PT 2017-2018 DS6

PREMIER PROBLEME : Microscope électronique à balayage (d'après banque PT 2017)

1- Aspect électrique :

1-1) * $U = V_1 - V_2 > 0 \Rightarrow V_1 > V_2$

* $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow \vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, donc de l'armature 1 vers l'armature 2

* $\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}$ donc $\vec{F}$ dirigée de 2 vers 1

$\Rightarrow$ les $\bar{e}$ doivent être émis sur l'armature 2

1-2) équation de Poisson : $\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$

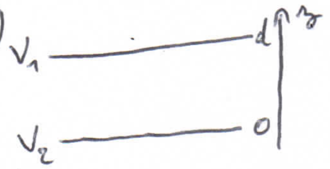
Ça découle de l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ (car $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\text{permanent}} = \vec{0}$ équation de Maxwell-Faraday)

$\Rightarrow \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}\, V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ CQFD

Dans le vide : $\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta V = 0}$ (équation de Laplace)

1-3)



$$\Delta V = \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}}_{\text{unidimensionnel}} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

$\Rightarrow V(z) = Az + B$

conditions aux limites (continuité du potentiel) :

$V(0) = V_2$ et $V(d) = V_1$

$$\Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{V_1 - V_2}{d} z + V_2}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \underbrace{-\cancel{\frac{\partial V}{\partial x}}\vec{u}_x - \cancel{\frac{\partial V}{\partial y}}\vec{u}_y}_{\text{unidimensionnel}} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z = -\frac{V_1 - V_2}{d}\vec{u}_z$$

$\boxed{\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{u}_z}$ $\propto -\vec{u}_z$ OK dans le sens des potentiels décroissants

1-4-1) * système : un $\bar{e}$

* référentiel : terrestre supposé galiléen
* actions : → force électrique : $\vec{F} = -e\vec{E}$
  → poids : négligé
  → interactions entre $\bar{e}$: négligées

$$\Rightarrow m\vec{a} = -e\vec{E} = \frac{eU}{d}\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{eU}{md}\vec{u}_z$$

$$\vec{a}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{eU}{md} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}\begin{vmatrix} c^{te} \\ c^{te} \\ \frac{eU}{md}t + c^{te} \end{vmatrix} \overset{\vec{v}(t=0)=\vec{0}}{=} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{eU}{md}t \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} c^{te} \\ c^{te} \\ \frac{eU}{2md}t^2 + c^{te} \end{vmatrix} \underset{\text{conditions initiales}}{=} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{eU}{2md}t^2 \end{vmatrix}$$

$z = \frac{eU}{2md}t^2 = d$ si $t_1 = d\sqrt{\frac{2m}{eU}}$

et alors $v = \frac{eU}{md}t_1 = \frac{eU}{md} d\sqrt{\frac{2m}{eU}}$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$$

Autre méthode : thm de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{\vec{F}} = \int_2^1 \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_2^1 -e\vec{E}\cdot d\vec{l} = -e\left(-\frac{U}{d}\right)\int_2^1 \underbrace{\vec{u}_z \cdot d\vec{l}}_{dz}$$

$$= \frac{eU}{d}d = eU$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$$

$$v = \sqrt{2 \times 2.10^{11} \times 10^5} \Rightarrow \boxed{v = 2.10^8 \, m.s^{-1}}$$

$$v = 2.10^8 \, m.s^{-1} \cancel{\ll} \; c = 3.10^8 \, m.s^{-1}$$

$\Rightarrow$ la mécanique classique n'est pas utilisable, il faut utiliser la mécanique relativiste.

1-4-2) $p = mv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{relation de de Broglie}}}{=} \frac{h}{\lambda}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}$$

$$\lambda = \frac{7.10^{-4}}{2.10^8} \simeq 4.10^{-12} \, m \qquad \boxed{\lambda \simeq 4 \, pm}$$

1-5-1) thm de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W_{\vec{F}}$

$$\Delta E_c = \left((\gamma - 1) mc^2\right)_{final} - \left((\gamma-1)mc^2\right)_{initial}$$

$$\gamma_{final} = \gamma \qquad \text{et } \gamma_{initial} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 \quad (v = 0)$$

$$\Rightarrow \Delta E_c = (\gamma - 1) mc^2 = W_{\vec{F}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cf 1-4-1)}}}{=} eU$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 1 + \frac{eU}{mc^2}}$$

relation de de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$ or $p = \gamma m v$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{\gamma m v}$$

$$\text{or } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{mc\sqrt{\gamma^2 - 1}}}$$

1-5-2) $\gamma = 1 + \frac{eU}{mc^2} = 1 + 2.10^{11} \frac{10^5}{(3.10^8)^2}$

$$\gamma = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9} \Rightarrow \boxed{\gamma \simeq 1{,}2}$$

$$\lambda = \frac{h}{mc\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{7.10^{-4}}{3.10^8 \sqrt{\left(\frac{11}{9}\right)^2 - 1}} = \frac{7}{3 \times 0{,}7} 10^{-12}$$

$$= \frac{10}{3} . 10^{-12} = 3.10^{-12} \, m$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \simeq 3 \, pm}$$

1-5-3) * λ varie très peu entre les 2 modèles

$$\left(\frac{7}{2} = 3{,}5 \; / \; \frac{10}{3} = 3{,}3\right)$$

* Avantage du microscope électronique / microscope optique :

$$\lambda_{e^-} \simeq 3 \, pm \ll \lambda_{photon} \simeq 500 \, nm$$

$\Rightarrow$ la résolution sera bien meilleure car on sera beaucoup moins limité par la diffraction.

$\Rightarrow$ on pourra observer des objets de taille bien plus faible.

