PT 2017 - 2018 DS3

PREMIER PROBLEME :

Moteur à allumage commandé (d'après banque PT 2017)

A) Moteurs thermiques :

Q1) * BC et DE sont des adiabatiques, il n'y a donc pas d'échange de chaleur avec les sources.

* CD : combustion ⇒ contact avec la source chaude

* ⇒ EB : contact avec la source froide

$\boxed{\text{CD : contact avec source chaude ; EB : contact avec source froide}}$

Les phases ne sont pas thermiquement réversibles car les parois du moteur ne suivent pas les variations de température du système. En effet, les parois sont refroidies (par circulation d'air ou d'eau) afin de ne pas subir de déformations.

Une combustion est un phénomène irréversible.

Q2) $\Delta U_{CD} \underset{\uparrow}{=} Q_{CD} + W_{CD} = Q_c + \int_C^D -P\,\cancel{dV}$

1^er^ principe ; $P_{ext} = P$ (mécaniquement réversible) ; isochore

$= n\,C_{V,m}\,(T_D - T_C)$ (1^ère^ loi de Joule (GP))

$$\Rightarrow \boxed{Q_c = n\,C_{V,m}\,(T_D - T_C)}$$

Q3) $\Delta U_{EB} = Q_{EB} + W_{EB} = Q_f + \int_E^B -P\,\cancel{dV}$ (1^er^ principe ; $P_{ext} = P$ (mécaniquement réversible) ; isochore)

$= n\,C_{V,m}\,(T_B - T_E)$ (1^ère^ loi de Joule (GP))

$$\Rightarrow \boxed{Q_f = n\,C_{V,m}\,(T_B - T_E)}$$

Q4) $\eta = \dfrac{\text{but}}{\text{coût}} = \dfrac{\text{fournir un travail}}{\text{chaleur prise à la source chaude}} = \dfrac{-W}{Q_c}$

$$\boxed{\eta = \frac{-W}{Q_c}} \qquad (W<0,\ Q_c>0 \text{ moteur})$$

1^er^ principe sur le cycle : $\underbrace{\Delta U}_{=0} = W + Q_c + Q_f$

(cycle et U fonction d'état)

$\Rightarrow -W = Q_c + Q_f$

$\Rightarrow \eta = \dfrac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \dfrac{Q_f}{Q_c} = 1 + \dfrac{T_B - T_E}{T_D - T_C}$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_D - T_C}}$$

Q5) On peut utiliser la loi de Laplace si on a une transformation adiabatique, réversible, pour un gaz parfait, avec $\gamma = c^{te}$.

$PV^\gamma = c^{te}$ or $P = \dfrac{nRT}{V}$ $\Rightarrow TV^{\gamma-1} = c^{te}$

$$\boxed{T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_D V_D^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1}}$$

or $V_C = V_D = V_{min}$ et $V_B = V_E = V_{max}$

$\Rightarrow \alpha^{\gamma-1} = \left(\dfrac{V_{max}}{V_{min}}\right)^{\gamma-1} = \dfrac{T_C}{T_B} = \dfrac{T_D}{T_E}$

$\Rightarrow T_C = T_B\,\alpha^{\gamma-1}$ et $T_D = T_E\,\alpha^{\gamma-1}$

or $\eta = 1 - \dfrac{T_E - T_B}{T_D - T_C} = 1 - \dfrac{T_E - T_B}{T_E\,\alpha^{\gamma-1} - T_B\,\alpha^{\gamma-1}}$

$= 1 - \dfrac{T_E - T_B}{\alpha^{\gamma-1}(T_E - T_B)} = 1 - \dfrac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}}$$

Q6) Si $\alpha \nearrow$, $\alpha^{\gamma-1} \nearrow$, $\frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} \searrow$,

$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} \nearrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \alpha \nearrow , \eta \nearrow \\ \text{Si } \alpha \searrow , \eta \searrow \end{array}}$$

On veut η grand, il faut $\alpha = \frac{V_{max}}{V_{min}}$ grand

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} V_{max} \text{ grand} \Rightarrow \underline{\text{problème d'encombrement}} \\ V_{min} \text{ petit} \end{array} \right.$

B) Combustion dans le cylindre :

Q7) $\boxed{C_8H_{18(g)} + \frac{25}{2} O_{2(g)} \longrightarrow 8\,CO_{2(g)} + 9\,H_2O_{(g)}}$

Q8) L'air contient $1\,O_2$ pour $4\,N_2$.

