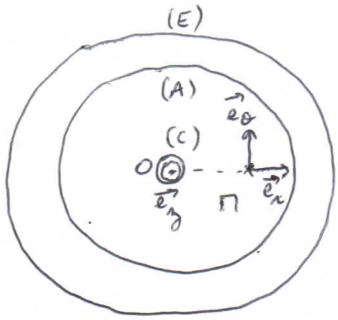
PT 2016 - 2017 DS6

PREMIER PROBLEME : Synthèse de composés semi-conducteurs : Epitaxie par jet moléculaire (d'après banque PT 2016)

"Mesure du vide" : les jauges de pression UHV

Q1) a)



b) * Le plan contenant M et $\left|\begin{array}{l} \text{l'axe } (Oz) \\ \perp \text{ à l'axe } (Oz) \end{array}\right.$

est plan de symétrie du problème (de la distribution de charges). Or $\vec{E}$ est un vecteur polaire donc $\vec{E}(M) \in$ à ce plan

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} \vec{E}(M) = E_r \vec{u_r} + \cancel{E_\theta} \vec{u_\theta} + E_z \vec{u_z} \\ \vec{E}(M) = E_r \vec{u_r} + E_\theta \vec{u_\theta} + \cancel{E_z} \vec{u_z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E \vec{u_r}$$

* On a invariance du problème (de la distribution de charges) par $\left|\begin{array}{l} \text{rotation autour de } (Oz) \\ \text{translation suivant } \vec{e_z} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} E(r, \cancel{\theta}, z) \text{ et } V(r, \cancel{\theta}, z) \\ E(r, \theta, \cancel{z}) \text{ et } V(r, \theta, \cancel{z}) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{V(M) = V(r)} \text{ et } \boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}}$$

Q2) a) $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$

ρ = densité volumique de charges

ε_0 : permittivité diélectrique du vide

b) * entre A et C : gaz raréfié assimilable au vide

$\Rightarrow \rho = 0$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0$

* équation de Maxwell - Faraday : $\vec{\text{rot}}\, \vec{E} = -\underbrace{\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\text{régime permanent}}$

$\vec{\text{rot}}\, \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$

* $\Rightarrow \operatorname{div}(-\vec{\text{grad}}\, V) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{\text{grad}}\, V) = 0$

$\Rightarrow \Delta V = 0$ (équation de Laplace)

* $$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}}_{V(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0}$$

c) On résout : $r \dfrac{dV}{dr} = K \Rightarrow \dfrac{dV}{dr} = \dfrac{K}{r}$

$\Rightarrow V(r) = K \ln r + K'$

conditions aux limites : $\left|\begin{array}{l} V(R_c) = 0 \\ V(R_g) = V_g \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} K \ln R_c + K' = 0 \\ K \ln R_g + K' = V_g \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_g = K \ln R_g - K \ln R_c = K \ln \dfrac{R_g}{R_c} \\ K' = -K \ln R_c \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K = \dfrac{V_g}{\ln \frac{R_g}{R_c}} \\ K' = -\dfrac{V_g \ln R_c}{\ln \frac{R_g}{R_c}} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = V_g \frac{\ln \frac{r}{R_c}}{\ln \frac{R_g}{R_c}}}$$

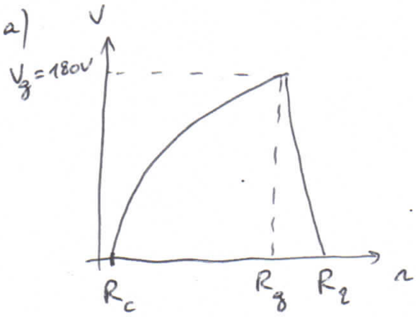
Q3) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z}$

$$= -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = -\frac{V_g}{\ln\frac{R_g}{R_c}}\,\frac{1}{r}\,\vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\frac{V_g}{\ln\frac{R_g}{R_c}}\,\frac{1}{r}\,\vec{u}_r}$$

$\propto -\vec{u}_r$ $(R_g > R_c)$ (OK dans le sens des potentiels décroissants)

Q4) a)



lecture graphique :

$$\boxed{\begin{array}{l} R_c = 1\text{ mm} \\ R_g = 60\text{ mm} \end{array}}$$

b) cf Q2)b) on a toujours $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$

$\Rightarrow V(r) = K_1 \ln r + K_2$

conditions aux limites : $\left| \begin{array}{l} V(R_g) = V_g \\ V(R_2) = 0 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = V_g\,\frac{\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_g}{R_2}}}$$