PT 2017-2018 DS6

PREMIER PROBLEME : Microscope électronique à balayage (d'après banque PT 2017)

2 - Déflecteur magnétique :

2-1) force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = -e\vec{v}\wedge\vec{B}$

puissance : $\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v} = (\underbrace{q\vec{v}\wedge\vec{B}}_{\perp\vec{v}}).\vec{v} = 0$

donc la force de Lorentz ne travaille pas.

système : m $\bar{e}$

référentiel : terrestre supposé galiléen

actions : → force de Lorentz

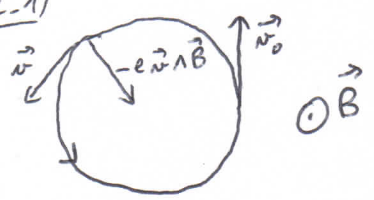
→ poids négligé

théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W$

or $W = 0 \Rightarrow \Delta E_c = 0 \Rightarrow v = c^{te} = v_0$

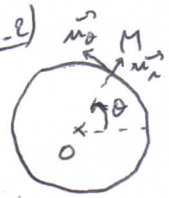
⇒ <u>mouvement uniforme</u>

2-2-1)



$-e\vec{v}\wedge\vec{B}$ est centripète, d'où le sens de $\vec{B}$

2-2-2)



$\vec{OM} = R\vec{u_r}$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$

$v = R\dot{\theta} = c^{te}$

$\Rightarrow \vec{a} = \dfrac{-v^2}{R}\vec{u_r}$

RFD : $m\vec{a} = -e\vec{v}\wedge\vec{B}$

$\Rightarrow -\dfrac{mv^2}{R}\vec{u_r} = -evB\vec{u_r}$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{eB}}$$

2-3) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \gamma m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = c^{te}$ car $v = c^{te}$ (uniforme)

$= -e\vec{v}\wedge\vec{B}$

⇒ il suffit de remplacer m par γm

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{\gamma m v}{eB}}$$

PT 2017 - 2018 DS6

PREMIER PROBLEME : Microscope électronique à balayage (d'après banque PT 2017)

3 - Lentille magnétique :

3-1) * le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur, donc $\vec{B}(M) \in$ à ce plan

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B_r \vec{u_r} + \cancel{B_\theta} \vec{u_\theta} + B_z \vec{u_z}$$

* on a invariance de la distribution de courant par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow \|\vec{B}\| (r, \cancel{\theta}, z)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B_r(r,z)\vec{u_r} + B_z(r,z)\vec{u_z}}$$

3-2) $\vec{B}$ est le plus intense là où les lignes de champ sont les plus resserrées, à savoir à l'intérieur de la bobine (propriété issue de la conservation du flux du champ magnétique).

3-3) système : e^- référentiel : terrestre supposé galiléen

actions : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\vec{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta} + \ddot{z}\vec{u_z}$$

or $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{r}\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right)$

$$= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \begin{vmatrix} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -e \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -er\dot{\theta}B_z \\ -e\dot{z}B_r + e\dot{r}B_z \\ er\dot{\theta}B_r \end{vmatrix}$$

RFD : $m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{e}{m} r \frac{d\theta}{dt} B_z \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{e}{m}\left(\frac{dr}{dt}B_z - \frac{dz}{dt}B_r\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m} r \frac{d\theta}{dt} B_r \end{cases}}$$

3-4) $$\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{e^2}{4m^2v_0^2} r_0 B_z^2$$

on intègre entre $-z_0$ et z_0 :

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z_0} - \left(\frac{dr}{dz}\right)_{-z_0} = -\frac{e^2}{4m^2v_0^2} r_0 \underbrace{\int_{-z_0}^{z_0} B_z^2 \, dz}_{I}$$

$$\Rightarrow -\frac{r_0}{\overline{OA'}} + \frac{r_0}{\overline{OA}} = -\frac{e^2}{4m^2v_0^2} r_0 I$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{e^2 I}{4m^2v_0^2} = \frac{1}{f'}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f' = \frac{4m^2v_0^2}{e^2 I}}$$

3-5) $m = c^{te}$; $e = c^{te}$; U fixée $\Rightarrow v_0$ fixée

$\Rightarrow$ il faut agir sur I, donc sur B_z, donc sur i

$\Rightarrow$ il faut agir sur l'intensité du courant i dans la bobine (on peut aussi agir sur la forme et le nombre de spires).

PT 2017-2018 DS6

DEUXIEME PROBLEME : Lévitation magnétique (d'après banque PT 2010)

I) Interaction entre deux spires :

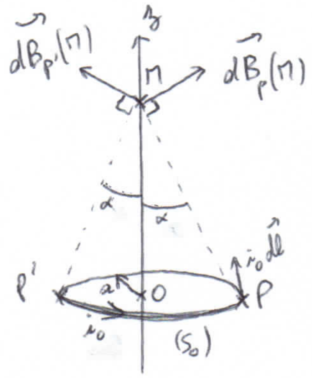
1-1) Soit $M \in (Oz)$.

Tous les plans contenant l'axe (Oz) (et donc M) sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

Or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow \vec{B}(M) \in$ à tous ces plans, donc à leur intersection

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B\,\vec{e_z}} \quad \text{en } M \in (Oz)$$

1-2)



* loi de Biot et Savart : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 i_0}{4\pi} \displaystyle\oint_{(S_0)} \dfrac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$

* Rq : $\vec{dB_P}(M) = \dfrac{\mu_0 i_0}{4\pi}\dfrac{\vec{dl}\wedge\vec{PM}}{PM^3}$ = champ créé en M par l'élément de longueur $\vec{dl}$ autour de P.

On a $\vec{dB_P}(M) + \vec{dB_{P'}}(M) \propto \vec{e_z}$ avec P' symétrique de P par rapport à O.

$\Rightarrow$ on retrouve bien que $\vec{B}(M) \propto \vec{e_z}$

* or $PM = \sqrt{a^2+z^2} = c^{te}$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}} \oint_{(S_0)} \vec{dl}\wedge\vec{PM}$$

* or $\vec{B} = B_z\,\vec{e_z}$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}} \left(\oint_{(S_0)} \vec{dl}\wedge\vec{PM}\right)\cdot\vec{e_z}$$

or $\vec{e_z}$ est un vecteur constant

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}} \oint_{(S_0)} \left((\vec{dl}\wedge\vec{PM})\cdot\vec{e_z}\right)$$

$$* \ (\vec{dl}\wedge\vec{PM})\cdot\vec{e_z} \underset{\text{permutation circulaire}}{=} (\vec{PM}\wedge\vec{e_z})\cdot\vec{dl} = \left(PM \sin\alpha \frac{\vec{dl}}{dl}\right)\cdot\vec{dl}$$

$$= PM\sin\alpha\, dl = PM\frac{a}{PM}\,dl = a\,dl$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}} \oint_{(S_0)} a\,dl = \frac{\mu_0 a i_0}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}} \underbrace{\oint_{(S_0)} dl}_{2\pi a}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 a^2 I_0 \cos\omega t}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I_0 \cos\omega t}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{e_z}}$$

en C : $z = a \Rightarrow \vec{B}(C) = \dfrac{\mu_0 a^2 I_0 \cos\omega t}{2\,(2a^2)^{3/2}}\,\vec{e_z}$