Soit la combustion d'une mole de C_8H_{18}.

* réactifs : $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ mol de } C_8H_{18} \\ 12{,}5 \text{ mol de } O_2 \quad (\text{mélange stoechiométrique}) \end{array} \right.$

$+\ 4 \times 12{,}5 = 50$ mol de N_2.

$\Rightarrow$ 63,5 mol avant la combustion

* après la combustion :

$\left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ mol de } CO_2 \\ 9 \text{ mol de } H_2O \end{array} \right.$

$+\ 50$ mol de N_2

$\Rightarrow$ 67 mol après la combustion

On passe de 63,5 mol à 67 mol, d'où l'hypothèse simplificatrice selon laquelle la quantité de gaz ne change pas.

En fait, n varie de $\frac{67 - 63{,}5}{63{,}5} \simeq \underline{5\,\%}$.

C) Equation de la chaleur :

Q9) $\vec{j}_{th} = j_{th_x}\,\vec{u}_x + \cancel{j_{th_y}}\,\vec{u}_y + \cancel{j_{th_z}}\,\vec{u}_z = j_{th}\,\vec{u}_x$

unidimensionnel

$\text{div}\,\vec{j}_{th} = \frac{\partial j_{th_x}}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial j_{th_y}}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial j_{th_z}}{\partial z}} = \frac{\partial j_{th}}{\partial x}$

unidimensionnel

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

Q10) * flux thermique : $\phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}$

$\Rightarrow j_{th}$ est en $W.m^{-2}$

$\Rightarrow \frac{\partial j_{th}}{\partial x}$ est en $W.m^{-3}$

C'est une <u>puissance volumique</u>.

* μ en $kg.m^{-3}$

c_p en $J.K^{-1}.kg^{-1}$

$\frac{\partial T}{\partial t}$ en $K.s^{-1}$

$\Rightarrow \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t}$ en $\cancel{kg}.m^{-3}\ J.\cancel{K^{-1}}.\cancel{kg^{-1}}.\cancel{K}.s^{-1}$

en $J.s^{-1}.m^{-3}$

en $W.m^{-3}$

C'est une <u>puissance volumique</u>.

Q11) * Soit P la puissance dégagée dans le volume V pendant la combustion : $P = P_{vol}\,V$

* La chaleur dégagée pendant le temps dt vaut :

- $P\,dt = P_{vol}\,V\,dt$
- (chaleur dégagée par une mole) $\times$ (nb de mol de combustible qui a réagi) $= Q \times (-dn_c)$

où $dn_c < 0$ (variation du nombre de mol de combustible)

$\Rightarrow P_{vol}\, V\, dt = -Q\, dn_c$

$\Rightarrow P_{vol} = -\dfrac{1}{V}\dfrac{dn_c}{dt} Q$

$\Rightarrow \boxed{P_{vol} = Q\, v_r}$

Q12) * loi de Fourier : $\boxed{\vec{j}^{\,d}_{th} = -\lambda\, \vec{\text{grad}}\, T}$

avec $\vec{\text{grad}}\, T = \dfrac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x + \cancel{\dfrac{\partial T}{\partial y}}\vec{u}_y + \cancel{\dfrac{\partial T}{\partial z}}\vec{u}_z$ unidimensionnel

$\Rightarrow \vec{j}^{\,d}_{th} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x = j^d_{th}\,\vec{u}_x$

$\Rightarrow \boxed{j^d_{th} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}}$

* $\vec{\text{grad}}\, T$ est orienté dans le sens des T croissants

$\Rightarrow$ le signe "-" signifie que le flux thermique (et donc $\vec{j}_{th}$) va du chaud vers le froid.

Q13) * Par définition du vecteur densité de courant de masse, la masse traversant S pendant dt est :

$= j\, S\, dt$

* (chaleur traversant S pendant dt) $= j^c_{th}\, S\, dt$

$=$ (masse traversant S pendant dt) $\times$ (énergie de l'unité de masse)

$= (j\, S\, dt) \times (c_p T)$

$\Rightarrow j^c_{th}\, S\, dt = j\, S\, dt\, c_p\, T$

$\Rightarrow j^c_{th} = j\, c_p\, T$

$\Rightarrow \vec{j}^{\,c}_{th} = c_p T \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{j}^{\,c}_{th} = \mu c_p T \vec{v}}$

Ou bien, pour respecter davantage l'énoncé :

