

PREMIER PROBLEME: Observation de la Terre par la satellite ENVISAT: Mesure de déplacements verticaux par interférométrie radar (d'après banque PT 2011)

Défaut de planéité d'un des miroirs de l'interféromètre de Michelson

1)
$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (1 + \cos \varphi)$$
 car \mathcal{E}_0 est l'éclairement maximal

$$\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda}$$
 et $\delta = 2e$ (en lame d'air en incidence normale)

En effet, la source est très peu étendue et placée au foyer objet de la lentille \Rightarrow incidence quasi-normale $\Rightarrow i \approx 0$

$$\Rightarrow \delta = 2e \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi e}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi e}{\lambda} \right)$$

* Si e est donnée, $e = c \frac{t^2}{2} \Rightarrow \mathcal{E} = c \frac{t^2}{2}$

\Rightarrow tache lumineuse de rayon le rayon des miroirs et d'intensité constante.

* \mathcal{E} varie périodiquement avec e .

Pour certaines valeurs de e : $\mathcal{E} = 0$

Pour d'autres: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{max}$

Pour les autres: \mathcal{E} sera intermédiaire.

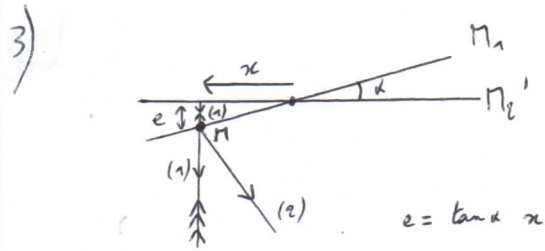
2) Pour repérer le contact optique, il faut utiliser de la lumière blanche.

Si $e >$ qqes μm : tache d'ordre supérieur.

Si $e <$ qqes μm : tache de couleur (la couleur dépendra de e)

Si $e = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \forall \lambda \Rightarrow$ on aura une tache blanche de même blanc que la source.

Il faut chercher pour observer une tache de couleur, faire défiler les couleurs, jusqu'à avoir une tache blanche.



$$\delta = 2e = 2\alpha x$$

Les rayons (1) et (2) se croisent en P, c'est-à-dire sur le miroir M_1 .

source ponctuelle: les franges sont délocalisées
source étendue: les franges sont localisées sur les miroirs.

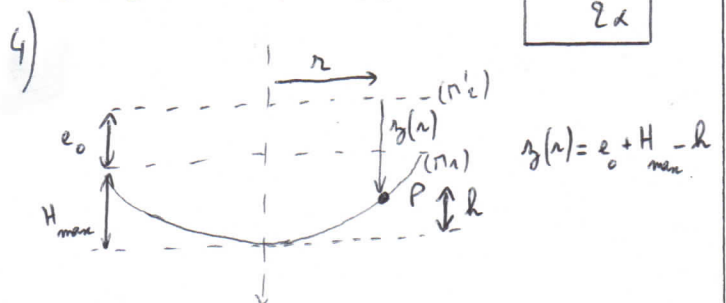
* Les franges sont caractérisées par $\mathcal{E} = c \frac{t^2}{2} \Rightarrow \varphi = c \frac{t^2}{2}$

$$\Rightarrow \delta = c \frac{t^2}{2} = 2\alpha x \Rightarrow x = c \frac{t^2}{4\alpha}$$

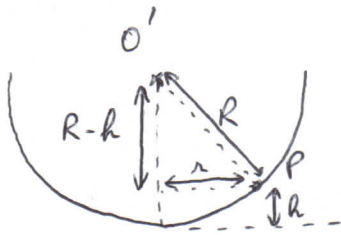
\Rightarrow on a des franges rectilignes parallèles à l'axe du coin d'air.

* calcul de l'interfrange: $\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \Delta\delta = \lambda$

$$\Rightarrow 2\alpha \Delta x = \lambda \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha} = i$$



Soit O' le centre du cercle



thm de Pythagore: $R^2 = (R-h)^2 + r^2$
 $= R^2 + h^2 - 2Rh + r^2$

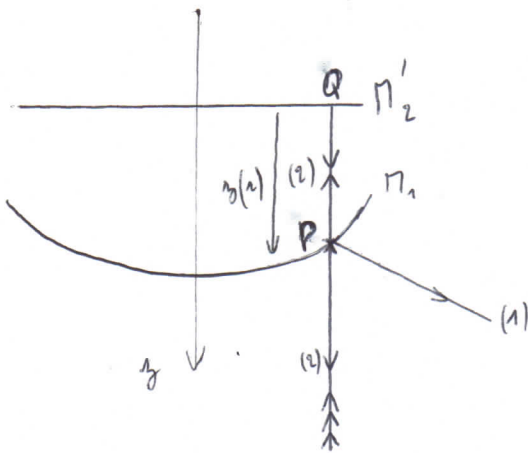
$\Rightarrow r^2 + h^2 = 2Rh$

car $R \gg H_{max} > h \Rightarrow h^2 \ll 2Rh$

$\Rightarrow r^2 = 2Rh \Rightarrow h = \frac{r^2}{2R}$

$\Rightarrow \boxed{z(r) = e_0 + H_{max} - \frac{r^2}{2R}}$

5)



* (1) et (2) se coupent en P, c'est-à-dire sur le miroir Π_1 , comme pour les franges de coin d'air.
 \Rightarrow les franges sont localisées au voisinage du miroir 1

* $\delta = (SP)_2 - (SP)_1 = (SP + PQ + QP) - SP$
 $= 2PQ = 2z(r)$

$\Rightarrow \boxed{\delta = 2z(r) = 2\left(e_0 + H_{max} - \frac{r^2}{2R}\right)}$

* les franges sont caractérisées par $e = c^k \Rightarrow l = c^k$

$\Rightarrow \delta = c^k \Rightarrow r = c^{\frac{k}{2}}$

\Rightarrow on observe des anneaux d'axe (O_2)

6)

au centre des anneaux: $r=0 \Rightarrow \delta = 2(e_0 + H_{max})$

car $p = \frac{\delta}{\lambda} \Rightarrow \boxed{p_0 = \frac{2(e_0 + H_{max})}{\lambda}}$

