lignes de courant peuvent se déterminer en remarquant qu'un déplacement élémentaire $d\mathbf{l}$ le long d'une ligne de courant doit être tel que :

$$\mathbf{v} \wedge d\mathbf{l} = \mathbf{0}$$

Le concept de ligne de courant est associée à une description eulérienne et ne doit pas être confondue avec la notion de trajectoire : dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que trajectoire et ligne de courant puissent s'identifier. Ce n'est vrai que dans le cas d'un écoulement stationnaire.

Tube de courant :

Un tube de courant est une surface formée par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



1.3 Débits, flux et densité de courant

1.3.1 Débit volumique

Définition du débit volumique :

Le **débit volumique** D_V à travers une surface orientée $\mathbf{S}$ est le volume δV de fluide qui traverse cette surface par unité de temps :

$$D_V = \frac{\delta V}{dt} \quad (1)$$

Le débit volumique est une grandeur algébrique, son signe indiquant le sens réel d'écoulement. Le débit volumique s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Remarque : Lorsque le sens de l'écoulement est connu, il est préférable de travailler avec des débits de volume définis positifs (donc d'orienter les surfaces dans le sens de l'écoulement).

Exprimons le débit volumique à partir du champ de vitesse $\mathbf{v}$:

▷

Expression du débit volumique D_V en fonction du champ de vitesse $\mathbf{v}$:

Le débit volumique D_V à travers une surface orientée $\mathbf{S}$ est le flux du champ de vitesse $\mathbf{v}$ à travers cette surface :

$$D_V = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

1.3.2 Débit massique - Densité de courant

Définition du débit massique :

Le **débit massique** D_m à travers une surface orientée $\mathbf{S}$ est la masse δm de fluide qui traverse cette surface par unité de temps :

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} \quad (3)$$

Le débit massique est une grandeur algébrique, son signe indiquant le sens réel d'écoulement. Le débit massique s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$

Exprimons le débit massique à partir du champ de vitesse $\mathbf{v}$:

▷

Débit massique D_m et densité de courant $\mathbf{j}$:

Le débit volumique D_m à travers une surface orientée $\mathbf{S}$ est le flux du vecteur densité de courant $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ à travers cette surface :

$$D_m = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

Remarque : Dans le cas d'un fluide incompressible, débits massique et volumique sont directement reliés :

▷

1.3.3 Généralisation : tout débit est le flux d'une densité de courant

Remarque : En physique, un débit D peut toujours être écrit comme étant le flux d'un certain vecteur, appelé **densité de courant** et noté $\mathbf{j}$:

$$D = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

avec le vecteur densité de courant $\mathbf{j}$ relié au champ de vitesse $\mathbf{v}$ et à la densité ρ de la grandeur relative au débit par la relation $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. Par exemple, le débit de charge, c'est-à-dire l'intensité du courant électrique, est égal au flux du vecteur densité de courant $\mathbf{j}$:

▷

1.4 Caractéristiques d'un écoulement

1.4.1 Ecoulement stationnaire (ou permanent)

Définition d'un écoulement stationnaire :

Un écoulement est dit stationnaire si les grandeurs intensives associées à un point donné ou les grandeurs extensives associées à un système ouvert donné sont constantes au cours du temps.

1.4.2 Écoulement incompressible

Définition d'un écoulement incompressible :

Un écoulement est incompressible si le volume d'une particule de fluide est constant au cours de son mouvement. Son champ de vitesse est tel que :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

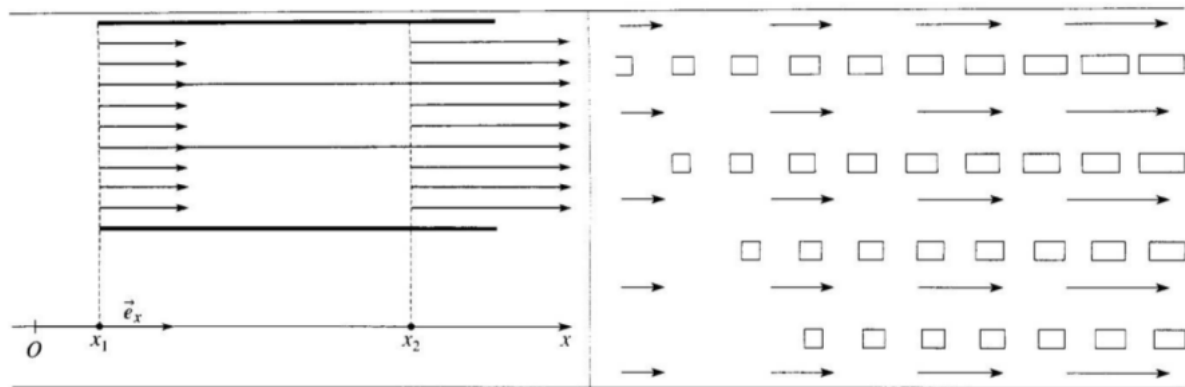
Remarque : Il ne faut pas confondre « fluide incompressible » et « écoulement incompressible » :

