PT 2017-2018 DS 2

PREMIER PROBLEME : Etude de l'équilibre liquide-vapeur du mercure

I) Transformation d'une vapeur sèche de mercure :

1-1) Le gaz est porté rapidement à la température T_2 ⇒ élévation brutale de T

⇒ non quasi-statique (on n'a pas équilibre à chaque instant).

1-2) * définition de γ : $\gamma = \frac{C_{p_m}}{C_{v_m}}$

* relation de Mayer (GP) : $C_{p_m} - C_{v_m} = R$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} C_{p_m} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = 20,7 \ J.K^{-1}.mol^{-1} \\ C_{v_m} = \frac{R}{\gamma-1} = 12,4 \ J.K^{-1}.mol^{-1} \end{array}}$$

1-3) GP ⇒ $1^{ère}$ loi de Joule : $\Delta U = n C_{v_m} \Delta T$

$2^{ème}$ loi de Joule : $\Delta H = n C_{p_m} \Delta T$

$\Rightarrow \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T$ et $\Delta H = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}\Delta T$

⇒ γ caractéristique énergétique du GP

2-1) transformation isochore ($V = V_0 = c^{te}$)

$\delta W_s = -P_{ext}\, dV = 0 \Rightarrow \boxed{W_s = 0}$

2-2) 1^{er} principe : $\Delta U_s = Q_s + \underbrace{W_s}_{0} \Rightarrow \Delta U_s = Q_s$

or $1^{ère}$ loi de Joule (GP) : $\Delta U_s = n C_{v_m} \Delta T$

$\Delta U_s = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$ avec $n = \frac{P_1 V_0}{RT_1}$ (équation d'état GP)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U_s = Q_s = \frac{P_1 V_0}{\gamma - 1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 8 \ kJ}$$

2-3) $2^{ème}$ loi de Joule (GP) : $\Delta H_s = n C_{p_m} \Delta T$

or $C_{p_m} = \gamma C_{v_m} \Rightarrow \boxed{\Delta H_s = \gamma \Delta U_s = 13 \ kJ}$

2-4) Soit $\Sigma = \{S + \text{thermostat}\}$ = univers

Σ est donc un système isolé

$\Delta S_\Sigma = \underbrace{S_{échange}}_{isolé} + \sigma$. ($2^{nd}$ principe)

$= \Delta S_s + \Delta S_{thermostat}$

* $\Delta S_s = ?$

- identité thermodynamique : $dU = TdS - P\underbrace{dV}_{isochore}$

- $1^{ère}$ loi de Joule (GP) : $dU = n C_{v_m} dT$

$\Rightarrow dS = n C_{v_m} \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_s = n C_{v_m} \ln \frac{T_2}{T_1}$

or $n = \frac{P_1 V_0}{RT_1}$ et $C_{v_m} = \frac{R}{\gamma - 1}$

$\Rightarrow \Delta S_s = \frac{P_1 V_0}{(\gamma-1)T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}$

* $\Delta S_{thermostat} = \frac{-Q_s}{T_3}$ ($-Q_s$ = chaleur reçue par le thermostat)

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{P_1 V_0}{(\gamma-1)T_1} \ln\frac{T_2}{T_1} - \frac{Q_s}{T_3} = 3 \ J.K^{-1}}$$

$\sigma > 0$: il y a création d'entropie. C'est logique car la transformation est irréversible.

II) Etude de la vapeur saturante de mercure :

1)

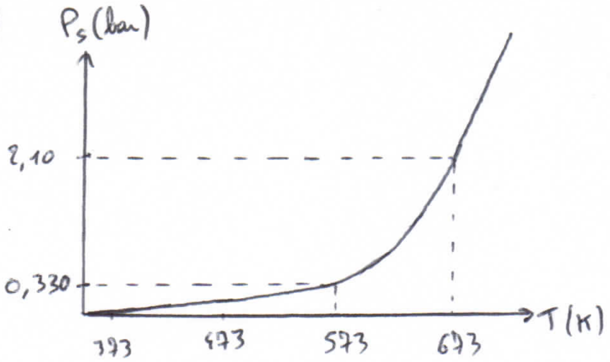
T (K)	373	473	573	673
P_s (bar)	$8,00.10^{-4}$	$2,80.10^{-2}$	0,330	2,10
A	-7,69	-7,68	-7,68	-7,66

car $A = \log P_s + \frac{2010}{T} - 3,88 \log T$

$\Rightarrow \langle A \rangle = \frac{-7,69 - 7,68 - 7,68 - 7,66}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle A \rangle = -7,68}$$