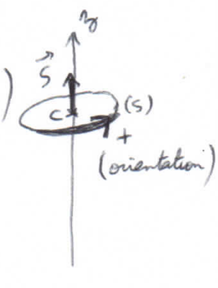
$$\vec{B}(C) = \frac{\mu_0 I_0}{4\sqrt{2}\,a}\cos\omega t\,\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(C) = B_0\cos\omega t\,\vec{e_z}} \quad \text{avec } \boxed{B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{4\sqrt{2}\,a}}$$

2) Détermination du courant dans la bobine (S) :

2-1) * C'est le phénomène d'induction qui est responsable de la présence de $i(t)$ dans (S) : il s'agit de l'induction de Neumann (spire (S) = conducteur fixe placé dans un champ magnétique variable dans le temps $\Rightarrow$ fem induite $\Rightarrow$ courant induit car (S) est fermée).

* loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$



or $\phi_{1\,spire} = \vec{B}(C)\cdot\vec{S}$ ($\vec{B}$ supposé uniforme)

$\underset{\text{orientation spire (S)}}{=} + B(C)\,S$

$= + B(C)\,\pi b^2$

or la bobine comporte N spires $\Rightarrow \phi = N \phi_{1\,spire}$

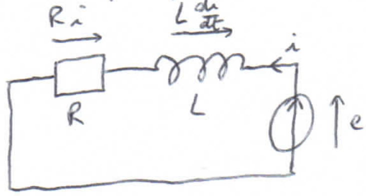
$$\Rightarrow \phi = N\pi b^2 B_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -N\pi b^2 B_0 \omega \sin \omega t$$

$$\Rightarrow e = -\frac{d\phi}{dt} = +N\pi b^2 B_0 \omega \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{e = E_0 \sin \omega t} \quad \text{avec} \quad \boxed{E_0 = N\pi b^2 \omega B_0}$$

2-2) schéma électrique équivalent pour la spire (S) :



loi des mailles : $e = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{Ri + L\frac{di}{dt} = E_0 \sin\omega t}$$

2-3) * $i(t) = I \sin(\omega t - \varphi) = I\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \underline{i} = I e^{j\omega t} e^{-j\varphi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

* $\sin\omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow R\underline{i} + L\frac{d\underline{i}}{dt} = E_0 e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow (R + jL\omega)\underline{i} = (R+jL\omega) I e^{j\omega t} e^{-j\varphi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$
$$= E_0 e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow (R + jL\omega) I e^{-j\varphi} = E_0$$

$$\Rightarrow I e^{-j\varphi} = \frac{E_0}{R+jL\omega}$$

$$\Rightarrow I = \left|\frac{E_0}{R+jL\omega}\right| \Rightarrow \boxed{I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}}$$

et $-\varphi = \arg \dfrac{E_0}{R+jL\omega} = -\operatorname{Arctan}\dfrac{L\omega}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \operatorname{Arctan}\frac{L\omega}{R}}$$

2-4) $\boxed{I = 2.10^{-2}\ A}$ $\boxed{\varphi = 84°}$

rajout d'un chiffre significatif par rapport aux données !

3) Première détermination de la force :

3-1) C'est une force de Laplace : la bobine (S) est un conducteur parcouru par un courant i placé dans un champ magnétique (créé par (S_0)).

3-2) $\vec{dF_L} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F_L} = \oint_{(S)} \left(i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}\right)$

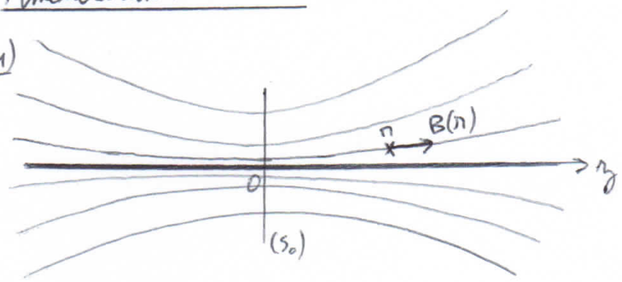
$$= i\underbrace{\left(\oint \vec{dl}\right)}_{\vec{0}} \wedge \vec{B}$$

$\vec{B}$ supposé uniforme

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_L} = \vec{0}}$$

4) Amélioration du modèle :

4-1)



* L'axe (Oz) est une ligne de champ car sur cet axe, $\vec{B} \propto \vec{e_z}$ (cf 1-1)
* Le plan contenant la spire est plan de symétrie de la distribution de courant, or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow$ sur ce plan, $\vec{B} \perp$ à ce plan
* Plus on est proche de la spire, plus $\|\vec{B}\|$ est grand, et donc, plus les lignes de champ sont "serrées".

4-2) Le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow \vec{B}(M) \in$ à ce plan $\Rightarrow \boxed{B_\theta = 0}$

4-3) Si M est au voisinage de l'axe (Oz), alors la ligne de champ passant par M est très peu inclinée par rapport à (Oz) $\Rightarrow \vec{B}(M)$ est quasiment porté par $\vec{e_z} \Rightarrow$ on peut assimiler la composante axiale $B_z(M)$ à $B(z)$ déterminée en 1-2.

4.4) Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul :

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0} \quad \forall S$$

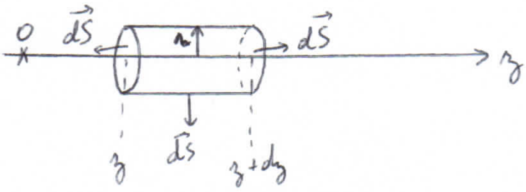
$$\underset{\text{thm d'Ostrogradski}}{=} \iiint_V \operatorname{div}\vec{B}\, d\tau = 0 \quad \forall V$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

(équation de Maxwell-flux ou Maxwell-Thomson)

4.5)



$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0 = \iint_{\text{base en } z} \vec{B}\cdot\vec{dS} + \iint_{\text{base en } z+dz} \vec{B}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_{\text{latérale}}} \vec{B}\cdot\vec{dS}$$