- **Fluide incompressible :** son volume ne varie pas sous l'effet de la pression (ρ uniforme dans un fluide monophasé). Cette modélisation généralement adaptée aux liquides.
- **Écoulement incompressible :** l'écoulement est « suffisamment lent » pour que le fluide ne soit pas comprimé. Le champ ρ n'est pas nécessairement uniforme mais la masse volumique d'une particule de fluide ne varie pas au cours de son mouvement. Cette modélisation est plus générale, car elle est aussi adaptée aux gaz dont la vitesse d'écoulement est faible. En pratique, le critère permettant de pouvoir considérer un écoulement incompressible est que la vitesse d'écoulement du gaz doit être très faible devant la célérité du son dans le gaz. Par exemple, la vitesse du son dans l'air étant d'environ $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, l'écoulement d'air autour d'un train, d'une voiture ou d'un avion pourra être considéré comme incompressible.

Le lien entre la compressibilité d'un écoulement et la divergence du champ de vitesse vient du fait que $\nabla \cdot \mathbf{v}$ est une mesure de l'accroissement relatif de volume d'une particule de fluide, par unité de temps. Pour illustrer ce point, considérons par exemple un écoulement simple dans une tuyère modélisé par le champ de vitesse :

$$\mathbf{v} = v_0 \left(1 + \frac{x}{L} \right) \mathbf{e}_x \quad (8)$$

et visualisons la dilatation des particules de fluides au cours du mouvement :



Doc. 2a. Simulation d'un écoulement dans une tuyère.

Doc. 2b. Visualisation de la dilatation d'une cellule.

Vérifions que la divergence d'un tel écoulement est bien non nulle :

▷

1.4.3 Écoulement irrotationnel

Définition d'un écoulement irrotationnel :

Un écoulement est irrotationnel si :

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Le rotationnel du champ de vitesse étant nul, sa circulation est conservative (d'après le théorème de Stokes-Ampère). Il existe donc un champ scalaire φ , appelé potentiel des vitesses, tel que :

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi \quad (10)$$

Un écoulement irrotationnel est donc aussi appelé *écoulement potentiel*. Par opposition, un écoulement rotationnel est un *écoulement tourbillonnaire*. Le *vecteur tourbillon* est défini par :

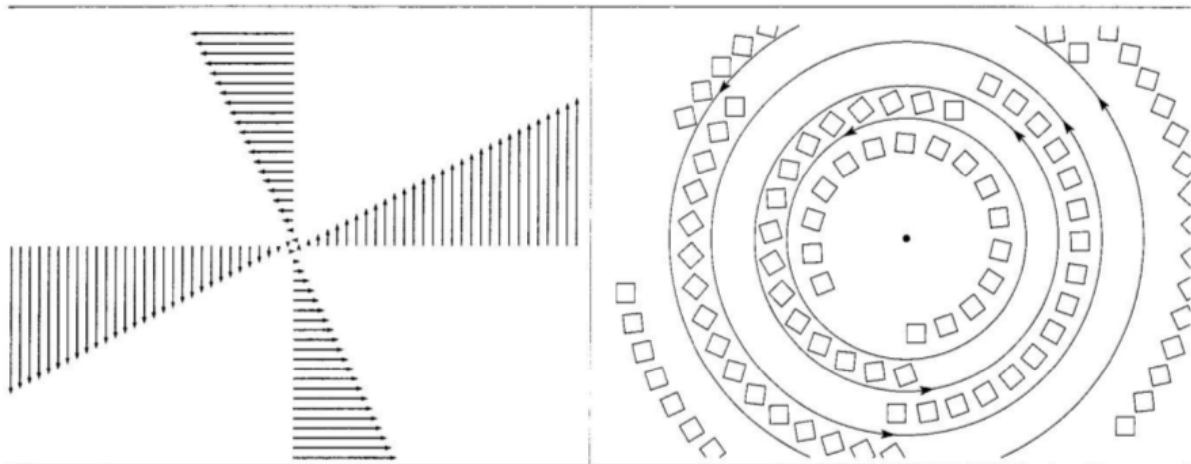
$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{v} \quad (11)$$

Dans des cas d'écoulements très simples, on peut faire l'analogie avec le vecteur rotation instantané de la mécanique du solide.