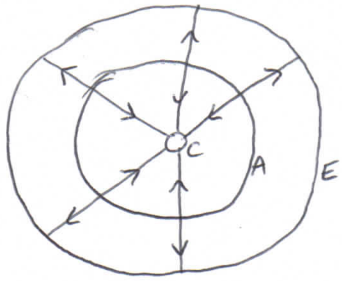
c) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = -\frac{V_g}{\ln\frac{R_g}{R_2}}\,\frac{1}{r}\,\vec{u}_r$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{V_g}{\ln\frac{R_2}{R_g}}\,\frac{1}{r}\,\vec{u}_r}$$

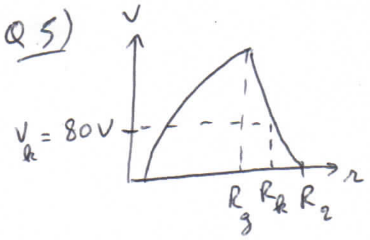
$\propto +\vec{u}_r$ $(R_2 > R_g)$ (OK dans le sens des potentiels décroissants)

d) entre C et A : $\vec{E} \propto -\vec{u}_r$

entre A et E : $\vec{E} \propto +\vec{u}_r$



Q5)



lecture graphique :

$$\boxed{R_k = 70\text{ mm}}$$

Q6) a) système : électron

référentiel : terrestre supposé galiléen

actions : * force électrique : $-e\vec{E}$

* poids : négligé
* interactions entre les é : négligées

RFD : $m\vec{a} = -e\vec{E}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

or $\vec{E}$ est porté par $\vec{u}_r$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ est porté par $\vec{u}_r$ $\forall t$

Initialement, la vitesse est nulle.

Donc $\vec{v}(t=0^+) \propto \vec{u}_r$

$\vec{a} \propto \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v}(t=0^{++}) \propto \vec{u}_r$

etc

$\Rightarrow \vec{v} \propto \vec{u}_r$ $\forall t$

$\Rightarrow$ <u>la trajectoire de l'é est rectiligne selon $\vec{u}_r$</u>

b) $\delta W = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -e\vec{E}\cdot\vec{dl} = e\,dV = d(eV) = -dE_p$

$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$

$\Rightarrow E_p = -eV$

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_p(r) = -eV(r) = -eV_g\,\dfrac{\ln\frac{r}{R_c}}{\ln\frac{R_g}{R_c}} & (R_c < r < R_g) \\[2ex] E_p(r) = -eV(r) = -eV_g\,\dfrac{\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_g}{R_2}} & (R_g < r < R_2) \end{array}}$$

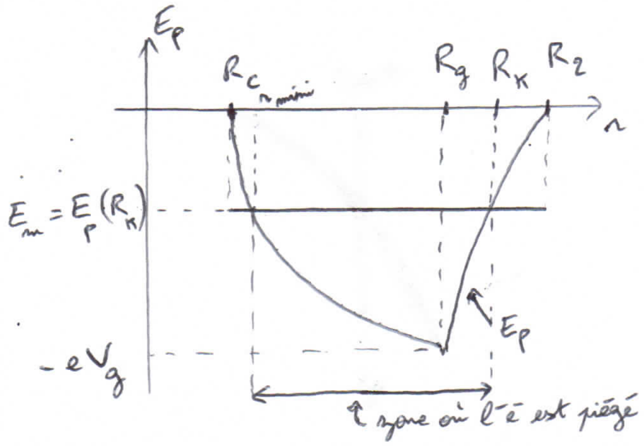
c) L'é n'est soumis qu'à une force (la force électrique) qui est une force conservative (elle dérive d'une E_p), donc l'énergie mécanique de l'é émis se conserve.

d) $r > R_g$: $E_p(r) = -eV(r) = -eV_g \dfrac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_g}{R_2}}$

$R_c < r < R_g$: $E_p(r) = -eV(r) = -eV_g \dfrac{\ln \frac{r}{R_c}}{\ln \frac{R_g}{R_c}}$

$E_m = c^{te} = E_m(r=R_K) = E_p(r=R_K) + \underbrace{E_c(r=R_K)}_{\substack{0 \\ \text{(vitesse nulle)}}}$

$E_m = E_p(r=R_K)$



e) $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p > E_p$

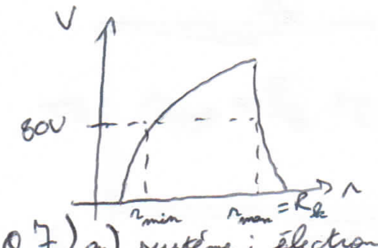
E_p doit être inférieur à E_m

d'où $\boxed{r_{max} = R_K = 70\,mm}$

et r_{min} est tel que $E_p(r_{mini}) = E_m = E_p(R_K)$

$-eV(r_{min}) = -eV(R_K)$

$\Rightarrow V(r_{min}) = V(R_K) = 80\,V$



lecture graphique sur la figure B-6 :