Soit p_k l'ordre d'interférence du k-ième anneau

brillant:

$p_1 = E(p_0) =$ partie entière de p_0

$\left(p_1 = \frac{2\left(e_0 + H_{max} - \frac{r_1^2}{2R}\right)}{\lambda} < p_0 = \frac{2(e_0 + H_{max})}{\lambda}\right)$

$p_2 = p_1 - 1$

⋮

$p_k = p_1 - (k-1) = p_1 - k + 1$

$\Rightarrow \frac{2\left(e_0 + H_{max} - \frac{r_k^2}{2R}\right)}{\lambda} = \frac{2\left(e_0 + H_{max} - \frac{r_1^2}{2R}\right)}{\lambda} - k + 1$

$\Rightarrow -\frac{r_k^2}{2R} = -\frac{r_1^2}{2R} - k + 1$

$\Rightarrow \boxed{r_k = \sqrt{r_1^2 + (k-1)2R}}$

Analyse d'un défaut de planité d'une surface

réfléchissante

7) * On observe des anneaux au niveau du défaut.

En dehors du défaut, on observe un écran éclairé uniformément.

$d =$ diamètre du défaut = diamètre de l'anneau

le plus externe. $\Rightarrow \boxed{d = 4,0 \text{ mm}}$

* Le centre est brillant; le fond d'écran est brillant.

Entre les deux, il y a 4 interférences.

$\Rightarrow \Delta\delta = 4\lambda$

Pour le fond d'écran: $\delta = 2e_0$

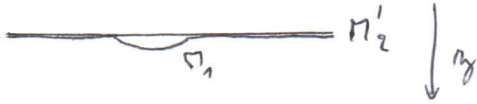
Pour le centre: $\delta = 2(e_0 + H_{max})$

$$\Rightarrow \Delta s = 2H_{\max} = 4d$$

$$\Rightarrow H_{\max} = 2d = 1,3 \mu\text{m}$$

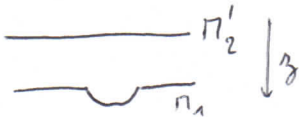
* Pour savoir si le défaut est convexe ou concave, il faut travailler en lumière blanche.

On règle tout d'abord le fond d'écran au contact optique (cf B2).



On choisit n_1 dans le sens des z croissants :

cas 1 :



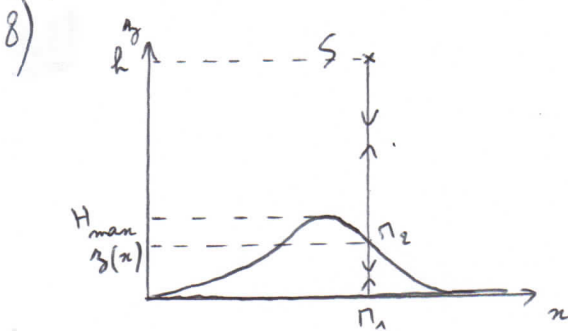
le blanc d'ordre supérieur apparaîtra d'abord au niveau du défaut (δ grand)

cas 2 :



le blanc d'ordre supérieur apparaîtra d'abord hors du défaut (δ grand)

Déplacements verticaux mesurés par interférométrie radar



$$\begin{aligned} \delta &= (S n_1 + n_1 S) - (S n_2 + n_2 S) \\ &= 2S n_1 - 2S n_2 = 2 n_1 n_2 \\ &= 2 z(x) \end{aligned}$$

$$\delta = 2 z(x)$$

9)

$$d \approx 4 \cdot 10^1 \text{ km}$$

Entre le centre et l'extrémité, il y a environ 3 interférences $\Rightarrow \Delta s = 3d$

D'autre part, $z(x) = H_{\max}$ et là où le sol n'a pas bougé : $z = 0$

$$\Rightarrow \Delta s = 2H_{\max} - 0 = 2H_{\max}$$

$$\Rightarrow 2H_{\max} = 3d$$

$$\Rightarrow H_{\max} \approx \frac{3d}{2} \approx 8 \text{ cm}$$

En 4 ans, le sol s'est élevé de 8 cm au maximum

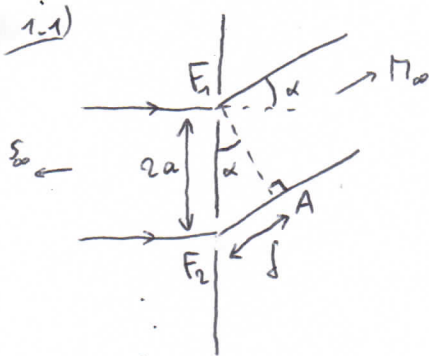
\Rightarrow " 1 " " " 2 cm "

$$\Rightarrow \text{vitesse maximale d'élévation du sol : } 2 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1}$$

C'est peu ! Mais pourtant, on peut très bien l'observer !

DEUXIEME PROBLEME: Mesure d'épaisseur par interférométrie (d'après banque PT 2017)

1- Système interférentiel à deux fentes:



$(SF_1) = (SF_2)$ d'après le théorème de Malus

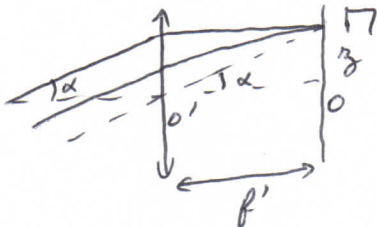
(après un reb quelconque de réflexions et de réfractions, les rayons lumineux issus d'une source ponctuelle S sont perpendiculaires aux surfaces d'onde).