2-1)



2-2) $\log P_s = A - \frac{2010}{T} + 3,88 \log T$

$$\Rightarrow \ln P_s = A \ln 10 - \frac{2010 \ln 10}{T} + 3,88 \ln T$$

$$\Rightarrow \frac{dP_s}{P_s} = 2010 \ln 10 \frac{dT}{T^2} + 3,88 \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_s}{dT} = P_s(T)\left(\frac{2010 \ln 10}{T^2} + \frac{3,88}{T}\right)$$

$$= 10^{A - \frac{2010}{T}}\, T^{3,88}\left(\frac{2010 \ln 10}{T^2} + \frac{3,88}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP_s}{dT} = 10^{A-\frac{2010}{T}}\left(2010 \ln 10\, T^{1,88} + 3,88\, T^{2,88}\right)}$$

à $T = 573$ K : $\boxed{\frac{dP_s}{dT} = 6,89.10^{-3}\ \text{bar}.K^{-1} = 689\ \text{Pa}.K^{-1}}$

2-3) $\frac{dP_s}{dT} = \frac{l_{vap}}{T(v_v - v_l)}$

à $T = 573$ K : $\boxed{\frac{dP_s}{dT} = 741\ \text{Pa}.K^{-1}}$

$\boxed{\text{écart relatif : } \simeq 7\%}$

III) Augmentation de la pression de vapeur :

1) * 1ère méthode :

Soit v le volume massique du fluide :

$$v = \frac{V_0}{m_0}$$

$$V_0 = V_l + V_v \Rightarrow m_0 v = m_l v_l + m_v v_v$$

$$\Rightarrow v = \frac{m_l}{m_0} v_l + \frac{m_v}{m_0} v_v = (1-x) v_l + x v_v$$

$$\Rightarrow x = \frac{v - v_l}{v_v - v_l} = \frac{\frac{V_0}{m_0} - v_l}{v_v - v_l}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\frac{V_0}{m_0} - v_l}{v_v(T_1) - v_l} = 18\%}$$

$$\boxed{m_{v_1} = x_1 m_0 = 1,4\ \text{kg}}$$

* 2ème méthode :

hypothèse : vapeur = GP $\Rightarrow P_1 V_1 = n_1 R T_1$

- $P = P_{sat}(T_1)$ car équilibre liquide vapeur à T_1
- $V_1 = V_{gaz} \simeq V_0$ car $V_{liquide} < m_0 v_l = 0,6\ L \ll V_0 = 1\ m^3$
- $n_1 = \frac{m_{v_1}}{M}$

$$\Rightarrow \boxed{m_{v_1} = \frac{P_s(T_1) V_0 M}{R T_1} = 1,4\ \text{kg}}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{m_{v_1}}{m_0} = 17\%}$$

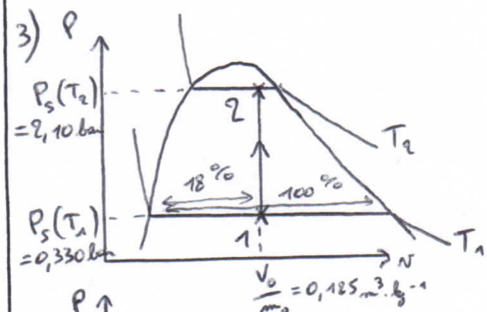
La 1ère méthode est parfaitement rigoureuse.

Quant à la 2ème méthode, on a dû faire deux approximations : • vapeur = GP (or vapeur = vapeur saturante $\Rightarrow$ assez loin du comportement du GP)

• $V_{gaz} \simeq V_0$

2) $\boxed{x_2 = \frac{\frac{V_0}{m_0} - v_l}{v_v(T_2) - v_l} = 98\%}$ et $\boxed{m_{v_2} = x_2 m_0 = 7,8\ \text{kg}}$