* $\vec{j} = (\text{masse volumique})\, \vec{v}$
* Par analogie : $\vec{j}^{\,c}_{th} = (\text{énergie volumique})\, \vec{v}$

$\Rightarrow \vec{j}^{\,c}_{th} = \dfrac{m c_p T}{V}\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{j}^{\,c}_{th} = \mu c_p T \vec{v}}$

Q14) $\dfrac{\partial (j^d_{th} + j^c_{th})}{\partial x} + \mu c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = Q\, v_r$

$\Rightarrow \dfrac{\partial\left(-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} + \mu v c_p T\right)}{\partial x} + \mu c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = Q\, v_r$

$\Rightarrow -\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu_f U c_p \dfrac{\partial T}{\partial x} + \mu c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = Q\, v_r$

$\Rightarrow \boxed{\mu c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \mu_f U c_p \dfrac{\partial T}{\partial x} + Q\, v_r}$

En régime stationnaire : $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{d}{dx}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda \dfrac{d^2 T}{dx^2} - \mu_f U c_p \dfrac{dT}{dx} + Q\, v_r = 0}$

D) Bilan massique :

Q15) * $\underbrace{U}_{\text{vitesse}} \dfrac{dw_c}{\underbrace{dx}_{\text{longueur}}}$ ← sans dimension $\Rightarrow L.T^{-1}.L^{-1}$

$\Rightarrow T^{-1}$

* $\dfrac{\mu D}{\mu_f}\dfrac{d^2 w_c}{dx^2} \Rightarrow [D].L^{-2}$

$\dfrac{\mu}{\mu_f}$ sans dimension

$\Rightarrow [D].L^{-2} = T^{-1} \Rightarrow \boxed{[D] : L^2.T^{-1}}$

en $m^2.s^{-1}$

Q16) Il manque à l'évidence quelques notations dans l'énoncé ... !!

T_f = température des gaz frais loin de la flamme

(f comme frais, pas comme front ou flamme ...)

T_b = température des gaz brûlés

$w_{cf} = w_c$ au niveau des gaz frais loin de la flamme

Dans ce cas, au niveau des gaz frais loin de la flamme, $w_c = w_{cf}$

$\Rightarrow X = 1$

et $\theta = \dfrac{T_f - T_f}{T_b - T_f} = 0$ $\Rightarrow X = 1-\theta$ est cohérent

Et au niveau des gaz brûlés, $w_c = 0 \Rightarrow X = 0$

et $\theta = \dfrac{T_b - T_f}{T_b - T_f} = 1$ $\Rightarrow X = 1-\theta$ est cohérent

Bref...

Entre les gaz frais loin de la flamme et le front de flamme :

$T_f < T < T_b \Rightarrow \boxed{0 < \theta < 1}$

Q17) $\boxed{X = \dfrac{w_c}{w_{cf}} = \dfrac{\text{fraction massique en combustible}}{\text{fraction massique en combustible au niveau des gaz frais loin de la flamme}}}$

E) Vitesse de flamme :

Q18) Dans chacun des 3 domaines : $f = c^{te} = K$

$$\Rightarrow U \frac{d\theta}{dx} - D_f \frac{d^2\theta}{dx^2} = K$$

On cherche θ sous la forme : $\theta = A e^{\frac{x}{d}} + Bx + C$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{A}{d} e^{\frac{x}{d}} + B \quad \text{et} \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{A}{d^2} e^{\frac{x}{d}}$$

$$\Rightarrow U \frac{d\theta}{dx} - D_f \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{AU}{d} e^{\frac{x}{d}} + BU - D_f \frac{A}{d^2} e^{\frac{x}{d}}$$

$$= \frac{A}{d}\left(U - \frac{D_f}{d}\right) e^{\frac{x}{d}} + BU = K \quad (c^{te})$$

avec $U = \dfrac{D_f}{d} \Rightarrow d = \dfrac{D_f}{U}$

L'expression proposée convient avec $\boxed{d = \dfrac{D_f}{U}}$

Q19) $T(x)$ et $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ (via la densité de flux thermique et la loi de Fourier) varient continument.

or $\theta(x) = \dfrac{T(x) - T_f}{T_b - T_f}$

$\Rightarrow \theta(x)$ et $\dfrac{d\theta}{dx}$ sont des fonctions continues.