* base en z : $\vec{dS} = -dS\,\vec{u_z}$
* base en $z+dz$: $\vec{dS} = +dS\,\vec{u_z}$
* surface latérale : $\vec{dS} = +dS\,\vec{u_r}$

$$\Rightarrow 0 = \iint_{\text{base en } z} \left(B_r\vec{u_r} + B(z)\vec{u_z}\right)\left(-dS\,\vec{u_z}\right)$$

$$+ \iint_{\text{base en } z+dz} \left(B_r\vec{u_r} + B(z+dz)\vec{u_z}\right) dS\,\vec{u_z}$$

$$+ \iint_{S_{\text{lat}}} \left(B_r\vec{u_r} + B_z\vec{u_z}\right) dS\,\vec{u_r}$$

$$\Rightarrow 0 = B(z)\left(-\pi r^2\right) + B(z+dz)\,\pi r^2 + B_r\, 2\pi r\, dz$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(B(z+dz) - B(z)\right)}_{dB(z)} r + 2B_r dz = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_r(M) = -\frac{r}{2}\frac{dB(z)}{dz}}$$

4.6) $B(z) = \dfrac{\mu_0 a^2 I_0 \cos\omega t}{2\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$

$$\Rightarrow \frac{dB(z)}{dz} = \frac{\mu_0 a^2 I_0\cos\omega t}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\, 2z$$

$$\frac{dB(z)}{dz} = -\frac{3\mu_0 a^2 z\, I_0\cos\omega t}{2\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow B_r(M) = \frac{3\mu_0 a^2 z\, r\, I_0\cos\omega t}{4\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow B_r(r,a) = \frac{3\mu_0 a^3 r\, I_0\cos\omega t}{4\left(2a^2\right)^{5/2}}$$

$$= \frac{3\mu_0\, r\, I_0\cos\omega t}{16\sqrt{2}\, a^2}$$

$$\boxed{B_r(r,a) = \frac{r}{a}B_1\cos\omega t} \quad \text{avec} \quad \boxed{B_1 = \frac{3\mu_0 I_0}{16\sqrt{2}\,a} = \frac{3}{4}B_0}$$

Plus r augmente (plus on s'éloigne de l'axe), et plus B_r augmente : les lignes de champ sont de + en + courbées quand on s'éloigne de l'axe $\Rightarrow$ OK.

4.7) $\vec{dF_L} = i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$

$$\vec{F_L} = \oint_{(S)} i\,\vec{dl}\wedge\vec{B} = \oint_{(S)}\left(i\,\vec{dl}\wedge\left(B_r\vec{u_r} + B(z)\vec{u_z}\right)\right)$$

sur une spire

$$= \oint_{(S)}\left(i\,\vec{dl}\wedge B_r\vec{u_r}\right) + i\cancel{\underbrace{\left(\oint_{(S)}\vec{dl}\right)}_{0}\wedge \underbrace{B(z)\vec{u_z}}_{\text{car } B(z)\vec{u_z} \text{ est uniforme sur } (S)}}$$

idem 3)

$$\vec{F_L} = \oint_{(S)} i\,dl\,\vec{u_\theta}\wedge B_r\vec{u_r} = \oint_{(S)} -i\,B_r\,dl\,\vec{u_z}$$

$r = b$ sur (S)

$$\vec{F_L} = -i\oint_{(S)}\left(\frac{b}{a}B_1\cos\omega t\right)\left(b\,\underset{2\pi}{d\theta}\right)\vec{u_z}$$

$$\vec{F_L} = -\frac{2\pi b^2 B_1 I}{a}\cos(\omega t)\sin(\omega t - \varphi)\,\vec{u_z}$$

Pour N spires :

$$\boxed{\vec{F_L} = -\frac{N\,2\pi b^2 B_1 I}{a}\cos(\omega t)\sin(\omega t-\varphi)\,\vec{u_z}}$$

or $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$\Rightarrow \sin(\omega t-\varphi) = \sin\omega t\cos\varphi - \sin\varphi\cos\omega t$

$\Rightarrow \cos(\omega t)\sin(\omega t-\varphi) = \underbrace{\cos\omega t\sin\omega t}_{\frac{\sin 2\omega t}{2}}\cos\varphi - \sin\varphi\cos^2\omega t$

or $\underbrace{\langle\sin 2\omega t\rangle_T}_{\text{de période } \frac{T}{2}} = 0$ et $\langle\cos^2\omega t\rangle_T = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\vec{F_L}\rangle = \frac{N\pi b^2 B_1 I\sin\varphi}{a}\,\vec{u_z}}$$

4-8) Si $R \gg L\omega$, alors $I e^{-j\varphi} = \frac{E_0}{R+jL\omega}$

$\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\langle\vec{F_L}\rangle = \vec{0}\\ \vec{F_L} = -\frac{N\pi b^2 B_1 I}{a}\sin 2\omega t\,\vec{u_z}\end{array}}$$

si les effets résistifs masquent les phénomènes dus à l'auto-induction.

4-9) $\boxed{\langle F_L\rangle = 6.10^{-5}\ \text{N}}$

5) Autre point de vue :

5-1) $\vec{m} = i(t)\,\vec{S}\times \underset{N \text{ spires}}{N} \Rightarrow \boxed{\vec{m} = N\pi b^2 i(t)\,\vec{u_z}}$

5-2) $\vec{f} = m\frac{d\vec{B}}{dz}$

or $B_r = -\frac{r}{2}\underbrace{\frac{dB(z)}{dz}}_{\text{en } C,\ z=a} = B_r(r,a) = \frac{r}{a}B_1\cos\omega t$

$\Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dz} = -\frac{2}{a}B_1\cos\omega t\,\vec{u_z}$

$\Rightarrow \vec{f} = N\pi b^2 I\sin(\omega t-\varphi)\left(-\frac{2}{a}B_1\cos\omega t\,\vec{u_z}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Rightarrow \vec{f} = -\frac{N\,2\pi b^2 B_1 I}{a}\cos(\omega t)\sin(\omega t-\varphi)\,\vec{u_z}\\ \Rightarrow \langle\vec{f}\rangle = \frac{N\pi b^2 B_1 I\sin\varphi}{a}\,\vec{u_z}\end{array}}$$

On retrouve bien les mêmes expressions que précédemment.