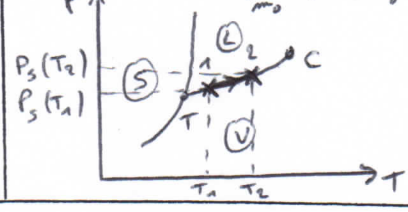
3)



transformation isochore $\left(\frac{V_0}{m_0} = c^{te}\right)$

$\Rightarrow$ verticale

(dessin pas à l'échelle / règle des moments)



le système reste diphasé

$\Rightarrow$ sur la courbe L $\rightleftarrows$ V

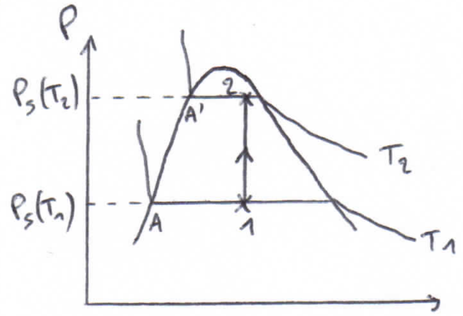
4) évolution isochore ($V = V_0 = c^{te}$) $\Rightarrow \Delta U = Q_S$

or $H = U + PV \Rightarrow \Delta U = \Delta H - \Delta(PV)$

$\xrightarrow{V = V_0 = c^{te}} = \Delta H - V_0 \Delta P$

$\rightarrow \Delta U = Q_S = \Delta H - V_0 \left(P_S(T_2) - P_S(T_1)\right)$

Reste à calculer $\Delta H = H_2 - H_1$



$\Delta H = H_2 - H_1 = (H_2 - H_{A'}) + (H_{A'} - H_A) + (H_A - H_1)$

$\Delta H = m_{v_2} \ell_{vap}(T_2) + m_0 c_\ell (T_2 - T_1) - m_{v_1} \ell_{vap}(T_1)$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_S &= m_{v_2} \ell_{vap}(T_2) - m_{v_1} \ell_{vap}(T_1) + m_0 c_\ell (T_2 - T_1) \\ &\quad - V_0 \left(P_S(T_2) - P_S(T_1)\right) \\ Q_S &= 1{,}8 \cdot 10^6 \text{ J} \end{aligned}}$$

5) $Q_S = P_0 \Delta t \rightarrow \boxed{\Delta t = \dfrac{Q_S}{P_0} = 1{,}8 \cdot 10^2 \text{ s} = 3 \text{ min}}$

6) $\Delta S = S_2 - S_1 = (S_2 - S_{A'}) + (S_{A'} - S_A) + (S_A - S_1)$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta S &= m_{v_2} \frac{\ell_{vap}(T_2)}{T_2} + m_0 c_\ell \ln \frac{T_2}{T_1} - m_{v_1} \frac{\ell_{vap}(T_1)}{T_1} \\ \Delta S &= 2{,}9 \text{ kJ.K}^{-1} \end{aligned}}$$

7) cf I) 2-4) : $\sigma' = \Delta S_S + \Delta S_{thermostat}$

avec $\Delta S_{thermostat} = -\dfrac{Q_S}{T_3}$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma' &= m_{v_2} \frac{\ell_{vap}(T_2)}{T_2} + m_0 c_\ell \ln \frac{T_2}{T_1} - m_{v_1} \frac{\ell_{vap}(T_1)}{T_1} - \frac{Q_S}{T_3} \\ \sigma' &= 0{,}6 \text{ kJ.K}^{-1} \end{aligned}}$$

$\sigma' > 0$: il y a création d'entropie (transformation irréversible) (effet Joule)

DEUXIÈME PROBLÈME : Machine à vapeur - Cycle de Rankine

1) * le liquide est très peu compressible donc l'allure d'une isotherme comme d'une isentropique est quasi-verticale ($v \simeq c^{te}$).

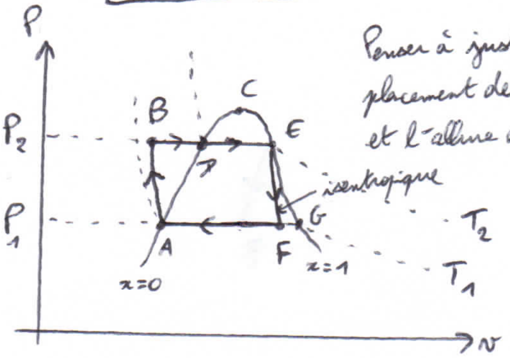
* liquide très peu compressible $\Rightarrow ds \simeq c\dfrac{dT}{T}$

($\text{identité thermodynamique} : dh = Tds + v\,dP$
$\simeq c\,dT$)

liquide incompressible

$\Rightarrow$ les isentropiques sont très voisines des isothermes

$\Rightarrow \boxed{T_B \simeq T_A = T_1}$



Penser à justifier le placement des points et l'allure du cycle.