Q20) * $\theta_1(0) = \theta_2(0)$

$$\Rightarrow 1 - \varepsilon = 1 - \frac{f_0 l}{\varepsilon U} + \frac{f_0 d}{\varepsilon U}\left(1 - e^{-\frac{l}{d}}\right) \quad (1)$$

* $\dfrac{d\theta_1}{dx} = \dfrac{1-\varepsilon}{d} e^{\frac{x}{d}} \Rightarrow \left.\dfrac{d\theta_1}{dx}\right)_{x=0} = \dfrac{1-\varepsilon}{d}$

$\dfrac{d\theta_2}{dx} = \dfrac{f_0}{\varepsilon U} - \dfrac{f_0 d}{\varepsilon U d} e^{\frac{x-l}{d}} \Rightarrow \left.\dfrac{d\theta_2}{dx}\right)_{x=0} = \dfrac{f_0}{\varepsilon U}\left(1 - e^{-\frac{l}{d}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1-\varepsilon}{d} = \frac{f_0}{\varepsilon U}\left(1 - e^{-\frac{l}{d}}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \varepsilon = \frac{f_0 d}{\varepsilon U}\left(1 - e^{-\frac{l}{d}}\right) \quad (2)$$

* Avec (1), on obtient $0 = 1 - \dfrac{f_0 l}{\varepsilon U}$

$$\Rightarrow \boxed{l = \frac{\varepsilon U}{f_0}}$$

* (2) : $\boxed{1 - \varepsilon = \dfrac{f_0 d}{\varepsilon U}\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon U}{f_0 d}}\right)}$

Q21) $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow e^{-\frac{\varepsilon U}{f_0 d}} = 1 - \dfrac{\varepsilon U}{f_0 d} + \dfrac{\varepsilon^2 U^2}{2 f_0^2 d^2}$

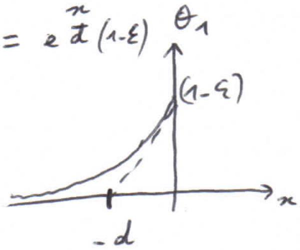
$$\Rightarrow 1 - \varepsilon = \frac{f_0 d}{\varepsilon U}\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\varepsilon U}{f_0 d} - \frac{\varepsilon^2 U^2}{2 f_0^2 d^2}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon U}{2 f_0 d} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon U}{2 f_0 d}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{U}{f_0} = 2d}$$

Q22) d est appelée "épaisseur de flamme" par analogie avec l'effet de peau ("épaisseur de peau").

Ici $\theta_1(x) = e^{\frac{x}{d}}(1-\varepsilon)$



$\theta_1 \neq 0$ sur une épaisseur de l'ordre de d.

Q23) cf Q18) : $d = \frac{D_f}{U}$

cf Q21) : $\frac{U}{f_0} = 2d$

$$\Rightarrow \frac{U}{f_0} = \frac{2 D_f}{U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \sqrt{2 f_0 D_f}}$$

$$\text{et } \boxed{d = \sqrt{\frac{D_f}{2 f_0}}}$$

AN : $U = \sqrt{2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-5}} = \sqrt{0,2}$

$$\Rightarrow \boxed{U = 0,4 \ m \cdot s^{-1}}$$

$$d = \sqrt{\frac{10^{-5}}{2 \cdot 10^4}} = \sqrt{\frac{10^{-9}}{2}} = \sqrt{5 \cdot 10^{-10}} = 2 \cdot 10^{-5} \ m$$

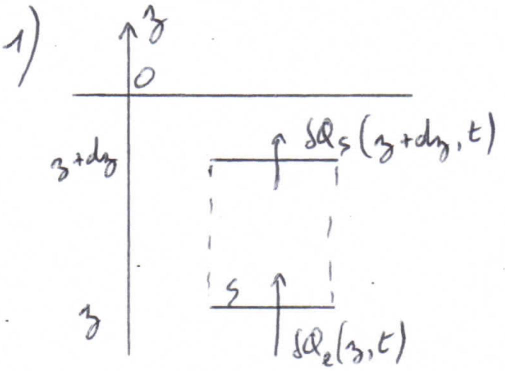
$$\boxed{d = 2 \cdot 10^{-5} \ m}$$

PT 2017-2018 DS3

DEUXIEME PROBLEME : Etude d'une installation exploitant l'énergie géothermique (d'après banque PT 2001)

I) Evolution de la température dans la croûte terrestre :

1)



· système : cylindre de section S de longueur dz

On suppose $P = c^{te}$.