$\boxed{r_{min} = 7\,mm}$

Q7) a) système : électron

référentiel : terrestre supposé galiléen

action : force électrique $\vec{F} = -e\vec{E} \propto \vec{u_r}$

RFD : $m \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{e}{m}\vec{E} \propto \vec{u_r}$

$\Rightarrow \dot{v_z} = 0 \Rightarrow v_z = c^{te} = \underset{\uparrow \text{condition initiale}}{0}$

$\Rightarrow$ le mouvement de l'é se fait dans le plan $\perp$ (Oz)

* $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = (r\vec{u_r} + \underbrace{\cancel{z}}_{z = c^{te} = 0}\vec{u_z}) \wedge \underset{\propto \vec{u_r}}{\vec{F}}$

par choix du point O

$= \vec{0}$

* théorème du moment cinétique en O :

$\dfrac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \vec{0}$

On projette sur $\vec{u_z}$: $\dfrac{dL_z}{dt} = 0$

$\Rightarrow \boxed{L_z = c^{te}}$

b) * $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_e v^2 - eV_{sim}(r)$

* or $\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \underbrace{\cancel{\dot{z}\vec{u_z}}}_{\substack{\text{mouvement plan} \\ \text{(cf précédemment)}}}$

$\Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

* $\vec{L}(O) = \vec{OM} \wedge m_e\vec{v} = r\vec{u_r} \wedge m_e(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$

$= m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u_z}$

$\Rightarrow L_z = m_e r^2 \dot{\theta} \Rightarrow L_z^2 = m_e^2 r^4 \dot{\theta}^2$

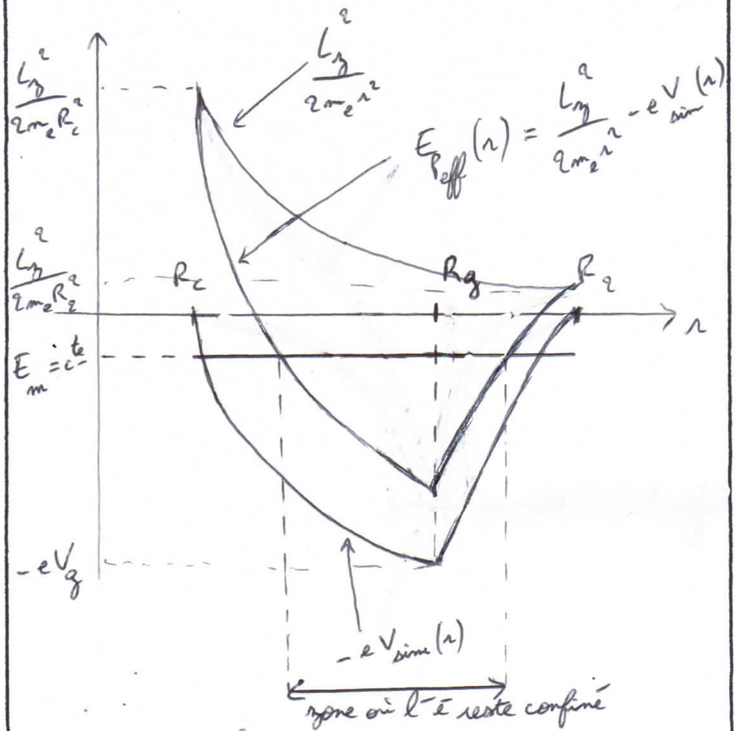
$\Rightarrow r^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{L_z^2}{m_e^2 r^2}$

* $\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_e \dfrac{L_z^2}{m_e^2 r^2} - eV_{sim}(r)$

$\Rightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{p_{eff}}(r)}$

avec $\boxed{E_{p_{eff}}(r) = \dfrac{L_z^2}{2 m_e r^2} - eV_{sim}(r)}$

c) Tout comme dans la question 6, on a encore conservation de l'énergie mécanique. On trace $E_{p_{eff}}(r)$ en sommant $\dfrac{L_z^2}{2m_e r^2}$ et $-eV_{sim}(r)$



$E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{p_{eff}}(r) > E_{p_{eff}}(r)$

$\Rightarrow E_{p_{eff}}(r)$ doit être inférieur à E_m

$\Rightarrow$ l'e^- reste confiné autour de la grille.

Q 8) cf Q 7) a)

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m}\vec{E} \propto \vec{u}_r$

$\Rightarrow \dot{v}_z = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = c^{te}$

* or $\dot{z}(t=0) = 0 \Rightarrow v_z = \dot{z} = 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow$ le mouvement de l'e^- se fait dans le plan $\perp (Oz)$.