5-3) a) référentiel : laboratoire supposé galiléen

système : bobine

inventaire des actions extérieures :

* poids de la bobine : $m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$ $\quad\downarrow m\vec{g}$
* force moyenne de Laplace : $F(z)\,\vec{e_z}$ $\quad\uparrow F(z)\vec{e_z}$

à l'équilibre : $\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{F(z_e) = mg}$

* Si m diminue, mg diminue $\Rightarrow F(z_e)$ diminue

or sur l'intervalle utilisé en z, $F(z)$ est décroissante

$\Rightarrow z_e$ augmente

$\Rightarrow$ Si on utilise un matériau plus léger pour les spires de la bobine, l'altitude d'équilibre sera plus élevée.

5)3)b) si z $\left|\begin{array}{l}\text{augmente}\\ \text{diminue}\end{array}\right|$ à partir de z_e, $F(z)\left|\begin{array}{l}\searrow\\ \nearrow\end{array}\right|$

$\Rightarrow$ la bobine $\left|\begin{array}{l}\text{descend}\\ \text{monte}\end{array}\right|$ $\begin{array}{l}(mg > F)\\ (mg < F)\end{array}$

$\Rightarrow$ l'équilibre est stable.

6) Champ total :

6-1) Soit $\vec{B}_S$ le champ magnétique créé par la spire (S) parcourue par le courant $i(t)$.

Or on a vu à la question 4-3) qu'on peut assimiler la composante axiale $B_{S_z}(M)$ à $B_S(z)$ déterminée en 1-2).

$$\Rightarrow \phi_{propre} = \underset{\substack{\uparrow \\ N \text{ spires}}}{N} \iint_{(S)} \vec{B_S} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \propto \vec{e_z}}}{\vec{dS}} = N \iint B_S(z)\, dS$$

en $z=0$ (en C), on a $B_S = \left. \dfrac{\mu_0 b^2 i}{2(b^2+z^2)^{3/2}} \right|_{z=0} \times \overset{N \text{ spires}}{N} = \dfrac{\mu_0 i N}{2b}$

$$\phi_{propre} = N \frac{\mu_0 N i}{2b} \underbrace{\iint dS}_{\pi b^2} = \frac{\mu_0 N^2 \pi b^2}{2b} i$$

$$= \frac{\mu_0}{2} N^2 \pi b\, i = L i$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0}{2} N^2 \pi b}$$

6-2) $I = \dfrac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \dfrac{E_0}{L\omega} = \dfrac{2E_0}{\mu_0 N^2 \pi b \omega}$ avec $R=0$

$$= \frac{2 b B_0}{\mu_0 N}$$

$$\varphi = \text{Arctan} \frac{L\omega}{R} \xrightarrow[R \to 0]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t - \varphi) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = -\frac{2 b B_0}{\mu_0 N} \cos \omega t}$$

6-3) * $\vec{B_S}(0) = \dfrac{\mu_0 N i}{2b} \vec{e_z}$ (cf 6-1)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B_S}(0) = -B_0 \cos \omega t\, \vec{e_z}}$$

* $\vec{B_{S_0}}(0) = \dfrac{\mu_0 a^2 I_0 \cos \omega t}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \vec{e_z}$ avec $z=0$

$$= \frac{\mu_0 I_0 \cos \omega t}{2a} \vec{e_z}$$

or $B_0 = \dfrac{\mu_0 I_0}{4\sqrt{2} a} \Rightarrow \dfrac{\mu_0 I_0}{2a} = 2\sqrt{2} B_0$

$$\Rightarrow \vec{B_{S_0}}(0) = 2\sqrt{2} B_0 \cos \omega t\, \vec{e_z}$$

$$\vec{B_{total}}(0) = \vec{B_{S_0}}(0) + \vec{B_S}(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B_{total}} = (2\sqrt{2} - 1) B_0 \cos \omega t\, \vec{e_z}}$$

On pouvait prévoir cet effet grâce à la <u>loi de Lenz</u> :

$\vec{B_{S_0}} \propto \cos \omega t\, \vec{e_z}$

$\vec{B_S} \propto -\cos \omega t\, \vec{e_z}$

Ainsi, si $\phi_S(\vec{B_{S_0}}) > 0$ et ↗, $\phi_S(\vec{B_S}) < 0$ et ↘

> 0 et ↘	< 0 et ↗
< 0 et ↗	> 0 et ↘
< 0 et ↘	> 0 et ↗

$\Rightarrow \vec{B_S}$ est de sens opposé à $\vec{B_{S_0}}$.

Par ses effets électromagnétiques, $\vec{B_S}$ s'oppose à la cause qui lui a donné naissance ($\vec{B_{S_0}}$).

C'est une loi de modération.

$\vec{B_{total}} \propto \cos \omega t\, \vec{e_z}$, tout comme $\vec{B_{S_0}}$,

mais $\|\vec{B_{total}}\| < \|\vec{B_{S_0}}\|$.

PT 2017 - 2018 DS6

DEUXIEME PROBLEME : Lévitation magnétique
(d'après banque PT 2010)

II) Effets volumiques :

1) Modèle sommaire :

1-1) * Le champ créé par la spire (S_0) dépend de z (cf I)

$\Rightarrow$ il faut $\boxed{h \ll a}$ pour considérer que le champ appliqué est uniforme.

* Le champ créé par la spire (S_0) a une composante suivant $\vec{u_r}$ (cf I). Cette composante est négligeable devant la composante suivant $\vec{u_z}$ si on est "proche" de l'axe.

$\Rightarrow$ il faut $\boxed{b \ll a}$

* Enfin, il faut que l'épaisseur de peau δ soit très grande devant b pour considérer que le champ est uniforme dans le cylindre

$\Rightarrow \boxed{b \ll \delta}$

1-2) C'est l'équation de Maxwell-Faraday qui traduit le phénomène d'induction :

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

1-3) * $\vec{B} = B_0 \cos\omega t\, \vec{e_z}$ $\Rightarrow$ le plan contenant M et l'axe (Oz) est un plan de symétrie pour $\vec{B}$. C'est donc un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant (car $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur). Or $\vec{E}$ est un vecteur polaire

$\Rightarrow \vec{E}(M) \perp$ à ce plan $\Rightarrow \vec{E}(M) = E\,\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow$ le champ électrique dans le cylindre est orthoradial.

* $$\vec{rot}\,\vec{E} \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial \cancel{E_z}}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \cancel{E_r}}{\partial z} - \frac{\partial \cancel{E_z}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \cancel{E_r}}{\partial \theta}\right) \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{dB}{dt} \end{vmatrix}$$

composante suivant r $\Rightarrow \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow E(r, \theta, \cancel{z}, t)$

ce qui est logique car on a supposé que $B(\cancel{z})$ $(h \ll a)$, on doit donc aussi le supposer pour E.