2) * Sur les 2 isentropiques : $Q_{AB} = Q_{EF} = 0$
(= adiabatique + réversible)

Sur les 2 isobares : $\Delta H = Q_P$ ($Q = q$ car on raisonne sur l'unité de masse)

$\Rightarrow Q_{BE} = h_E - h_B$

$Q_{FA} = h_A - h_F$

* Le rendement du moteur correspond par définition au rapport du travail effectué au cours du cycle sur la chaleur effectivement reçue de la part de la source chaude $\left(\dfrac{\text{but}}{\text{coût}}\right)$

$$\rho = \frac{-W}{Q_{reçue}}$$

cycle $\Rightarrow \Delta U = 0 = W + Q = W + Q_{BE} + Q_{FA}$

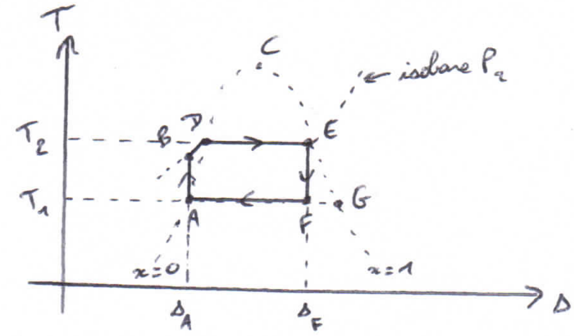
$Q_{reçue} = Q_{BE}$ (le + chaud)

$$\rho = \frac{Q_{BE} + Q_{FA}}{Q_{BE}} = 1 + \frac{Q_{FA}}{Q_{BE}} = \boxed{1 - \frac{h_F - h_A}{h_E - h_B} = \rho}$$

3) coordonnées entropiques :

- les isentropiques AB et EF sont des segments verticaux
- les isothermes DE et FA ———— horizontaux
- $T_B \simeq T_A = T_1 \Rightarrow$ B très proche de A
- la transformation BD (échauffement isobare d'un liquide) est voisine de la courbe de saturation (échauffement du liquide saturant)

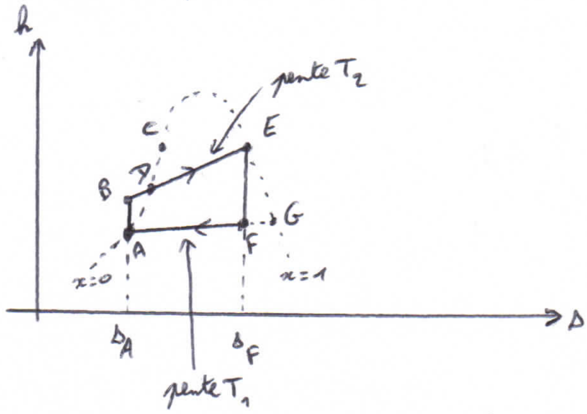
$\Rightarrow$ sur l'isobare P_2



coordonnées enthalpiques :

- isentropiques : segments verticaux
- isobares : $dh = Tds + v\,dP = Tds$ car $dP = 0$ (isobare)

$\Rightarrow$ droites de pente T



4) En confondant h_A et h_B (points très proches), on a ($v \simeq c^{te} \Rightarrow w_{AB} \simeq 0$)

$$\rho = 1 - \frac{h_F - h_A}{h_E - h_A}$$

A : P_1, T_1, liquide saturant $\Rightarrow h_A = 251\ kJ.kg^{-1}$

E : P_2, T_2, vapeur saturante sèche $\Rightarrow h_E = 2783\ kJ.kg^{-1}$

h_F ?

théo des moments : $x_F = \dfrac{AF}{AG} = \dfrac{s_F - s_A}{s_G - s_A}$

or $\underset{\text{isentropique}}{s_F = s_E} = s_v(P_2, T_2) = 6{,}52\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

$s_A = s_l(P_1, T_1) = 0{,}83\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

$s_G = s_v(P_1, T_1) = 7{,}90\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