Pas de mouvement de l'e^- suivant (Oz).

* si $\dot{z}(t=0) \neq 0$, alors $v_z = c^{te} \quad \forall t$
$\Rightarrow$ mouvement rectiligne uniforme selon Oz
$\Rightarrow$ l'e^- risque de quitter la sonde par ses extrémités sans percuter de molécule de gaz.

DS 6 PT 2016 - 2017

DEUXIEME PROBLEME : Câble coaxial

I) Electrostatique : (d'après banque PT 2003)

1) Maxwell - Gauss : $\boxed{\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ dans le vide ($\rho = 0$)

Maxwell - Faraday : $\boxed{\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$ régime permanent

2) symétries de la distribution de charges :

- le plan contenant (Oz) et le point M est plan de symétrie de la distribution $\Rightarrow \vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan ($\vec{E}$ vecteur polaire) $\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{u_r} + E_z \vec{u_z}$
- le plan $\perp$ à (Oz) et passant par M est plan de symétrie de la distribution (l très grand $\Rightarrow$ câble infini)

$\Rightarrow \vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan

$\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{u_r} + E_\theta \vec{u_\theta}$

$\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{u_r}$

* invariances de la distribution de charges :

- invariance par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow E(r, \cancel{\theta}, z)$
- invariance par translation le long de $(Oz) \Rightarrow E(r, \cancel{z})$ (l très grand $\Rightarrow$ câble "infini")

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}}$

3) a) surface de Gauss : cylindre de hauteur l, de rayon r, d'axe (Oz)

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \underbrace{\iint_{\text{bases}} \underset{\text{suivant } \vec{u_r}}{\vec{E}}.\underset{\pm \vec{u_z}}{\vec{dS}}}_{=0} + \iint_{S_{lat}} \underset{\vec{u_r}}{\vec{E}}.\underset{\vec{u_r}}{\vec{dS}}$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{S_{lat}} E(r)\vec{u_r}\,(r\,d\theta\,dz)\,\vec{u_r} = 2\pi l\, r\, E(r)$$

thm de Gauss : $\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

* $r<a$: $Q_{int} = 0 \Rightarrow E(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ pour $r<a$

* $a<r<b$: $Q_{int} = Q \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}\vec{u_r}}$ pour $a<r<b$

* $r>b$: $Q_{int} = +Q - Q = 0 \Rightarrow E(r) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ pour $r>b$

b) Maxwell-Gauss $\Rightarrow \text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ or $\vec{E} = E\vec{u_r}$

$\Rightarrow \text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE)}{\partial r}$ or $E(r)$

$\Rightarrow \text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{d(rE)}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

or les conducteurs ne sont chargés qu'en surface $\Rightarrow \rho = 0$

$\Rightarrow \frac{d(rE)}{dr} = 0 \Rightarrow rE = c^{te} \Rightarrow E(r) = \frac{c^{te}}{r}$

* $r<a$: $E(0) = 0$ pour des raisons de symétrie

or $E(r) = \frac{c^{te}}{r} \Rightarrow c^{te} = 0$ ($E(0) \not\to \infty$) $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ pour $r<a$

* $a<r<b$: conditions de passage du champ électrique à la traversée de la surface chargée en $r=a$:

$$\vec{E}(r=a^+) - \underbrace{\vec{E}(r=a^-)}_{\vec{0}} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0}\vec{u_r}$$

or $Q = \sigma_a(2\pi a l) \Rightarrow \sigma_a = \frac{Q}{2\pi a l}$

$\Rightarrow \vec{E}(r=a^+) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l a}\vec{u_r}$

or pour $a<r<b$, $\vec{E} = \frac{c^{te}}{r}\vec{u_r} \Rightarrow c^{te} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}\vec{u_r}}$ pour $a<r<b$

* $r>b$: $\vec{E}(r=b^+) - \vec{E}(r=b^-) = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0}\vec{u_r}$

avec $\vec{E}(r=b^-) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l b}\vec{u_r}$

et $\sigma_b = \frac{-Q}{2\pi b l}$

$\Rightarrow \vec{E}(r=b^+) - \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l b}\vec{u_r} = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 l b}\vec{u_r}$

$\Rightarrow \vec{E}(r=b^+) = \vec{0}$

or pour $r>b$, $\vec{E} = \frac{c^{te}}{r}\vec{u_r} \Rightarrow c^{te} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ pour $r>b$

4) * $r>b$, $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V = \vec{0} \Rightarrow V = c^{te} = V_2$ (continuité du potentiel)

* $a<r<b$, $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}\vec{u_r}$

or invariances $\Rightarrow V$ ne dépend que de r (comme pour $\vec{E}$)