$(F_1M) = (AM)$ d'après le principe de retour inverse de la lumière et le th de Malus.

$$\Rightarrow \delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (SF_2) + F_2A + (AM) - (SF_1) + (F_1M) = F_2A$$

Dans le triangle F_1AF_2 : $F_2A = 2a \sin \alpha$

$$\Rightarrow \delta = 2a \sin \alpha \approx 2a \alpha \quad \left(\begin{array}{l} \cos \alpha \ll \lambda \\ \Rightarrow \alpha \ll 1 \end{array} \right)$$



Dans le triangle $O'O'M$: $z = f' \tan \alpha \approx f' \alpha$

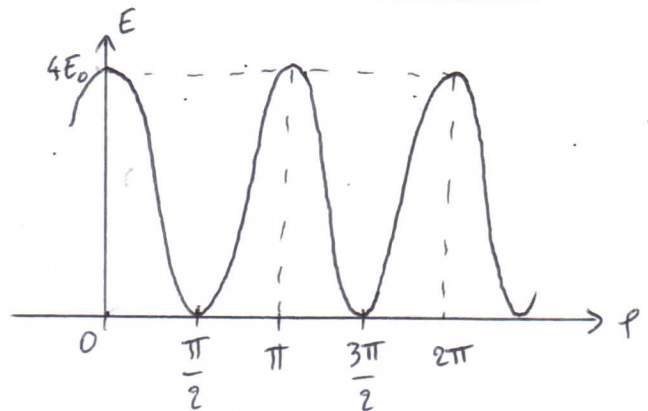
$$\Rightarrow \alpha = \frac{z}{f'} \Rightarrow \delta = \frac{2az}{f'}$$

$$(2\varphi) = \frac{2\pi \delta}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{2\pi az}{\lambda f'}}$$

$$1.2) \underline{\Delta} = \underline{\Delta}_1 + \underline{\Delta}_2 = \Delta_0 e^{j\varphi} + \Delta_0 e^{-j\varphi}$$

$$\begin{aligned} E = \underline{\Delta} \underline{\Delta}^* &= (\Delta_0 e^{j\varphi} + \Delta_0 e^{-j\varphi}) (\Delta_0 e^{-j\varphi} + \Delta_0 e^{j\varphi}) \\ &= \Delta_0^2 + \Delta_0^2 + \Delta_0^2 e^{2j\varphi} + \Delta_0^2 e^{-2j\varphi} \\ &= 2E_0 + E_0 \underbrace{(e^{2j\varphi} + e^{-2j\varphi})}_{2 \cos(2\varphi)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = 2E_0 (1 + \cos(2\varphi))}$$



2- Système interférentiel à trois fentes:

$$2.1.1) \underline{\Delta} = \Delta_0 e^{j\varphi} + \Delta_0 + \Delta_0 e^{-j\varphi}$$

$$E = \underline{\Delta} \underline{\Delta}^* = \Delta_0^2 (e^{j\varphi} + 1 + e^{-j\varphi}) (e^{-j\varphi} + 1 + e^{j\varphi})$$

$$E = E_0 (1 + 1 + 1 + e^{j\varphi} + e^{2j\varphi} + e^{-j\varphi} + e^{-j\varphi} + e^{-2j\varphi} + e^{-j\varphi})$$

$$E = E_0 \left(3 + 2 \underbrace{(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})}_{2 \cos \varphi} + \underbrace{(e^{2j\varphi} + e^{-2j\varphi})}_{2 \cos 2\varphi} \right) = 2 \cos^2 \varphi - 2$$

$$E = E_0 (2 + 4 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi)$$

$$\boxed{E = E_0 (1 + 2 \cos \varphi)^2}$$

ou plus rapide (...!!): $\underline{\Delta} = \Delta_0 e^{j\varphi} + \Delta_0 + \Delta_0 e^{-j\varphi}$

$$\Rightarrow \underline{\Delta} = \Delta_0 (1 + e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) = \Delta_0 (1 + 2 \cos \varphi)$$

$$E = \underline{\Delta} \underline{\Delta}^* \Rightarrow \boxed{E = E_0 (1 + 2 \cos \varphi)^2} \quad \text{CQFD}$$

2.1.2) $\frac{E}{E_0} = (1 + 2\cos\varphi)^2$

φ en rad	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\frac{E}{E_0}$	9	0	1	0	9

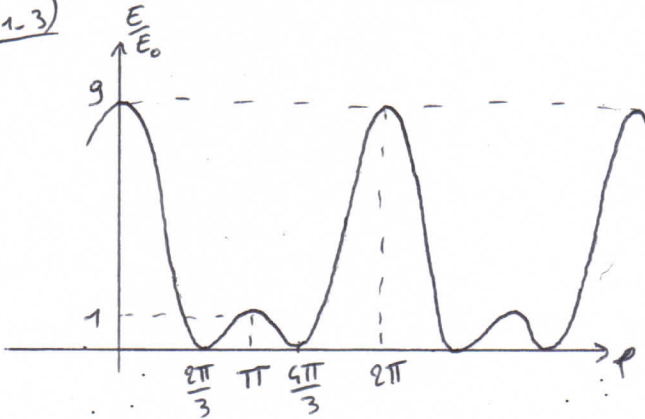
ou $d = (n-1)e$

↑
ou a remplacé de l'air par du verre

$\Rightarrow (n-1)e = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow d = 4(n-1)e$

$\lambda = 4 \times (1,5-1) \times 0,3 \mu\text{m} \Rightarrow d = 0,6 \mu\text{m}$

2.1.3)



2.2.1) $\underline{\Delta} = \Delta_0 e^{j\varphi} + \Delta_0 e^{-j\frac{\pi}{2}} + \Delta_0 e^{-j\varphi}$

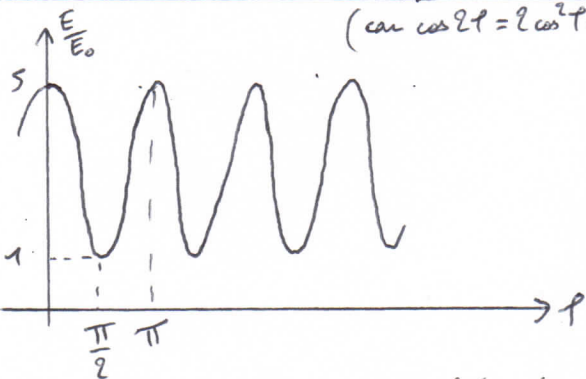
$\Rightarrow \underline{\Delta} = \Delta_0 (e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2\cos\varphi)$