$\Rightarrow x = 0{,}805$

$x = \dfrac{h_F - h_A}{h_G - h_A} \Rightarrow h_F = h_A + x(h_G - h_A)$

$h_F = h_l(T_1) + x\left(h_v(T_1) - h_l(T_1)\right)$

$h_F = 2{,}15.10^3\ kJ.kg^{-1}$

$$\Rightarrow \rho = 1 - \frac{2{,}15.10^3 - 251}{2783 - 251}$$

$\boxed{\rho = 25{,}1\ \%}$

PT 2017-2018 DS2

TROISIEME PROBLEME : Ecoulement du sang dans une artère

1) régime permanent $\Rightarrow$ accélération nulle $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

inventaire des actions extérieures :

* poids $m\vec{g} = -\rho \pi r^2 h g \vec{u_z}$
* forces de pression : $\Big(\underbrace{-P_1 \pi r^2}_{\text{en } z=h} + \underbrace{(P_1 + \rho g h + \Delta P)\pi r^2}_{\text{en } z=0}\Big)\vec{u_z}$

(latéralement, les forces de pression se compensent)

* la force de viscosité qui s'applique sur la surface latérale du cylindre $2\pi r h$. Elle s'oppose au mouvement relatif du fluide $\Rightarrow \propto -\vec{u_z}$

$$\vec{F} = \eta\, 2\pi r h \underbrace{\frac{dv}{dr}}_{<0} \vec{u_z}$$

$$\Rightarrow -\cancel{\rho \pi r^2 h g} - \cancel{P_1 \pi r^2} + (\cancel{P_1} + \cancel{\rho g h} + \Delta P)\pi r^2 + \eta 2\pi r h \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P\, r}{2\eta h}}$$

$$\Rightarrow v(r) = -\frac{\Delta P r^2}{4\eta h} + c^{te} \quad \text{or } v(R) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta h}(R^2 - r^2)}$$

2) 

La masse d^2m traversant dS pendant dt est celle contenue dans le cylindre de section dS et de longueur $(v\,dt)$.

$$\Rightarrow d^2m = \rho\, dS\, v\, dt \quad \Rightarrow dm = \left(\iint_S \rho v\, dS\right) dt$$

$$\Rightarrow D_m = \frac{dm}{dt} = \iint_S \rho v\, dS = \iint \rho v\, r\, dr\, \underbrace{d\theta}_{2\pi}$$

$$D_m = 2\pi\rho \int_0^R v(r)\, r\, dr = \frac{2\pi \rho \Delta P}{4\eta h}\int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr$$

$$= \frac{\pi \rho \Delta P}{2\eta h}\left(R^2\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R - \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\right)$$

$$D_m = \frac{\pi\rho\Delta P}{2\eta h}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) \Rightarrow \boxed{D_m = \frac{\pi \rho R^4 \Delta P}{8\eta h}}$$

3)a) $\Delta P = \dfrac{8\eta h D_m}{\pi \rho R^4}$ $\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\Delta P &= 1 \cdot 10^3 \text{ Pa} \\ &= 1 \cdot 10^{-2} \text{ bar}\end{aligned}}$

3)b) $D_m \propto R^4$

Si R est divisé par 2, D_m est <u>divisé par 16</u>.

3)c) $Re = \dfrac{v L \rho}{\eta}$ avec $L = 2R$ la distance transverse caractéristique de l'écoulement.

On prend pour v la vitesse au centre de l'écoulement

$$v(0) = \frac{\Delta P R^2}{4\eta h}$$

$$\Rightarrow Re = \frac{\Delta P R^2}{4\eta h}\,\frac{2R\rho}{\eta}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho R^3 \Delta P}{2\eta^2 h} = 4 \cdot 10^3}$$

$Re \gtrsim 3000 \Rightarrow$ l'écoulement est <u>turbulent</u>

PT 2017 - 2018 DS2

QUATRIEME PROBLEME : (d'après banque PT 2015)

Etude de l'alimentation en eau d'une maison

1) On a un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible (eau), donc conservation du débit volumique.

$$D_v = S v = c^{te} \Rightarrow S_0 v_0 = s v_s$$

vitesse au niveau de la surface libre — vitesse en sortie (dans canalisation)

or $S_0 = 25\,m^2 \gg s = 10^{-3}\,m^2$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 \ll v_s}$$

2) relation de Bernoulli pour un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible, en l'absence de parties mobiles :