$\Rightarrow \vec{\text{grad}}\,V = \frac{dV}{dr}\vec{u_r}$

$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 l r} \Rightarrow V = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln r + c^{te}$

en $r = b$, $V = V_2$ (continuité du potentiel)

$$\Rightarrow V_2 = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln b + c^{te} \Rightarrow c^{te} = V_2 + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln b$$

$$\Rightarrow V = V_2 + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{b}{r}$$

en $r = a$, $V = V_1 = V_2 + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}$ (continuité du potentiel)

$$\Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}}$$

5) $C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}}$

Pour $l = 1\,m \Rightarrow \boxed{C'_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}}$

6) densité volumique d'énergie électrostatique : $\frac{dW_e}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

* $r < a$: $\boxed{\frac{dW_e}{d\tau} = 0}$
* $a < r < b$: $\boxed{\frac{dW_e}{d\tau} = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 l^2 r^2}}$
* $r > b$: $\boxed{\frac{dW_e}{d\tau} = 0}$

$$W_e = \iiint_{\text{tout l'espace}} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) d\tau = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 l^2 r^2}\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

$E = 0$ pour $r < a$ et $r > b$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 l^2} \ln\frac{b}{a}\, 2\pi l = \boxed{\frac{Q^2 \ln\frac{b}{a}}{4\pi\varepsilon_0 l}} = W_e$$

or $W_e = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

on identifie $\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}}$

7) AN : $C'_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}} = 1.10^{-10}\ F.m^{-1}$

$$\boxed{C'_0 = 1.10^2\ pF.m^{-1}}$$

2) Magnétostatique :

1) Maxwell-flux : $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$

Maxwell-Ampère : $\boxed{\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \underbrace{\cancel{\vec{j}}}_{\text{vide}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}}_{\text{régime permanent}} = \vec{0}}$

2) * symétries : le plan contenant (Oz) et le point M est plan de symétrie de la distribution de courant

Or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow \vec{B} \perp$ à ce plan

$\Rightarrow \vec{B} = B\vec{u_\theta}$ orthoradial

* invariances de la distribution de courant :

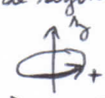
- invariance par rotation autour de (Oz) de la distribution de courant $\Rightarrow B(r, \cancel{\theta}, z)$
- invariance par translation le long de $(Oz) \Rightarrow B(r, \theta, \cancel{z})$ (l très grand $\Rightarrow$ câble "infini")

$\Rightarrow B(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u_\theta}}$$

3) a) thm d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé}$

$\mathcal{C}$: cercle d'axe (Oz) et de rayon r, orienté positivement autour de (Oz)



$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \oint_{\mathcal{C}} B(r)\vec{u_\theta}\, dl\, \vec{u_\theta} = \oint_{\mathcal{C}} B(r)\, dl$$

$$\underset{r = c^{te} \text{ sur } \mathcal{C}}{=} B(r) \oint_{\mathcal{C}} dl = 2\pi r B(r)$$

* $r < a$: $I_{enlacé} = 0 \Rightarrow B(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$
* $a < r < b$: $I_{enlacé} = +I_0 \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\vec{u_\theta}}$$

* $r > b$: $I_{enlacé} = \underset{\text{en } r=a}{+I_0} - \underset{\text{en } r=b}{I_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

b) Maxwell-Ampère : $\vec{rot}\,\vec{B} \underset{\text{régime permanent}}{=} \mu_0\vec{j}$ or $\vec{B} = B\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow B_r = B_z = 0$ et $B = B_\theta = B(r)$

$$\Rightarrow \vec{rot}\,\vec{B} = (0 - 0)\vec{u_r} + (0 - 0)\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rB)}{\partial r} - 0\right)\vec{u_z}$$

$\Rightarrow \vec{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{d(rB)}{dr}\vec{u_z}$ car B ne dépend que de r

or les courants ne sont qu'en surface, pas en volume

$\Rightarrow \vec{j} = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{rot}\,\vec{B} = \vec{0}$

$\Rightarrow \dfrac{d(rB)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow rB = c^{te} \quad \Rightarrow B(r) = \dfrac{c^{te}}{r}$

* $\underline{r<a}$: $B(0) = 0$ car tout plan contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courant

$\Rightarrow \vec{B}(0) \perp$ à ces plans $\Rightarrow \vec{B}(0) = \vec{0}$

or $B(r) = \dfrac{c^{te}}{r} \quad \Rightarrow c^{te} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

$(B(0) \not\to \infty)$

* $\underline{a<r<b}$: condition de passage en $r=a$:

$\vec{B}(r=a^+) - \underbrace{\vec{B}(r=a^-)}_{\vec{0}} = \mu_0 \vec{j}_{S_1} \wedge \vec{n}_{12} = \mu_0 \vec{j}_{S_1} \wedge \vec{u}_r$

$= \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \vec{u}_\theta$

or $\vec{B} = \dfrac{c^{te}}{r} \vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad c^{te} = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$

* $\underline{r>b}$: $\vec{B}(r=b^+) - \vec{B}(r=b^-) = \mu_0 \vec{j}_{S_2} \wedge \vec{u}_r$

$\vec{B}(r=b^+) - \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi b} \vec{u}_\theta = \mu_0 \dfrac{-I_0}{2\pi b} \underbrace{\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r}_{\vec{u}_\theta}$

$\Rightarrow \vec{B}(r=b^+) = \vec{0}$

or $\vec{B} = \dfrac{c^{te}}{r} \vec{u}_\theta \quad \Rightarrow c^{te} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

4) $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \displaystyle\int_{z=0}^{l} \int_{r=a}^{b} \left(\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta\right) \cdot \left(dr\,dz\,\vec{u}_\theta\right)$

$\phi = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi} l \displaystyle\int_a^b \dfrac{dr}{r} = \boxed{\dfrac{\mu_0 I_0\, l \ln\frac{b}{a}}{2\pi} = \phi}$

5) $\phi = L I_0 \quad \Rightarrow \boxed{L = \dfrac{\mu_0 l \ln\frac{b}{a}}{2\pi}}$

$\Rightarrow \boxed{L'_0 = \dfrac{\mu_0 \ln\frac{b}{a}}{2\pi}}$

6) densité volumique d'énergie magnétique : $\dfrac{dW_m}{d\tau} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$

* $\underline{r<a}$: $\boxed{\dfrac{dW_m}{d\tau} = 0}$

* $\underline{a<r<b}$: $\boxed{\dfrac{dW_m}{d\tau} = \dfrac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2}}$

* $\underline{r>b}$: $\boxed{\dfrac{dW_m}{d\tau} = 0}$

$W_m = \displaystyle\iiint_{\text{tout l'espace}} \dfrac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \int_{z=0}^{l} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{b} \left(\dfrac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2}\right) (r\,dr\,d\theta\,dz)$

$B=0$ pour $r<a$ et $r>b$

$W_m = \dfrac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2} \displaystyle\int_a^b \dfrac{dr}{r}\; 2\pi l = \boxed{\dfrac{\mu_0 l I_0^2}{4\pi} \ln\dfrac{b}{a} = W_m}$

or $W_m = \dfrac{1}{2} L I_0^2$

on identifie $\Rightarrow \boxed{L = \dfrac{\mu_0 l \ln\frac{b}{a}}{2\pi}}$

7) $\underline{AN}$: $L'_0 = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \ln\dfrac{b}{a} = \boxed{1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}} = L'_0}$

8) $L'_0 C'_0 = \left(\dfrac{\mu_0}{2\pi} \ln\dfrac{b}{a}\right) \times \left(\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}\right) = \mu_0 \varepsilon_0$

$\boxed{L'_0 C'_0 = \mu_0 \varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}}$

PT 2016-2017 DS6

TROISIEME PROBLEME : Action exercée sur un condensateur à quadrants

1) $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$ avec S l'aire des 2 armatures en regard et e la distance qui les sépare.

$$S = 4 \times \frac{\theta R_1^2}{2}$$

l'armature 1 est constituée de 2 quadrants, doublement en regard avec l'armature 2, or ces condensateurs sont en parallèles, et 2x2=4 !

surface d'un quadrant d'angle θ $\left(\begin{array}{l} 2\pi \to S = \pi R_1^2 \\ \theta \to S = \frac{\theta}{2} R_1^2 \end{array} \right)$

$$\Rightarrow \boxed{C = K\theta \quad \text{avec } K = \frac{2\varepsilon_0 R_1^2}{e}}$$

2) L'énergie du condensateur est : $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C U^2$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} K\theta U^2 = \frac{\varepsilon_0 R_1^2}{e} \theta U^2}$$

3) $\left.\begin{array}{l} \theta \text{ varie} \Rightarrow C \text{ varie} \\ \text{or } U = c^{te} \end{array}\right\} \Rightarrow Q = CU$ varie

$\Rightarrow$ le déplacement d'un angle $d\theta$ va provoquer un mouvement de charges. Le générateur devra effectuer ou récupérer un travail pour amener ou retirer dQ d'une plaque à l'autre

4) $\delta W_{él} = P dt = U I dt = U dQ$

$$\Rightarrow \boxed{\delta W_{él} = U dQ}$$

$$\delta W_{él} = U d(CU) = U^2 dC = K U^2 d\theta$$

$\boxed{\delta W_{él} = K U^2 d\theta}$ travail fourni par le générateur pour maintenir U constante.