* composante suivant z $\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} = -\frac{dB}{dt}$

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial (r E)}{\partial r} = -\frac{dB}{dt}$

* on a invariance de la distribution de courant dans la spire (S_0) par rotation autour de (Oz)

$\Rightarrow$ idem pour $\vec{B}$ $\Rightarrow$ idem pour $\vec{E}$

$\Rightarrow E(r, \cancel{\theta}, z, t)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E(r,t)\,\vec{u_\theta}}$$

* $\frac{1}{r}\frac{\partial (r E)}{\partial r} = -\frac{dB}{dt} = + B_0 \omega \sin\omega t$

$\Rightarrow \frac{\partial (r E)}{\partial r} = r B_0 \omega \sin\omega t$

$\Rightarrow r E = \frac{r^2}{2} B_0 \omega \sin\omega t + \cancel{K}^{\,0}$ $(E \underset{r \to 0}{\not\to} \infty)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{B_0 \omega}{2} r \sin\omega t\, \vec{e_\theta} = K r \sin\omega t\, \vec{e_\theta} \quad \text{avec } K = \frac{B_0\omega}{2}}$$

* 2ème méthode : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \underset{\text{ici}}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{d\vec{B}}{dt}$ ($\vec{B}$ uniforme)

$\Rightarrow \iint_S \vec{rot}\,\vec{E} \cdot \vec{dS} \underset{\text{thm de Stokes}}{=} \oint_\mathcal{C} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_S -\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{dS} \underset{\vec{B}\text{ uniforme}}{=} -\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{S}$

$\mathcal{C}$: cercle d'axe (Oz) de rayon r (orienté positivement autour de (Oz))
S : disque qui s'appuie sur $\mathcal{C}$

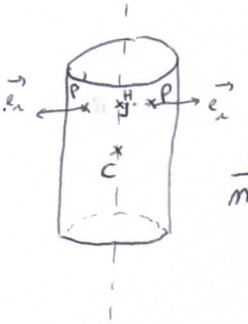
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \oint_{\mathcal{C}} E(r,t)\vec{e_\theta}\cdot\underbrace{(+dl\,\vec{e_\theta})}_{\text{orientation}} = \underbrace{E(r,t)}_{r=c^{te}\text{ sur }\mathcal{C}\text{ fixe ds temps}}\oint_{\mathcal{C}} dl = E(r,t)\,2\pi r$$

$$-\frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\vec{S} = +B_0\,\omega\sin\omega t\,\vec{e_z}\cdot\pi r^2\vec{e_z} = B_0\,\omega\,\pi r^2\sin\omega t$$

$$\Rightarrow E = \frac{B_0\,\omega}{2}\,r\sin\omega t$$ OK on retrouve le même résultat.

1-4) loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E}}$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint \vec{CP}\wedge\vec{j}(P)\,d\tau$$



$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint\left(\vec{CH}+\vec{HP}\right)\wedge\vec{j}(P)\,d\tau$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint \vec{CH}\wedge\vec{j}(P)\,d\tau + \frac{1}{2}\iiint \vec{HP}\wedge\vec{j}(P)\,d\tau$$

Soit P' le symétrique de P par rapport à (Oz)

$$\vec{CH}\wedge\vec{j}(P) = \vec{CH}\wedge\gamma E(r,t)\vec{e_\theta} = \gamma E(r,t)\,CH\,(-\vec{e_r})$$

$$\vec{CH}\wedge\vec{j}(P') = \gamma E(r,t)\,CH\,(-\vec{e_r})$$

$$\Rightarrow \vec{CH}\wedge\vec{j}(P) + \vec{CH}\wedge\vec{j}(P') = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\iiint \vec{CH}\wedge\vec{j}(P)\,d\tau = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}\iiint \underbrace{\vec{HP}}_{\propto\vec{e_r}}\wedge\underbrace{\vec{j}(P)}_{\propto\vec{e_\theta}}\,d\tau \Rightarrow \boxed{\vec{m}\propto\vec{e_z}}$$

(logique car les courants tournent autour de (Oz))

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint\left(r\vec{e_r}\right)\wedge\left(\gamma E(r,t)\vec{e_\theta}\right)r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\iiint \gamma\frac{B_0\,\omega}{2}\sin\omega t\;r^3\,dr\,d\theta\,dz\;\vec{e_z}$$

$$= \frac{1}{4}\gamma B_0\,\omega\sin\omega t\underbrace{\int_0^b r^3\,dr}_{\frac{b^4}{4}}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{2\pi}\underbrace{\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}}dz}_{h}\;\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{\gamma B_0\,\omega\,b^4\pi h}{8}\sin\omega t\,\vec{e_z}}$$

1-5) $\sin\omega t\cos\omega t = \dfrac{\sin 2\omega t}{2}$

or $\langle\sin 2\omega t\rangle = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\vec{F}\rangle = \vec{0}}$$

On ne retrouve pas le même résultat qu'en I)4) et 5), car ici on n'a pas pris en compte le champ magnétique induit par les courants induits dans le cylindre.

Cela revient à négliger l'auto-induction dans la partie I), donc $L=0$, donc $\varphi = \operatorname{Arctan}\dfrac{L\omega}{R} = 0$, donc $\sin\varphi = 0$, donc $\langle\vec{F}\rangle = \dfrac{N\pi b^2 B_1 I}{a}\sin\varphi\,\vec{u_z} = \vec{0}$

1-6) équation de Maxwell-Ampère : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{rot}\,\vec{B_i} = \mu_0\Big(\gamma\vec{E} + \underbrace{\cancel{\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}}_{\text{négligeable dans l'ARQS}}\Big) = \mu_0\vec{j}$$

$\Rightarrow$ on peut utiliser le thm d'Ampère :

$$\oint_{\mathcal{C}}\vec{B_i}\cdot\vec{dl} = \mu_0\iint_S\vec{j}\cdot\vec{dS}$$

* Le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow \vec{B}(M)\in$ à ce plan $\Rightarrow B_\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{B_i} = B_r\,\vec{e_r} + B_z\,\vec{e_z}$$