Par exemple, l'écoulement dans l'œil d'une tornade peut être modélisé simplement par le champ des vitesses

$$\mathbf{v} = A r \mathbf{e}_\theta \quad (12)$$

représenté ci-dessous :



Doc. 3a. Visualisation du champ des vitesses d'un écoulement dans l'œil d'une tornade.

Doc. 3b. Mise en évidence des transformations d'une cellule lors de cet écoulement. La cellule « tourne » sans déformation.

Vérifions que le rotationnel du champ de vitesse d'un tel écoulement est bien non nul :

▷

Vérifions que les particules de fluides tournent bien sans déformation :

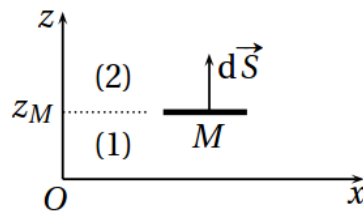
▷

2 Le phénomène de viscosité

2.1 Force de viscosité

On considère un fluide réel, dans un écoulement unidimensionnel dont le champ des vitesses est de la forme :

$$\mathbf{v}(M, t) = v(z, t)\mathbf{e}_x \quad (13)$$



Les actions de contact exercées par le fluide de la couche (2) sur le fluide de la couche (1) à travers la surface dS se décomposent en une composante normale et une composante tangentielle :

$$d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = d\mathbf{F}_{n, 2 \rightarrow 1} + d\mathbf{F}_{t, 2 \rightarrow 1} \quad (14)$$

Comme en hydrostatique, la composante normale définit la pression :

$$d\mathbf{F}_{n, 2 \rightarrow 1} = -P(M, t)d\mathbf{S} \quad (15)$$

Force de viscosité :

La composante tangentielle $d\mathbf{F}_{t, 2 \rightarrow 1}$ de la force de contact est appelée **force de viscosité** ou **force de cisaillement**. On définit un type de fluide particulier, le **fluide newtonien**, pour lequel la force de viscosité est donnée par la relation :

$$d\mathbf{F}_{t, 2 \rightarrow 1} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z_M} dS \mathbf{e}_x \quad (16)$$

où η est le *coefficient de viscosité*, ou *viscosité dynamique du fluide*. Son unité est le poiseuille (symbole : PI).

Remarques :

- Le fluide de la couche (1) exerce sur le fluide de la couche (2) la force de viscosité opposée :

$$d\mathbf{F}_{t, 1 \rightarrow 2} = -d\mathbf{F}_{t, 2 \rightarrow 1} \quad (17)$$

- Ordres de grandeurs : $\eta_{air} \sim 10^{-5} \text{ PI}$; $\eta_{eau} \sim 10^{-3} \text{ PI}$; $\eta_{glycerine} \sim 1 \text{ PI}$.
- Les expressions de $d\mathbf{F}_{n, 2 \rightarrow 1}$ et $d\mathbf{F}_{t, 2 \rightarrow 1}$ traduisent aussi la force exercée par le fluide sur une surface $d\mathbf{S}$ de paroi.

2.2 Origine microscopique de la viscosité

L'effet des forces de viscosité est caractéristique d'un phénomène diffusif :

- la force de viscosité est nulle si le champ des vitesses est uniforme ;
- si le champ des vitesses n'est pas uniforme, les forces visqueuses tendent à le rendre uniforme : les particules de fluide accélèrent les particules de fluide voisines plus lentes et sont ralenties par les particules de fluides voisines plus rapides ;
- le transfert de quantité de mouvement se fait perpendiculairement aux lignes de courant de l'écoulement, sans transport macroscopique de matière dans cette direction.

2.3 Conditions aux limites

Même en l'absence de viscosité, un fluide en contact avec une paroi vérifie la condition de non-pénétration :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (18)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la paroi.

Si une ligne de courant est normale à la surface, la vitesse sur cette ligne s'annule à la surface : on parle de **point d'arrêt**.

Dans le cas d'un fluide visqueux, la force de viscosité s'exprime en fonction de dérivées spatiales, et ne peut être infinie. Cela implique que la vitesse doit varier continûment dans un fluide :

- la vitesse du fluide est nulle le long d'une paroi immobile : le fluide « colle » à la paroi ;
- la contrainte de cisaillement est nulle à la surface libre d'un liquide : la viscosité due à l'air est sensiblement nulle.