$E = \underline{\Delta} \Delta^* = \Delta_0^2 (e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2\cos\varphi)(e^{j\frac{\pi}{2}} + 2\cos\varphi)$

$E = E_0 (1 + 2\cos\varphi (e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{j\frac{\pi}{2}}) + 4\cos^2\varphi)$
 $2\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow E = E_0 (1 + 4\cos^2\varphi) = E_0 (3 + 2\cos 2\varphi)$

(car $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$)

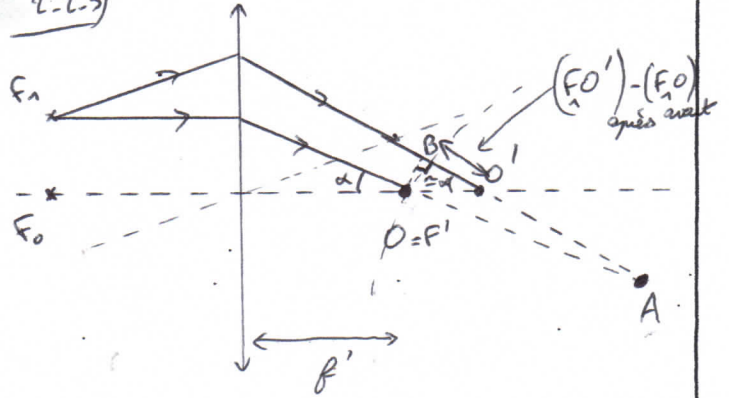


\Rightarrow on retrouve une alternance régulière de franges brillantes et de franges sombres (pas noires car $E_{\min} = E_0 \neq 0$).

2.2.2) Un retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ correspond à un retard de chemin optique d tel que $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi d}{\lambda}$

$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{4}$

2.2.3)



* En O, les rayons étaient en phase avant l'introduction de la lame $\Rightarrow (F_0O)_{\text{avant}} = (F_1O)_{\text{avant}}$

* En O', les rayons sont à nouveau en phase $\Rightarrow (F_0O')_{\text{après}} = (F_1O')_{\text{après}}$

* $(F_0O')_{\text{après}} = (F_0O)_{\text{avant}} + (n-1)e + \overline{OO'}$
 ↑ ↑
 or a remplacé de l'air par du verre

* $\Rightarrow (F_1O')_{\text{après}} = (F_1O)_{\text{avant}} + (n-1)e + \pi$

* F_1 et A sont conjugués par la lentille $\Rightarrow (F_1A)$ indépendant du rayon.

$\Rightarrow (F_1A) = (F_1O)_{\text{avant}} + (OA)$
 $= \underbrace{(F_1B) + (BO')}_{(F_1O')_{\text{après}}} + (O'A)$ (avec $(AO) = (AB)$)

$\Rightarrow (F_1O')_{\text{après}} - (F_1O)_{\text{avant}} = (OA) - (O'A)$
 $= BO' = \pi \cos \alpha$
 ↑
 triangle $\triangle OBO'$

$\Rightarrow (n-1)e + \pi = \pi \cos \alpha$

$\Rightarrow \pi = \frac{(1-n)e}{1-\cos \alpha}$

$$\Rightarrow e = \frac{(1 - \cos \alpha) \lambda}{1 - n}$$

$$\text{or } \cos \alpha = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$$

$$\Rightarrow e = \frac{\lambda^2 \lambda}{2(1-n)} \quad \text{or } \lambda = \frac{a}{f'}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{a^2 \lambda}{2f'^2(1-n)}}$$

$$e = \frac{(0,1 \cdot 10^{-3})^2 \times (-1 \cdot 10^{-2})}{2 \times (10 \cdot 10^{-2})^2 (1 - 1,5)}$$

$$e = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = 0,01 \mu\text{m}}$$

2.3) $\left. \begin{array}{l} \text{prix Nobel en 1953} \\ \text{naissance en 1888} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{65 \text{ ans !!}}$

TROISIEME PROBLEME : Optique : observation de deux étoiles (d'après CCP NP 2004)

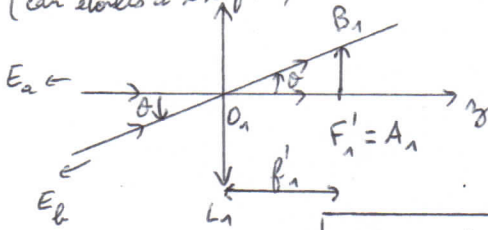
I) Etude géométrique :

1) * Chaque étoile est une source ponctuelle à l'infini, et émet donc une onde plane (faisceau de lumière parallèle).

* Le faisceau provenant de E_a est parallèle à l'axe optique.

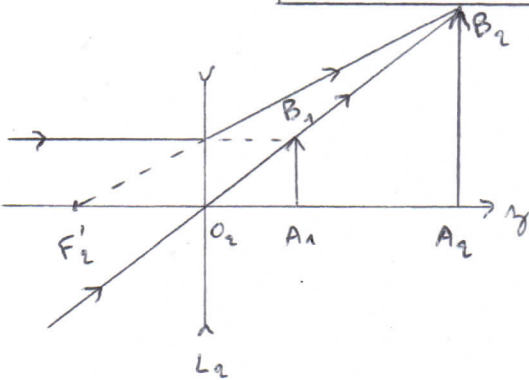
* Le faisceau provenant de E_b fait un angle θ avec l'axe optique.

2) a) A_1 et B_1 se trouvent dans le plan focal image de L_1 (car étoiles à l'infini).