* On a invariance de la distribution de courant par rotation autour de (Oz) $\Rightarrow \vec{B_i}(r,\cancel{\theta},z,t)$
* De même que l'on a supposé que $\vec{B_{s_0}}$ était uniforme et ne dépendait pas de z dans le cylindre, il faut supposer que $\vec{B_i}$ ne dépend pas de z $\Rightarrow \vec{B_i}(r,\theta,\cancel{z},t)$ à l'intérieur du cylindre

$(h \ll a)$

* De même que l'on a supposé que $\vec{B}_{S_0}$ n'avait pas de composante suivant $\vec{u}_r$ ($b \ll a$), il faut supposer que $\vec{B}_i$ n'a pas de composante suivant $\vec{u}_r$

$\Rightarrow B_r = 0$

$$\Rightarrow \vec{B}_i = B_i(r,t)\,\vec{u}_z$$

* 1ère méthode : équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{rot}\,\vec{B}_i = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E} = \frac{\mu_0 \gamma \omega B_0}{2}\, r \sin\omega t\, \vec{e}_\theta$$

$$\vec{rot}\,\vec{B}_i \left| \begin{array}{l} \cancel{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_z}{\partial \theta}}_{0} - \cancel{\dfrac{\partial B_\theta}{\partial z}} \\ \cancel{\dfrac{\partial B_r}{\partial z}} - \dfrac{\partial B_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\cancel{\dfrac{\partial (r B_\theta)}{\partial r}} - \cancel{\dfrac{\partial B_r}{\partial \theta}}_{0}\right) \end{array} \right.$$

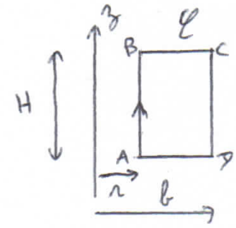
$$\Rightarrow \frac{\partial B_i}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \gamma \omega B_0}{2}\, r \sin\omega t$$

$$\Rightarrow B_i = -\frac{\mu_0 \gamma \omega B_0 r^2}{4} \sin\omega t + K$$

or $B_i(r=b) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_i = B_0 \frac{\mu_0 \gamma \omega}{4}\left(b^2 - r^2\right) \sin\omega t\, \vec{u}_z}$$

* 2ème méthode : thm d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_i \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$



S : surface plane qui s'appuie sur $\mathcal{C}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_i \cdot \vec{dl} = \int_A^B \vec{B}_i \cdot dz\, \vec{u}_z + \cancel{\int_B^C \vec{B}_i \cdot dr\, \vec{u}_r} + \int_C^D \vec{B}_i \cdot (-dz\, \vec{u}_z) + \cancel{\int_D^A \vec{B}_i \cdot (-dr\, \vec{u}_r)}$$

$\vec{B}_i \propto \vec{u}_z$

$$= B_i(r,t)\, H - \underbrace{B_i(b,t)}_{0}\, H$$

$$\Rightarrow B_i(r,t)\, H = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \mu_0 \iint \gamma \frac{\omega B_0}{2} r' \sin\omega t\, \vec{e}_\theta \times (dr' dz)\, \vec{e}_\theta$$

$$= \frac{\mu_0 \gamma \omega B_0}{2} \sin\omega t \underbrace{\int_r^b r' dr'}_{\frac{(b^2 - r^2)}{2}} \underbrace{\int_0^H dz}_{H}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_i = B_0 \frac{\mu_0 \gamma \omega}{4}\left(b^2 - r^2\right) \sin\omega t\, \vec{u}_z$$

1.2) $\|\vec{B}_i\| = B_0 \dfrac{\mu_0 \gamma \omega}{4}\left(b^2 - r^2\right) \sin\omega t$

$$\ll \|\vec{B}\| = B_0 \cos\omega t$$

si $\dfrac{\mu_0 \gamma \omega}{4}\left(b^2 - r^2\right) \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 \gamma \omega}{4} b^2 \ll 1 \Rightarrow \mu_0 \gamma \omega b^2 \ll 1$$

$$\Rightarrow \boxed{b \ll \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}}} < \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

et alors on peut négliger le champ induit $\vec{B}_i$ devant le champ inducteur $\vec{B}$.

2) Amélioration du modèle : étude de l'effet de peau :

2.1) équation de Maxwell-flux : $\text{div}\, \vec{B} = 0$

- Faraday : $\vec{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Ampère : $\vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

or conducteur $\Rightarrow$ loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

et de plus, dans l'ARQS, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

$$\Rightarrow \vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

* $\vec{rot}\, \vec{rot}\, \vec{B} = \cancel{\vec{grad}\, \text{div}\, \vec{B}} - \Delta \vec{B}$

$$= \vec{rot}\left(\mu_0 \gamma \vec{E}\right) = \mu_0 \gamma\, \vec{rot}\, \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

2.2) Cette équation prend en compte les phénomènes d'auto-induction car les équations de Maxwell sont générales : $\vec{B}$ est le champ magnétique total (inducteur + induit).

2-3) $\underline{\vec{B}} = \underline{B}(x)\, e^{i\omega t}\, \vec{e}_z \Rightarrow B_x = B_y = 0$

$$\underline{B}_z = \underline{B}(x)\, e^{i\omega t}$$

$$\Delta \vec{B} \begin{vmatrix} \cancel{\Delta B_x} \\ \cancel{\Delta B_y} \\ \Delta B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \gamma \begin{vmatrix} \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial t}} \\ \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial t}} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta B_z = \mu_0 \gamma \frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \Delta B = \mu_0 \gamma \frac{\partial B}{\partial t}$$

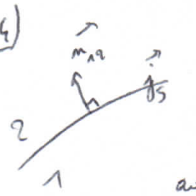
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}}}_{0} = \mu_0 \gamma \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \underline{B}(x)}{dx^2} e^{i\omega t} = \mu_0 \gamma\, \underline{B}(x)\, i\omega\, e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \underline{B}(x)}{dx^2} - i \mu_0 \gamma \omega\, \underline{B}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \underline{B}(x)}{dx^2} - \frac{(1+i)^2}{2} \mu_0 \gamma \omega\, \underline{B}(x) = 0}$$

2-4)



$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}}$$

avec $\vec{B}_2$ ($_1$) : chp mg infiniment près de la surface du côté 2 ($_1$)

$\vec{n}_{12}$: vecteur unitaire normal à la surface

$\vec{j}_s$: densité de courant surfacique.