5) bilan énergétique : $\boxed{d\mathcal{E}_e = \delta W_{él} + \delta W_{op}}$

La variation d'énergie électrostatique est égale au travail fourni par le générateur + le travail fourni par l'opérateur.

$$\Rightarrow \delta W_{op} = d\mathcal{E}_e - \delta W_{él}$$
$$= d\left(\frac{1}{2} K\theta U^2\right) - KU^2 d\theta$$
$$= \frac{KU^2}{2} d\theta - KU^2 d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta W_{op} = -\frac{KU^2}{2} d\theta}$$

6) $\delta W_{op} = \Gamma_{op} \, d\theta \Rightarrow \Gamma_{op} = -\dfrac{KU^2}{2}$

or $\Gamma_\theta = -\Gamma_{op}$ (on opère réversiblement, donc infiniment lentement)

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_\theta = \frac{KU^2}{2}}$$

7) A l'équilibre, on a $\Gamma_\theta - C_t \theta = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} KU^2 - C_t\theta = 0 \Rightarrow \boxed{U = \sqrt{\frac{2C_t\theta}{K}}}$$

$$\Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{\sqrt{\frac{2C_t\theta_1}{K}}}{\sqrt{\frac{2C_t\theta_2}{K}}} = \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}}$$

$$\Rightarrow U_1 = U_2 \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}}$$

$$\Rightarrow U = 23 \sqrt{\frac{60}{15}}$$

$\Rightarrow \boxed{U = 46\,V}$ pour $\theta = 60°$

PT 2016-2017 DS6

QUATRIEME PROBLEME : Four à induction (d'après banque PT 2009)

I) Distributions orthoradiales de courant électrique :

I-1) Distribution volumique orthoradiale de courants :

a-1) Le plan contenant M et $\perp$ à l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courant (cylindre infini)

or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow \vec{B}_1(M) \perp$ à ce plan

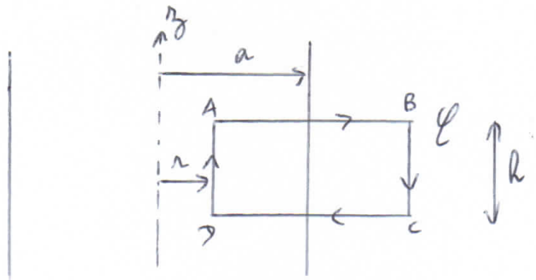
$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 \text{ est porté par } \vec{u}_z}$

a-2) on a invariance de la distribution de courant par :

- translation suivant $\vec{u}_z$ (cylindre infini) $\Rightarrow B_1(r,\theta,\cancel{z})$
- rotation autour de (Oz) $\Rightarrow B_1(r,\cancel{\theta},z)$

$\Rightarrow \boxed{B_1(r)}$

b)



équation de Maxwell-Ampère : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \cancel{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ régime permanent

$\Rightarrow$ thm d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

$= \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot\vec{dS}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_A^B \cancel{\underbrace{\vec{B}}_{\vec{u}_z}\cdot\underbrace{\vec{dl}}_{\vec{u}_r}} + \int_B^C \cancel{\underbrace{\vec{B}}_{\substack{\vec{B}=\vec{0}\\ \text{car } r>a}}\cdot\vec{dl}} + \int_C^D \cancel{\underbrace{\vec{B}}_{\vec{u}_z}\cdot\underbrace{\vec{dl}}_{-\vec{u}_r}} + \int_D^A \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_D^A \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_D^A B_1(r)\vec{u}_z\, dh\, \vec{u}_z \quad r = c^{te} \text{ de D vers A}$$

$$= B_1(r)\, h$$

$$= \mu_0 \iint_S \alpha\, r\, \vec{u}_\theta \cdot (+dr\, dh\, \vec{u}_\theta)$$

$$B_1(r)\, h = \mu_0\, \alpha\, h \int_r^a r'\, dr'$$

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 \alpha}{2}(a^2 - r^2)$$

$$\boxed{\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 \alpha}{2}(a^2 - r^2)\,\vec{u}_z}$$

I-2) Distribution surfacique orthoradiale :

a) équation de Maxwell-flux : $\text{div}\,\vec{B} = 0$

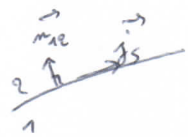
équation de Maxwell-Ampère : $\vec{rot}\,\vec{B} = \underbrace{\cancel{\mu_0 \vec{j}}}_{\text{modèle surfacique}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}}_{\text{régime permanent}} = \vec{0}$