Dans le triangle $O_1 A_1 B_1$: $\overline{A_1 B_1} = f'_1 \tan \theta \approx f'_1 \theta$

2) b)



$$* -\frac{1}{O_2 A_1} + \frac{1}{O_2 A_2} = \frac{1}{O_2 F'_2} = \frac{1}{f'_2}$$

$$* \gamma_2 = \frac{O_2 A_2}{O_2 A_1} = \frac{A_2 B_2}{A_1 B_1} = 2,00 \Rightarrow O_2 A_2 = 2,00 O_2 A_1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{O_2 A_1} + \frac{1}{2,00 O_2 A_1} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow O_2 A_1 = \frac{f'_2}{2,00} = 1,25 \text{ cm}$$

3) a) $\overline{A_2 B_2} = 2,00 \cdot \overline{A_1 B_1} = 2,00 \cdot f'_1 \theta = f' \theta$

$$\Rightarrow f' = 2,00 f'_1 = 15 \text{ cm}$$

3) b) $\overline{A_1 A_2} = O_2 A_2 - O_2 A_1 = 2,00 O_2 A_1 - O_2 A_1 = O_2 A_1$

$$\overline{A_1 A_2} = 1,25 \text{ cm}$$

L'encombrement est plus grand avec cette association de 2 lentilles ($\overline{A_1 A_2} > 0$), mais pas beaucoup car $\overline{A_1 A_2} \ll f'_1$.

Avec L_2 , l'image finale est deux fois plus grande, ce qui permet de mieux séparer les images des 2 étoiles.

4) * $\overline{A_2 B_{2 \min}} = a_1 = 3 \mu\text{m}$ (taille d'un pixel)

$$\overline{A_2 B_2} = f' \theta = 2 f'_1 \theta$$

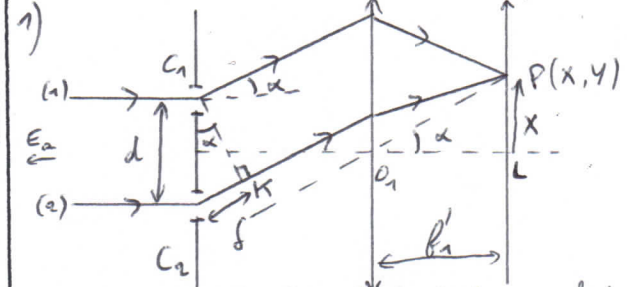
$$\Rightarrow \theta_{\min} = \frac{\overline{A_2 B_{2 \min}}}{2 f'_1} = \frac{a_1}{2 f'_1} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{15}$$

$$\theta_{\min} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

$$\theta_{\min} = 6 \cdot 10^{-7} \times \frac{180}{\pi} \times 60 \times 60 \Rightarrow \theta_{\min} \approx 0,1''$$

$$* \overline{A_2 B_{2 \max}} = 768 a_1 \Rightarrow \theta_{\max} = 768 \theta_{\min} \approx 2'$$

II) Interférences :



* On observe à l'infini (dans le plan focal image de L_1)
 $\Rightarrow \delta = (SP)_2 - (SP)_1 = (SC_2) + (C_2 K) + (KP) - (SC_1) - (C_1 P)$

$$\text{or } (SC_1) = (SC_2) \text{ (théorème de Talbot)}$$

$$\text{et } (KP) = (C_1 P) \text{ (principe de retour inverse de la lumière + théorème de Talbot)}$$

$$\Rightarrow \delta = (C_2 K) = C_2 K = d \sin \alpha \approx d \alpha$$

* Dans le triangle $O_1 L P$: $\tan \alpha \approx \alpha = \frac{x}{f'_1}$

$$\Rightarrow \delta = \frac{d x}{f'_1}$$

* Les 2 sources fictives C_1 et C_2 ont même amplitude ψ_0 et sont cohérentes (issues d'une même source physique)

$$\Rightarrow \mathbf{E}_2 = 2 \mathbf{E}_0 (1 + \cos \varphi) \text{ avec } E_0 = \frac{1}{2} \psi_0^2 \text{ et } \varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \Sigma_2(x) = \psi_0^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi d x}{\lambda f'_1} \right)$$

* les franges sont caractérisées par $E_2 = c^k \Rightarrow X = c^k$

\Rightarrow franges rectilignes horizontales $X = c^k$

* Entre 2 franges brillantes consécutives: $\Delta l = 2\pi$,

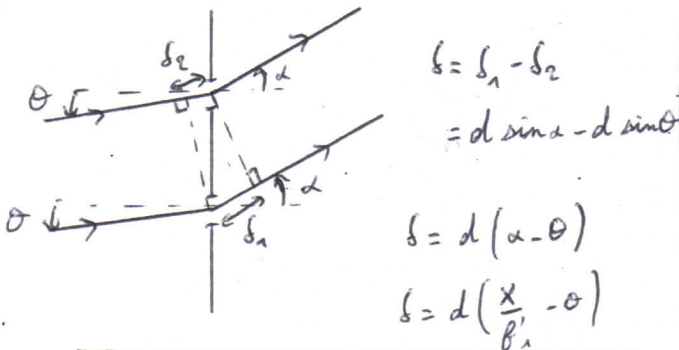
$$\Delta p = 1, \Delta s = d \Rightarrow \Delta\left(\frac{dX}{\beta_1'}\right) = \frac{d}{\beta_1'} i = d$$

$$\Rightarrow i = \frac{d\beta_1'}{d}$$

$$* p = \frac{s}{\lambda} = \frac{dX}{d\beta_1'} = 0 \Rightarrow X = 0$$

la frange d'ordre 0 se trouve en $X = 0$.

2)



$$\Rightarrow \Sigma_b(X) = \Psi_0^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi d(X - \beta_1' \theta)}{d\beta_1'}\right)$$

* les franges sont caractérisées par $E_b = c^k \Rightarrow X = c^k$

\Rightarrow franges rectilignes horizontales $X = c^k \Rightarrow$ inchangé

$$* \text{interfrange: } \Delta\left(d\left(\frac{X}{\beta_1'} - \theta\right)\right) = \frac{d\Delta X}{\beta_1'} - 0 = \frac{d}{\beta_1'} i = d$$

$$\Rightarrow i = \frac{d\beta_1'}{d} \text{ inchangé}$$

$$* p = \frac{s}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} \left(\frac{X}{\beta_1'} - \theta\right) = 0 \Rightarrow X = \beta_1' \theta$$

la frange d'ordre 0 se trouve en $X = \beta_1' \theta$.