Ici, on prend un modèle volumique pour les courants dans le conducteur ($\delta \neq 0$) $\Rightarrow \vec{j}_s = \vec{0}$

$\Rightarrow$ on a continuité de $\vec{B}$ en $x = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{B}(0) = B_0}$$

2-5) équation caractéristique : $r^2 - (1+i)^2 \frac{\mu_0 \gamma \omega}{2} = 0$

on pose $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ (épaisseur de peau en mètre)

$$\Rightarrow r^2 - \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{1+i}{\delta}$$

$$\Rightarrow \underline{B}(x) = K_1 e^{(1+i)\frac{x}{\delta}} + K_2 e^{-(1+i)\frac{x}{\delta}}$$

$$= K_1 e^{\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}} + K_2 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}}$$

or $e^{x/\delta} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$ et $\underline{B}(x) \not\to \infty$!!

$$\Rightarrow K_1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{B}(x) = K_2 e^{-x/\delta} e^{-i\frac{x}{\delta}}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = \underline{B}(x) e^{i\omega t} = K_2 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

$$\Rightarrow B(x,t) = K_2 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

or $B(0,t) = B_0 \cos \omega t = K_2 e^0 \cos(\omega t - 0)$

$$\Rightarrow K_2 = B_0$$

$$\Rightarrow \boxed{B(x,t) = B_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

L'amplitude $B_0 e^{-x/\delta}$ décroît et le champ magnétique a une amplitude importante sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ. Au-delà, le champ magnétique est quasiment nul.

* L'épaisseur de peau est en mètre $\left(\frac{d^2 \underline{B}(x)}{dx^2} - (1+i)^2 \frac{\underline{B}(x)}{\delta^2} = 0\right)$

$\Rightarrow \delta$ en mètre.

2-6) Dans l'ARQS, on a $\vec{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \cancel{\frac{\partial}{\partial y}} \\ \cancel{\frac{\partial}{\partial z}} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \cancel{B_x} \\ \cancel{B_y} \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ 0 \end{vmatrix} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} \vec{e}_y$$

$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{1}{\delta} B_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \frac{1}{\delta} B_0 e^{-x/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right] \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right] \vec{e}_y}$$

2.7) $d\vec{F}_L = \underset{\propto \vec{e}_y}{\vec{j}}\, d\tau \wedge \underset{\propto \vec{e}_z}{\vec{B}} \quad \propto \vec{e}_x$

$$\Rightarrow d\vec{F}_L = \frac{B_0^2}{\mu_0 \delta} e^{-\frac{2x}{\delta}} \left[\cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right] \times d\tau\, \vec{e}_x$$

$$\left\langle \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{\sin\left[2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]}{2}\right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle d\vec{F}_L \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0 \delta} e^{-\frac{2x}{\delta}}\, d\tau\, \vec{e}_x}$$

2.8) $d\tau = dx\, dy\, dz \qquad \iint dy\, dz = S$

$$\langle \vec{F}_L \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{B_0^2}{2\mu_0 \delta} e^{-\frac{2x}{\delta}} S\, dx\, \vec{e}_x$$

$$= \frac{B_0^2 S}{2\mu_0 \delta}\left(-\frac{\delta}{2}\right)\underbrace{\left[e^{-\frac{2x}{\delta}}\right]_0^{+\infty}}_{0-1} \vec{e}_x$$

$$\boxed{\langle \vec{F}_L \rangle = \frac{B_0^2 S}{4\mu_0}\vec{e}_x}$$

2.9) Toujours avec la géométrie simple des demi-espaces :

en $x = 0^+$: (au voisinage du bord)

$$\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^0 \left[\cos(\omega t - 0) - \sin(\omega t - 0)\right]\vec{e}_y$$

$$\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \delta}\left(\cos\omega t - \sin\omega t\right)\vec{e}_y$$

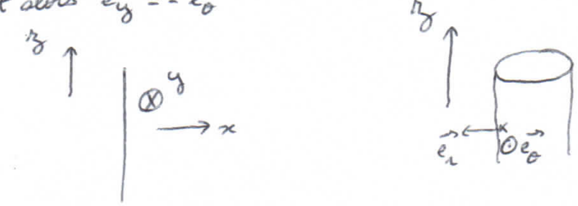
or $\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\omega t \underset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}} - \sin\omega t \underset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)$

$= \cos\omega t - \sin\omega t$

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{B_0\sqrt{2}}{\mu_0 \delta}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_y$ au voisinage du bord du conducteur.

Ici : $\delta \ll b \Rightarrow$ on peut adopter le modèle des demi-espaces infinis (// avec le fait que pour les hommes, la Terre semble plate !)

et alors $\vec{e}_y = -\vec{e}_\theta$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = -\frac{B_0\sqrt{2}}{\mu_0 \delta}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_\theta}$$

2.10) Supposons que $\vec{j}$ est uniforme sur l'épaisseur $\frac{\delta}{2}$ (ce qui n'est pas précisé dans l'énoncé ...)

orientation positive autour de (Oz)

$$i(t) = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{B_0\sqrt{2}}{\mu_0\delta}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_\theta \cdot \left(\underset{\frac{\delta}{2}}{dr}\, \underset{h}{dh}\, \vec{e}_\theta\right)$$

$$\boxed{i(t) = -\frac{B_0 h}{\mu_0\sqrt{2}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$\vec{m} = i\vec{S}$ (en supposant que $\vec{j}$ est nul si $r < b - \frac{\delta}{2}$, ce qui n'est pas précisé dans l'énoncé ...)

$$\vec{m} = i\pi b^2 \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{m} = -\frac{B_0\pi b^2 h}{\mu_0\sqrt{2}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_z}$$

2.11) $\vec{f} = m\frac{d\vec{B}}{dz} = -\frac{B_0\pi b^2 h}{\mu_0\sqrt{2}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{3B_0}{2a}\cos\omega t\, \vec{e}_z\right)$

or $\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

$$\Rightarrow \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\omega t = \frac{\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \frac{3 B_0^2 \pi b^2 h}{4\sqrt{2} \mu_0 a} \left[\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \vec{e_z}$$

or $\left\langle \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right\rangle = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{f} \rangle = \frac{3 B_0^2 \pi b^2 h}{8 \mu_0 a} \vec{e_z}}$$

$$\boxed{\langle f \rangle = 5\,N}$$

2.12) Un supraconducteur expulse les lignes de champ magnétique (effet Meissner).

La force qui s'exerce sur le supraconducteur ~~est~~ plus grande que la force qui s'exerce sur le conducteur.

Propriété mécanique ?