Avec $\vec{B}_0$ uniforme, $\text{div}\,\vec{B}_0 = \cancel{\frac{\partial B_0}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial B_0}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial B_0}{\partial z}} = 0$

et $\vec{rot}\,\vec{B}_0 = \vec{0}$

$\Rightarrow$ un champ uniforme $\vec{B}_0$ satisfait aux équations de Maxwell à l'intérieur du cylindre.

b)



$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$

continuité de la composante normale : $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\vec{n}_{12} = 0$

discontinuité de la composante tangentielle : $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_S$

1 : $r = a^-$
2 : $r = a^+$ $\Rightarrow \vec{n}_{12} = \vec{u}_r$

$$\underbrace{\vec{B}(a^+)}_{\vec{0}} - \underbrace{\vec{B}(a^-)}_{\vec{B}_0} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_r$$

$\Rightarrow \vec{B}_0 = -\mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_r = -\mu_0 j_S\, \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r$

$$\boxed{\vec{B}_0 = \mu_0 j_S \vec{u}_z}$$

II) Four à induction :

II-1) Champ magnétique à l'intérieur du four "vide" :

a) courant traversant la hauteur H :

$j_S H = N i \Rightarrow \boxed{j_S = \frac{Ni}{H}}$

b/α) cf I/2)c) : $\vec{B_0} = \mu_0 j_S \vec{u_z} = \boxed{\mu_0 \frac{N}{H} i \vec{u_z} = \vec{B_0}}$

b/β) $B_0 = \mu_0 \frac{N}{H} i = \mu_0 \frac{N}{H} I_m \cos\omega t = K I_m \cos\omega t$

$\Rightarrow \boxed{K = \mu_0 \frac{N}{H}}$

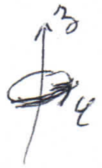
II-2) Terme principal du champ électromagnétique du four "chargé"

a) équation de Maxwell-Faraday : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\iint_S \vec{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} \underset{\uparrow\ \text{thm de Stokes}}{=} \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \underset{\uparrow\ S \text{ fixe dans le temps}}{=} -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$\mathcal{C}$: cercle d'axe (Oz) de rayon r

$d\vec{l} = +dl\,\vec{u_\theta} = +r\,d\theta\,\vec{u_\theta}$



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int E_1(r,t)\,\vec{u_\theta}\, r\,d\theta\,\vec{u_\theta} = 2\pi r E_1(r,t)$$

$$= -\frac{d}{dt}\underbrace{\iint_S}_{\text{disque qui s'appuie sur } \mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iint B_0\,\vec{u_z}\, dS\,\vec{u_z}$$

$$= -\pi r^2 \frac{dB_0}{dt} \quad \text{pour } r<a$$

$$\Rightarrow 2\pi r E_1(r,t) = -\pi r^2 \frac{d}{dt}\left(K I_m \cos\omega t\right)$$

$$= +\pi r^2 K I_m \omega \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1(r,t) = \frac{K I_m \omega}{2}\, r \sin\omega t}$$

b) Pour un conducteur linéaire, homogène, isotrope, immobile, loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j_1} = \frac{\gamma K I_m \omega}{2}\, r \sin\omega t\,\vec{u_\theta}}$$

II-3) Puissance transférée :

a) $\boxed{P_v = \vec{j_1}\cdot\vec{E_1} = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2}{4}\, r^2 \sin^2\omega t}$

b) $P_{instantanée} = \iiint P_v\, d\tau = \iiint P_v\, r\,dr\,\underset{\uparrow\, 2\pi}{d\theta}\,\underset{\uparrow\, H}{dz}$

$$P_{instantanée} = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2}{4} \sin^2\omega t\ 2\pi H \underbrace{\int_0^a r^3\,dr}_{\frac{a^4}{4}}$$

$$\boxed{P_{instantanée} = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2 \pi a^4 H}{8} \sin^2\omega t}$$

c) $P = \langle P_{instantanée} \rangle$ or $\langle \sin^2\omega t \rangle = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{P = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2 a^2 V}{16}}$ avec $V = \pi a^2 H$

d) on note E_{fusion} l'énergie requise pour la fusion

$$E_{fusion} + E_{\substack{\text{fuites} \\ \text{par rayonnement}}} = P t_f$$

$$E_{fusion}(1+\eta) = P t_f$$

or $E_{fusion} = \Delta_{fus}h \times M$

$$\Rightarrow t_f = \frac{M \Delta_{fus}h\,(1+\eta)}{P}$$

$$\boxed{t_f = \frac{16 M \Delta_{fus}h\,(1+\eta)}{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2 a^2 V} = 3.10^2 s = 6 \text{ min}}$$