* entre t et $t+dt$:

$$dH = (c\,dV)\,dT = (c\,S\,dz)\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dt$$

solide — capacité thermique volumique — variation temporelle de T

$$\Rightarrow dH = S\,c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dz\,dt$$

* $dH = \delta Q_p = \delta Q_e(z,t) - \delta Q_s(z+dz,t) + \delta Q_{source}$

· $\delta Q_{source} = \mu\,(S\,dz)\,dt$ — puissance volumique

· $\delta Q_e(z,t) = \iint_S \vec{j}_Q(z,t)\cdot\vec{dS}\,dt = j_Q(z,t)\,S\,dt$

· $\delta Q_s(z+dz,t) = j_Q(z+dz,t)\,S\,dt$

$$\Rightarrow dH = \underbrace{\left(j_Q(z,t) - j_Q(z+dz,t)\right)}_{-\frac{\partial j_Q}{\partial z}dz} S\,dt + \mu\,S\,dz\,dt$$

or loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda\,\vec{grad}\,T$

$$= -\lambda\cancel{\frac{\partial T}{\partial x}}\vec{u_x} - \lambda\cancel{\frac{\partial T}{\partial y}}\vec{u_y} - \lambda\frac{\partial T}{\partial z}\vec{u_z}$$

unidimensionnel

$$\Rightarrow j_Q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial j_Q}{\partial z} = +\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow S\,c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dz\,dt = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,S\,dz\,dt + \mu\,S\,dz\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{c\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu}$$

en régime permanent : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dz}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{\mu}{\lambda}}$$

2) $\Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{\mu}{\lambda}z + K_1$

$$\Rightarrow T(z) = -\frac{\mu}{2\lambda}z^2 + K_1 z + K_2$$

conditions aux limites :

· $T(0) = T_0 \Rightarrow K_2 = T_0$

· $j_Q(0) = j_0$ or $\vec{j}_Q = -\lambda\,\vec{grad}\,T$ (loi de Fourier)

$$j_Q = -\lambda\frac{dT}{dz} = -\lambda\left(-\frac{\mu}{\lambda}z + K_1\right)$$

$$j_Q(0) = -\lambda K_1 = j_0 \Rightarrow K_1 = -\frac{j_0}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(z) = -\frac{\mu}{2\lambda}z^2 - \frac{j_0}{\lambda}z + T_0}$$

3) $-\frac{\mu}{2\lambda}z^2 - \frac{j_0}{\lambda}z + T_0 = T_{473}$

$473\,K = 200°C$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{2\lambda}z^2 + \frac{j_0}{\lambda}z + (T_{473} - T_0) = 0$$

équation du 2^{nd} degré ⇒ 2 solutions

A la calculatrice : $\left|\begin{array}{l} z = -34 \text{ km} \\ z = -5{,}7 \text{ km} \end{array}\right.$

⇒ il faut forer à $\boxed{5{,}7 \text{ km}}$ de profondeur.
(inutile de forer plus profond)

4) $P = \mu V = 5{,}0.10^{-6} \times 1{,}0.10^{9} = 5{,}0.10^{3}\,W$

$\Rightarrow \boxed{P = 5{,}0 \text{ kW}}$

origine du phénomène : <u>radioactivité</u>

5) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{loi de Fourier}}}{j_Q} = -\lambda \dfrac{dT}{dz} = -\lambda\left(-\dfrac{\mu}{\lambda} z - \dfrac{j_0}{\lambda}\right)$

$\Rightarrow j_Q = \mu z + j_0$

$\Rightarrow \boxed{\phi = j_Q S = (\mu z + j_0) S}$

$\phi = \left(5{,}0.10^{-6} \times (-5000) + 100.10^{-3}\right).1{,}0.10^{6}$

$\boxed{\phi = 75 \text{ kW}}$

II) <u>Etude d'un module expérimental :</u>

1) 1^{er} principe pour des systèmes ouverts pour la saumure traversant l'installation :

$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\text{négligés}} = \underbrace{w_i}_{\text{pas de parties mobiles}} + q$

$\underset{\text{reçue par saumure}}{\mathcal{P}_{th}} = q_{m_s} q = q_{m_s}(h_{c_2} - h_{c_1})$

$= q_{m_s} c_{p_s}(T_{c_2} - T_{c_1})$

saumure = liquide incompressible

< 0 (la saumure cède de l'énergie)

puissance thermique extraite (cédée par la saumure) :

$\boxed{\mathcal{P}_{th_{\text{extraite}}} = q_{m_s} c_{p_s}(T_{c_1} - T_{c_2}) = 24 \text{ MW}}$