\Rightarrow la figure d'interférences donnée par E_b est la même que celle de E_2 , mais décalée de $\beta_1' \theta$.

3) a) Les centres des figures d'interférences sont distants de $\beta_1' \theta$.

3) b) On aura brouillage des franges quand les franges brillantes de E_2 seront superposées aux franges sombres de E_b . Donc quand les centres des figures d'interférences seront décalés

de $(k + \frac{1}{2})i$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\Rightarrow \beta_1' \theta = (k + \frac{1}{2})i = (k + \frac{1}{2}) \frac{d\beta_1'}{d}$$

$$\Rightarrow d = (k + \frac{1}{2}) \frac{d}{\theta} \quad k \in \mathbb{Z}$$

3) c) $d = d_{\min} = d_0$ pour $k = 0$

$$\Rightarrow d_0 = \frac{d}{2\theta} \Rightarrow \theta = \frac{d}{2d_0}$$

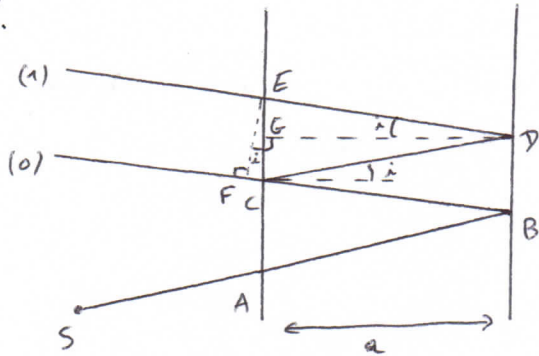
$$\theta = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{2 \times 1 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = \theta$$

$$\theta = 3 \cdot 10^{-5} \times \frac{180}{\pi} \times 60 \times 60 = 6'' = \theta$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 a'' a'' en''

QUATRIÈME PROBLÈME: Largeur spectrale d'un LASER (d'après banque PT 2012)

1)



différence de marche entre le rayon (0) et le rayon (1):

$$\delta = (SM)_1 - (SM)_0 = SA + AB + BC + CD + DE + EM_\infty - (SA + AB + BC + CF + FM_\infty)$$

or $EM_\infty = FM_\infty$ (thm de Ptolémée + principe de retour inverse de la lumière)

$$\Rightarrow \delta = CD + DE - CF = 2CD - CF$$

triangle CDG : $CD = \frac{a}{\cos i}$ et $CG = a \tan i$

triangle CFE : $CF = EC \sin i = 2 EG \sin i$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2a}{\cos i} - 2a \tan i \sin i$$

$$= \frac{2a}{\cos i} (1 - \sin^2 i) = 2a \cos i$$

(pas de réflexion déphasante, donc pas de $\frac{1}{2}$ supplémentaire)

\Rightarrow déphasage à l'infini entre 2 rayons émergents successifs :

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi a \cos i}{\lambda} = \varphi$$

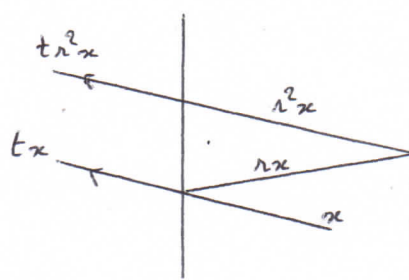
$$\arg \Delta_1 - \arg \Delta_0 = \varphi$$

$$\arg \Delta_2 - \arg \Delta_1 = \varphi \Rightarrow \arg \Delta_2 - \arg \Delta_0 = 2\varphi$$

⋮

$$\arg \Delta_k - \arg \Delta_0 = k\varphi$$

2)



$$\Rightarrow \frac{|\Delta_k|}{|\Delta_{k-1}|} = \frac{t_{n^2 x}}{t_x} = r^2 \Rightarrow \frac{|\Delta_k|}{|\Delta_{k-1}|} = r^2$$

$$\Delta_1 = r^2 e^{j\varphi} \Delta_0$$

$$\Delta_2 = r^2 e^{j\varphi} \Delta_1 = (r^2 e^{j\varphi})^2 \Delta_0$$

$$\Delta_k = (r^2 e^{j\varphi})^k \Delta_0$$

$$\Rightarrow \Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_k + \dots$$

$$= \Delta_0 \left(1 + r^2 e^{j\varphi} + (r^2 e^{j\varphi})^2 + \dots + (r^2 e^{j\varphi})^k + \dots \right)$$

$$\Delta = \Delta_0 \sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{j\varphi})^k$$

or $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$

or $|r^2 e^{j\varphi}| = r^2 < 1$

$$\Rightarrow \Delta(n) = \Delta_0(n) \sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{j\varphi})^k = \frac{\Delta_0(n)}{1 - r^2 e^{j\varphi}}$$

$$3) I = \frac{1}{2} \frac{\Delta \Delta^*}{\Delta_0 \Delta_0^*} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_0 \Delta_0^*}{\Delta_0 \Delta_0^*} \frac{1}{1 - r^2 e^{j\varphi}} \frac{1}{1 - r^2 e^{-j\varphi}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Delta_0 \Delta_0^*}{\Delta_0 \Delta_0^*} \frac{1}{1 + r^4 - r^2 (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \Delta_0 \Delta_0^*}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \varphi}$$

$$\text{or } \cos^2 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \Delta_0 \Delta_0^*}{1 + n^2 - 2n^2 + 4n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \Delta_0 \Delta_0^*}{(1-n^2)^2 + 4n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \Delta_0 \Delta_0^*}{(1-n^2)^2 + 4n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \Delta_0 \Delta_0^*}{(1-n^2)^2 + 4n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \Delta_0 \Delta_0^*}{(1-n^2)^2 + 4n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \Delta_0 \Delta_0^*}{(1-n^2)^2 + 4n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \Delta_0 \Delta_0^*}{(1-n^2)^2 + 4n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

On pose $I_0 = \frac{\Delta_0 \Delta_0^*}{2(1-n^2)^2}$ et $m = \frac{4n^2}{(1-n^2)^2}$

$$\Rightarrow I(\varphi) = \frac{I_0}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