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = c^{te}$$ avec ρ : masse volumique, z : altitude

$$\Rightarrow \frac{P_0}{\rho} + g z_0 + \cancel{\frac{v_0^2}{2}} = \frac{P_s}{\rho} + g z_s + \frac{v_s^2}{2}$$

or $P_0 = P_s = P_{atm}$

$$\Rightarrow g(\underbrace{z_0 - z_s}_{h}) = \frac{v_s^2}{2} \Rightarrow \boxed{v_s = \sqrt{2gh}}$$

$$v_s = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 20} = \sqrt{392} = \boxed{20\,m.s^{-1} = v_s}$$

3) $D_v = s v_s = 10^{-3} \times 20 = 2.10^{-2}\,m^3.s^{-1} = 20\,L.s^{-1}$

$$\boxed{D_v = s v_s = 2.10^{-2}\,m^3.s^{-1} = 20\,L.s^{-1}}$$

4) charge $= P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$

Il y a une perte de charge, c'est-à-dire :

$$\underbrace{P_s + \rho g z_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2}_{\text{charge en sortie}} < \underbrace{P_e + \rho g z_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2}_{\text{charge en entrée}}$$

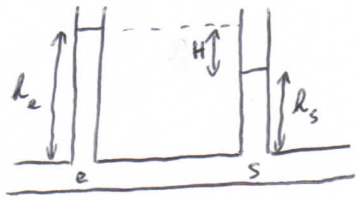
Ceci est dû au fait que le fluide est visqueux, d'où une perte d'énergie par frottements.

perte de charge : $\boxed{\Delta P_c = \left(P_e + \rho g z_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2\right) - \left(P_s + \rho g z_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2\right)}$

ou $\boxed{\Delta z_c = \left(\frac{P_e}{\rho g} + z_e + \frac{v_e^2}{2g}\right) - \left(\frac{P_s}{\rho g} + z_s + \frac{v_s^2}{2g}\right)}$

relation de Bernoulli : $\boxed{P_e + \rho g z_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2 = P_s + \rho g z_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \Delta P_c}$

5)



H = 2cm

* $z_e = z_s$ (canalisation horizontale)
* écoulement stationnaire d'un fluide incompressible

$\Rightarrow D_v = s v = c^{te}$ or $s = c^{te} \Rightarrow v = c^{te}$

$\Rightarrow v_e = v_s$

* Bernoulli $\Rightarrow \Delta P_c = P_e - P_s$
* statique des fluides : $P_e = P_{atm} + \rho g h_e$

(dans les tubes verticaux) $P_s = P_{atm} + \rho g h_s$

$$\Rightarrow \Delta P_c = \rho g (h_e - h_s) = \rho g H$$
$$= 1.10^3 \times 9{,}8 \times 2.10^{-2} = 2.10^2\,Pa$$

Pour une longueur de 10 m : $\Delta P_c = 2.10^2\,Pa$

$\Delta z_c = 2\,cm$

6) Pour une longueur de 1 km : $\Delta P_c = 2.10^4\,Pa$

$\Delta z_c = 2\,m$

(on a multiplié par $\frac{1.10^3}{10} = 100$)

0 : en haut du réservoir

s : sortie du robinet

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\cancel{v_0}^2}_{\text{négligé}} + \rho g z_0 = P_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s + \Delta P_c$$

$P_0 = P_s = P_{atm}$

$$\Rightarrow \quad \rho g \underbrace{(z_0 - z_s)}_{h = 20m} - \Delta P_c = \frac{1}{2}\rho v_s^2$$

$$\Rightarrow \quad v_s = \sqrt{2gh - \frac{2\Delta P_c}{\rho}} = \sqrt{2gh - \frac{2\rho g \Delta z_c}{\rho}}$$

$$\boxed{v_s = \sqrt{2g(h - \Delta z_c)}}$$

$$v_s = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times (20 - 2)} = \sqrt{3{,}5 \cdot 10^2} \simeq 1{,}9 \times 10$$

$\boxed{v_s \simeq 19\ m.s^{-1}}$ $\quad$ ($< 20\,m.s^{-1}$ OK cf 2))

7) Pour avoir en sortie la vitesse déterminée à la question 2), il faut que la pompe apporte une puissance qui compense la puissance dissipée par frottement du fluide visqueux.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P} = D_m \frac{\Delta P_c}{\rho} = (\rho \, \Delta v) \frac{\rho g \Delta z_c}{\rho}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \rho g \, \Delta v \, \Delta z_c}$$

$$\mathcal{P} = 1.10^3 \times 9{,}8 \times 10^{-3} \times 20 \times 2 = \boxed{4.10^2\,W = \mathcal{P}}$$