2) * rendement d'un moteur $= \dfrac{\text{but}}{\text{coût}}$

$r = \dfrac{\text{extraire un travail}}{\text{chaleur prise à la source chaude}} = \dfrac{-W}{Q_c}$

(moteur : $W < 0$, $Q_c > 0$, $Q_F < 0$)

* 1^{er} principe : $\Delta U = W + Q_c + Q_F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle et } U \text{ fonction d'état}}}{=} 0$

$\Rightarrow -W = Q_c + Q_F$

* 2^{nd} principe : $\Delta S = S_{éch} + \underbrace{S_{créée}}_{\text{réversible}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle et } S \text{ fonction d'état}}}{=} 0$

$\Rightarrow S_{éch} = \dfrac{Q_F}{T_F} + \dfrac{Q_c}{T_c} = 0$ (égalité de Clausius)

* $\Rightarrow r = \dfrac{-W}{Q_c} = \dfrac{Q_c + Q_F}{Q_c} = 1 + \dfrac{Q_F}{Q_c}$

or $\dfrac{Q_F}{T_F} + \dfrac{Q_c}{T_c} = 0 \Rightarrow \dfrac{Q_F}{Q_c} = -\dfrac{T_F}{T_c}$

$\Rightarrow \boxed{r = 1 - \dfrac{T_F}{T_c}}$

3) * On veut connaître la puissance mécanique <u>maximale</u> récupérable ⇒ on considère que le fluide du moteur décrit des cycles infinitésimaux <u>réversibles</u>.

* La source chaude (saumure) voit sa température évoluer de T_c à $T_c + dT_c$ ($dT_c < 0$) au cours d'un cycle infinitésimal.

* $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{reçu par le fluide moteur}}}{\delta Q_c} = -\underbrace{\delta C\, dT_c}_{\text{reçu par la source chaude (saumure)}}$

= cédé par la source chaude (saumure)

(d'où le signe −)

Rq : $T_c \searrow$, $dT_c < 0$, $\delta Q_c > 0$ (OK moteur) avec δC la capacité thermique de la masse δm de saumure circulant pendant le temps dt d'un cycle du fluide moteur.

$$r = 1 - \frac{T_F}{T_c} = \frac{-\delta W}{\delta Q_c} \text{ sur un cycle infinitésimal}$$

$$\Rightarrow \delta W = -\delta Q_c \left(1 - \frac{T_F}{T_c}\right) = \delta C \, dT_c \left(1 - \frac{T_F}{T_c}\right)$$

$$\Rightarrow W = \delta C \int_{T_{c1}}^{T_{c2}} dT_c - \delta C \, T_F \int_{T_{c1}}^{T_{c2}} \frac{dT_c}{T_c}$$

$$W = \delta C \left(T_{c2} - T_{c1} - T_F \ln \frac{T_{c2}}{T_{c1}}\right)$$

Le travail reçu par le fluide moteur pendant dt

avec $\delta C = c_{p_s} \delta m$

c_{p_s} : capacité thermique massique

$$\Rightarrow P = c_{p_s} \underbrace{\frac{\delta m}{dt}}_{q_{m_s}} \left(T_{c2} - T_{c1} - T_F \ln \frac{T_{c2}}{T_{c1}}\right)$$

puissance mécanique maximale récupérable :

$$\boxed{P_{max} = -q_{m_s} c_{p_s} \left(T_{c2} - T_{c1} - T_F \ln \frac{T_{c2}}{T_{c1}}\right) = 7{,}3 \text{ MW}}$$

$$\delta Q_c = -\delta C \, dT_c \Rightarrow Q_c = \delta C (T_{c1} - T_{c2})$$

$$e = \frac{-W}{Q_c} = \frac{T_{c1} - T_{c2} + T_F \ln \frac{T_{c2}}{T_{c1}}}{T_{c1} - T_{c2}}$$

$$\boxed{e = 1 - \frac{T_F}{T_{c1} - T_{c2}} \ln \frac{T_{c1}}{T_{c2}} = 30{,}3\%}$$