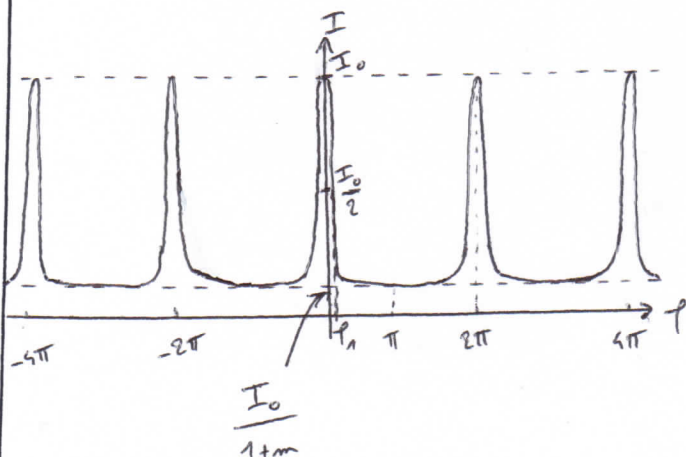
$n = 0,9 \Rightarrow m = 9 \cdot 10^1$

4) $m = 9 \cdot 10^1 \gg 1$

$$\Rightarrow I = \frac{I_0}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \ll I_0 \text{ sauf si } \sin^2 \frac{\varphi}{2} \text{ est proche de } 0$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$I = \frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_0}{2} \Rightarrow m \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow \varphi_1 = 2 \text{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\Delta\varphi = 2\varphi_1 \Rightarrow \Delta\varphi = 4 \text{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 4 \text{Arcsin} \frac{1-n^2}{2n}$$

or m est "grand" $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}}$ est "petit"

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2(1-n^2)}{n}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 0,4 \text{ rad}$$

5) $i=0 \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi a \cos i}{\lambda} = \frac{4\pi a}{\lambda}$

or $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi a \nu}{c}$

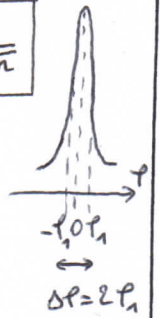
$$\Rightarrow \nu = \frac{c}{4\pi a}$$

$$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{c}{4\pi a} \Delta\varphi = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

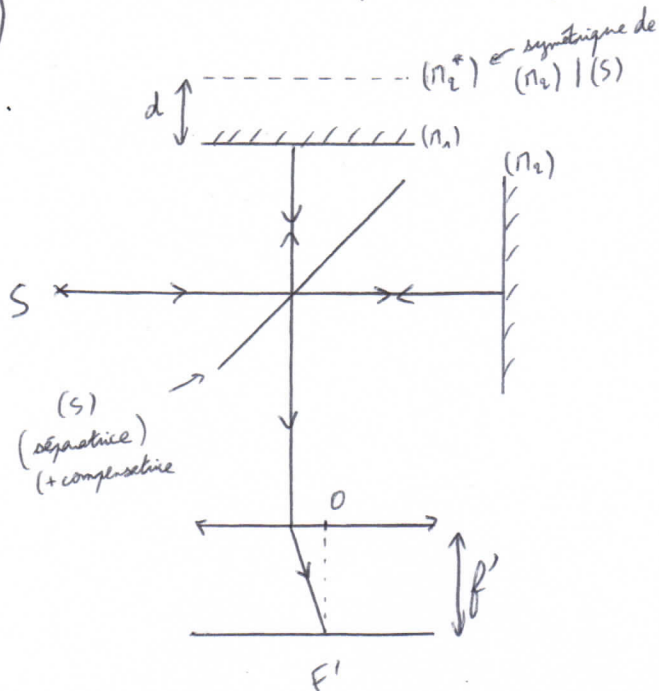
$$\Rightarrow \Delta\nu \ll \nu$$

\Rightarrow un laser émet une lumière qui est vraiment quasiment monochromatique.

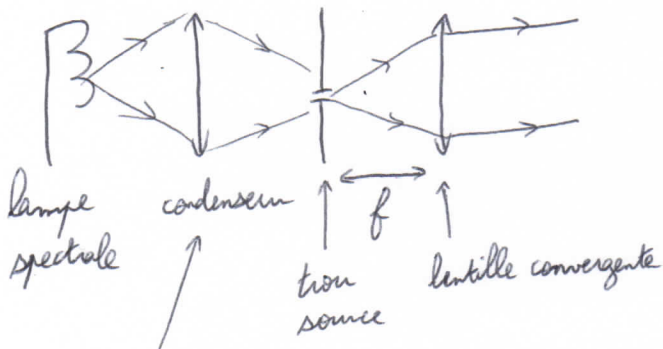


CINQUIEME PROBLEME: Longueur de cohérence d'un LASER (d'après banque PT 2012)

1)



On ne s'intéresse qu'à la lumière arrivant en F', c'est-à-dire la lumière émise avec une incidence nulle. On a tout intérêt à n'avoir qu'un faisceau de lumière parallèle en entrée:



permet d'amener un maximum de lumière sur le trou source.

2) différence de marche $\delta = 2d$ ($\delta = 2d \cos i$)
 $i=0$

interférences à 2 ondes: $I = 2I_0 (1 + \cos \tau)$

avec $\tau = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi d \nu}{c}$

$\Rightarrow I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi d \nu}{c}\right)$

3) $I_\nu = 2I_0 I_{0\nu} \frac{1}{1 + 4\pi^2 I_0^2 (\nu - \nu_0)^2}$

est maximum pour $\nu = \nu_0$

et $I_{\max \nu} = I_\nu(\nu_0) = 2I_0 I_{0\nu}$

$\Rightarrow I_\nu(\nu_0 \pm \Delta \nu) = \frac{I_{\max \nu}}{2} = \frac{2I_0 I_{0\nu}}{2}$
 $= \frac{2I_0 I_{0\nu}}{1 + 4\pi^2 I_0^2 (\nu_0 \pm \Delta \nu - \nu_0)^2}$