4) $r = \dfrac{-\delta W}{\delta Q_c} = 1 - \sqrt{\dfrac{T_F}{T_c}}$

$\delta Q_c = -\delta C \, dT_c$

$$\Rightarrow \delta W = \delta C \, dT_c \left(1 - \sqrt{\frac{T_F}{T_c}}\right)$$

$$\Rightarrow W = \delta C \int_{T_{c1}}^{T_{c2}} dT_c - \delta C \sqrt{T_F} \int_{T_{c1}}^{T_{c2}} \frac{dT_c}{\sqrt{T_c}}$$

$$\Rightarrow W = \delta C \left(T_{c2} - T_{c1} - 2\sqrt{T_F}\left(\sqrt{T_{c2}} - \sqrt{T_{c1}}\right)\right)$$

$$\boxed{P_{max} = -q_{m_s} c_{p_s} \left(T_{c2} - T_{c1} - 2\sqrt{T_F}\left(\sqrt{T_{c2}} - \sqrt{T_{c1}}\right)\right) = 4{,}0 \text{ MW}}$$

$$Q_c = \delta C (T_{c1} - T_{c2})$$

$$e = \frac{-W}{Q_c} = \frac{T_{c1} - T_{c2} + 2\sqrt{T_F}\left(\sqrt{T_{c2}} - \sqrt{T_{c1}}\right)}{T_{c1} - T_{c2}}$$

$$\boxed{e = 1 - \frac{2\sqrt{T_F}\left(\sqrt{T_{c1}} - \sqrt{T_{c2}}\right)}{T_{c1} - T_{c2}} = 16{,}6\%}$$

III 1) saumure = liquide incompressible : $\rho = c^{te}$

$\Rightarrow P + \rho g z = c^{te}$ $\uparrow z$ (statique des fluides)

$$P(z) + \rho g z = P(0) + \rho g \times 0 = P_0$$

$$\Rightarrow P = P_0 - \rho g z$$

$$P(-5000\text{ m}) = 1{,}00 \cdot 10^5 - 1060 \times 9{,}80 \times (-5000) = 5{,}20 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(-5000\text{ m}) = 520 \text{ bar}}$$

2) cf I)2) : $T(z) = -\dfrac{\mu}{2\lambda} z^2 - \dfrac{j_0}{\lambda} z + T_0$

$\Rightarrow T(-5000\text{ m}) = 453 \text{ K} = 180\,°\text{C}$

La pression de vapeur saturante à 180 °C est :

$$P_s = 1{,}00 \cdot \left(\frac{180}{100}\right)^4 = 10{,}5 \text{ bar}$$

Cette pression est atteinte à la profondeur

$$\boxed{-z = \frac{P_s - P_0}{\rho g} = 91,5\ m}$$

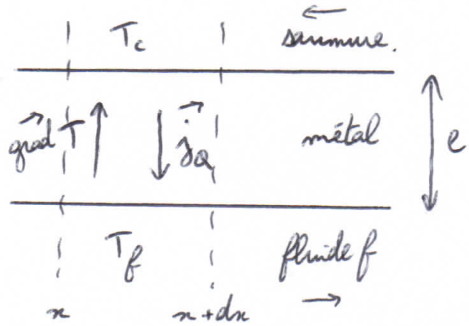
$\Rightarrow$ l'équilibre liquide-vapeur peut se réaliser

$\Rightarrow$ la saumure se vaporise (phénomène de cavitation) à une profondeur de 91,5 m.

3) 15 bar > 10,5 bar $\Rightarrow$ la saumure ne peut pas se vaporiser dans le puit (où la pression est > 15 bar, donc > 10,5 bar)

IV) Echangeur à contre-courant :

1)



* équation de la chaleur : $\mu_p c_p \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{régime permanent}} = \lambda_p \Delta T$

$\Rightarrow \Delta T = 0$ dans le métal

$\Rightarrow$ T évolue de façon affine dans la variable z en 1ère approximation (en supposant que les transferts thermiques sont suivant z uniquement).

* $\Rightarrow \|\overrightarrow{grad}\, T\| = \left|\frac{\partial T}{\partial z}\right| = \frac{T_c(x) - T_f(x)}{e}$

D'après la loi de Fourier :

$$j_Q = \lambda_p \frac{T_c(x) - T_f(x)}{e}$$

$$dP = j_Q\, dS = j_Q\, a\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{dP = \lambda_p \frac{T_c(x) - T_f(x)}{e}\, a\, dx} > 0$$

2) $dP = dP_{\substack{\text{cédée} \\ \text{par saumure}}} = -dP_{\substack{\text{reçue} \\ \text{par la} \\ \text{saumure}}}$

$$= -q_{m_s}\, \delta q_{\substack{\text{reçue par} \\ \text{la saumure}}}$$

1er principe pour la saumure entre x+dx et x :

$$\underbrace{h(x) - h(x+dx)}_{\substack{\text{circule de } x+dx \\ \text{vers } x}} + \underbrace{de_c + de_p}_{\text{négligés}} = \underbrace{\delta w_i}_{\substack{\text{pas de} \\ \text{parties} \\ \text{mobiles}}} + \delta q$$

$$\Rightarrow dP = -q_{m_s}\big(h(x) - h(x+dx)\big)$$

$$= -q_{m_s}(-dh) = q_{m_s}\, dh$$

or $dh = c_{p_s}\, dT_c$ (liquide incompressible)

$$\Rightarrow \boxed{dP = q_{m_s} c_{p_s}\, dT_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{m_s} c_{p_s} \frac{dT_c}{dx} = \frac{\lambda_p a}{e}(T_c - T_f)}$$

3) $dP = dP_{\text{reçue par le fluide f}} = q_{m_f}\, \delta q_{\text{reçue par f}}$

1er principe pour f entre x et x+dx :

$$\underbrace{h(x+dx) - h(x)}_{\substack{\text{circule de } x \\ \text{vers } x+dx}} + \underbrace{de_c + de_p}_{\text{négligés}} = \underbrace{\delta w_i}_{\substack{\text{pas de parties} \\ \text{mobiles}}} + \delta q$$

$$\Rightarrow dP = q_{m_f}\big(h(x+dx) - h(x)\big) = q_{m_f}\, dh$$

liquide incompressible $\rightarrow = q_{m_f} c_{p_f}\, dT_f$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} dP = q_{m_f} c_{p_f}\, dT_f \\ q_{m_f} c_{p_f} \frac{dT_f}{dx} = \frac{\lambda_p a}{e}(T_c - T_f) \end{array}}$$

4) $\Rightarrow$ $$\boxed{q_{mf}\, c_{pf}\, \frac{dT_f}{dx} = q_{ms}\, c_{ps}\, \frac{dT_c}{dx}}$$

On intègre entre 0 et x :

$$q_{mf}\, c_{pf} \int_0^x \frac{dT_f}{dx}\, dx = q_{ms}\, c_{ps} \int_0^x \frac{dT_c}{dx}\, dx$$

$$q_{mf}\, c_{pf} \int_{T_{f1}}^{T_f(x)} dT_f = q_{ms}\, c_{ps} \int_{T_{c2}}^{T_c(x)} dT_c$$

$$q_{mf}\, c_{pf} \left(T_f(x) - T_{f1}\right) = q_{ms}\, c_{ps} \left(T_c(x) - T_{c2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_f(x) = \frac{q_{ms}\, c_{ps}}{q_{mf}\, c_{pf}} \left(T_c(x) - T_{c2}\right) + T_{f1}}$$

5) $$q_{ms}\, c_{ps}\, \frac{dT_c}{dx} = \frac{\lambda_p a}{e} \left(T_c - T_f\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{ms}\, c_{ps}\, \frac{dT_c}{dx} = \frac{\lambda_p a}{e} \left[T_c(x) - \frac{q_{ms}\, c_{ps}}{q_{mf}\, c_{pf}} \left(T_c(x) - T_{c2}\right) - T_{f1}\right]}$$

6) $$\frac{q_{ms}\, c_{ps}}{q_{mf}\, c_{pf}} = \frac{42{,}5 \times 4{,}2}{89{,}3 \times 2{,}0} = 1{,}0$$

$$\Rightarrow q_{ms}\, c_{ps}\, \frac{dT_c}{dx} = \frac{\lambda_p a}{e} \left(T_{c2} - T_{f1}\right)$$

on intègre entre 0 et x :

$$\Rightarrow q_{ms}\, c_{ps} \left(T_c(x) - T_{c2}\right) = \frac{\lambda_p a}{e} \left(T_{c2} - T_{f1}\right) x$$

$$\Rightarrow \boxed{T_c(x) = T_{c2} + \frac{\lambda_p a}{q_{ms}\, c_{ps}\, e} \left(T_{c2} - T_{f1}\right) x}$$

7) $$T_c(x = L) = T_{c1} = T_{c2} + \frac{\lambda_p a}{q_{ms}\, c_{ps}\, e} \left(T_{c2} - T_{f1}\right) L$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{q_{ms}\, c_{ps}\, e \left(T_{c1} - T_{c2}\right)}{\lambda_p\, L \left(T_{c2} - T_{f1}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 27 \text{ m}}$$

8) On peut onduler la plaque métallique pour diminuer l'encombrement.