$\Rightarrow 4\pi^2 I_0^2 \Delta \nu^2 = 1$

$\Rightarrow \Delta \nu = \frac{1}{2\pi I_0}$

4) $I = \int dI = \int I_\nu d\nu = \int 2I_0 I_{0\nu} \frac{1}{1 + 4\pi^2 I_0^2 (\nu - \nu_0)^2} d\nu$

incohérentes car de fréquences différentes.

avec $I_{0\nu} = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi d \nu}{c}\right)$

$\Rightarrow I = 4I_0 I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos \frac{4\pi d \nu}{c}}{1 + 4\pi^2 I_0^2 (\nu - \nu_0)^2} d\nu$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 I_0^2 (\nu - \nu_0)^2} d\nu = \frac{1}{2\pi I_0} \left[\text{Arctan} \left(\frac{2\pi I_0 (\nu - \nu_0)}{1} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty}$
 $= \frac{1}{2I_0} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$

* on pose $\tau = \frac{2d}{c}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{4\pi d \nu}{c}}{1 + 4\pi^2 I_0^2 (\nu - \nu_0)^2} d\nu = \frac{\cos \frac{4\pi d \nu_0}{c}}{2I_0} \exp\left(-\frac{2d}{I_0 c}\right)$

$\Rightarrow I = 4I_0 I_0 \left(\frac{1}{2I_0} + \frac{1}{2I_0} \exp\left(-\frac{2d}{I_0 c}\right) \cos\left(\frac{4\pi d \nu_0}{c}\right) \right)$

$\Rightarrow I = 2I_0 \left(1 + \exp\left(-\frac{2d}{I_0 c}\right) \cos\left(\frac{4\pi d \nu_0}{c}\right) \right)$

5) Si $d \gg \tau_0 c$, $\exp\left(-\frac{2d}{\tau_0 c}\right) \ll 1$

$\Rightarrow I \simeq 2I_0 = c^2$

\Rightarrow l'effet des interférences disparaît car le terme de corrélation devient négligeable devant le terme constant.

\Rightarrow longueur de cohérence $l^* \simeq \tau_0 c$

L'énoncé donne: $2\Delta\nu = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$



$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{2\Delta\nu}{2}$
 $\simeq 3 \cdot 10^7 \text{ Hz}$

or of 3): $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_0} \Rightarrow \tau_0 = \frac{1}{2\pi\Delta\nu}$

$l^* = \tau_0 c = \frac{c}{2\pi\Delta\nu}$

$l^* \simeq \frac{c}{2\pi\Delta\nu} \simeq 1 \text{ m}$ (OK pour un laser)

Pq: $l^* = \tau_0 c \Rightarrow \tau_0 =$ durée d'un train d'onde

of 3): $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_0} \Rightarrow \tau_0 \Delta\nu \simeq 1$
 (résultat connu).

SIXIEME PROBLEME: Effet LASER

(d'après banque PT 2012)

1) puissance entrant en x = puissance sortanten $(x+dx)$ + puissance absorbée sur la longueur dx

$$\Rightarrow P(x) = P(x+dx) + P_{\text{absorbée}}$$

$P_{\text{absorbée}}$ = (nombre d'atomes par unité de temps qui subissent l'excitation sur une longueur dx) \times (énergie absorbée par un atome lors d'une excitation)

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{\text{absorbée}} &= (B P(x) N_1 dx) \times (E_2 - E_1) \\ &= B N_1 P dx h\nu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(x) - P(x+dx) = B N_1 h\nu P dx$$

$$\Rightarrow -\frac{dP}{P} = B N_1 h\nu dx$$

$$\Rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = -B N_1 h\nu x$$

$$\Rightarrow P = P_0 \exp(-B N_1 h\nu x)$$

$$\Rightarrow P = P_0 \exp(-Kx)$$

avec $K = B N_1 h\nu$ une constante.Il s'agit de la loi de Beer-Lambert.

$$\text{En chimie: } A = \log \frac{I_0}{I} = \epsilon(\nu) l c$$

$$\parallel \ln \frac{P_0}{P} = (B h\nu) x N_1$$

2) nombre d'atomes excités à l'instant t par unité de longueur = nombre d'atomes excités à l'instant $(t+dt)$ par unité de longueur + nombre d'atomes par unité de longueur qui subissent une désexcitation pendant dt

$$\Rightarrow N_2(t) = N_2(t+dt) + A N_2 dt$$

$$\Rightarrow N_2(t) - N_2(t+dt) = -dN_2 = A N_2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{dN_2}{dt} + A N_2 = 0$$

$$\Rightarrow N_2(t) = N_{20} \exp(-At)$$

 A est l'inverse d'un temps, en s^{-1}

$$\underline{A \approx 10^8 s^{-1}}$$

3) puissance entrant en x + puissance libérée par les désexcitations sur la longueur dx = puissance sortant en $(x+dx)$ + puissance absorbée sur la longueur dx

De même qu'en 1):

$$P(x) + B N_2 P dx h\nu = P(x+dx) + B N_1 P dx h\nu$$

$$\Rightarrow B P h\nu dx (N_2 - N_1) = P(x+dx) - P(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = B h\nu (N_2 - N_1) P$$

4) Il y a amplification de l'intensité lumineuse si $P \nearrow$, $\frac{dP}{dx} > 0$, donc si $N_2 > N_1$.

On dit qu'il y a inversion de population si $N_2 > N_1$ (plus d'atomes dans l'état excité que dans l'état fondamental), car à l'équilibre thermodynamique, $N_1 > N_2$ (la majorité des atomes se trouvent dans l'état d'énergie le plus bas).

Le physicien qui a mis au point une méthode permettant cette inversion de population (dite de pompage optique) est Alfred Kastler.

⇒ On n'a pas pris en compte le phénomène de désexcitation spontanée, car dans un laser, ce phénomène est négligeable devant le phénomène de désexcitation induite.

(l'état excité est quand même suffisamment stable pour que les émissions spontanées ne soient pas immédiates, c'est-à-dire que le coefficient A est relativement faible)

LASER = "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation"

= amplification de la lumière par émission stimulée (ou induite) de rayonnement