PT 2016 - 2017 DS 5

PREMIER PROBLEME : Synthèse de composés semi-conducteurs : Epitaxie par jet moléculaire (d'après banque PT 2016)

↳ Suivi de la croissance d'une monocouche par diffraction RHEED :

Q1) La relation de De Broglie souligne la dualité onde - corpuscule de la matière :

p : quantité de mouvement du corpuscule.

λ : longueur d'onde de l'onde.

Q2) $\left.\begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 \\ p = m_e v \end{array}\right\} \Rightarrow E_c = \frac{p^2}{2 m_e}$

or $p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow E_c = \frac{h^2}{2 m_e \lambda^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E_c}}} = \frac{6.10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.10^{-31} \times 1.10^4 \times 2.10^{-19}}}$$

$$\lambda = \frac{6.10^{-34}}{\sqrt{36 \cdot 10^{-46}}} = \frac{6.10^{-34}}{6 \cdot 10^{-23}} = 1.10^{-11}\ \text{m}$$

$$\boxed{\lambda = 0{,}01\ \text{nm}}$$

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E_c}} \Rightarrow$ un faisceau monocinétique ($E_c = c^{te}$) est aussi monochromatique ($\lambda = c^{te}$).

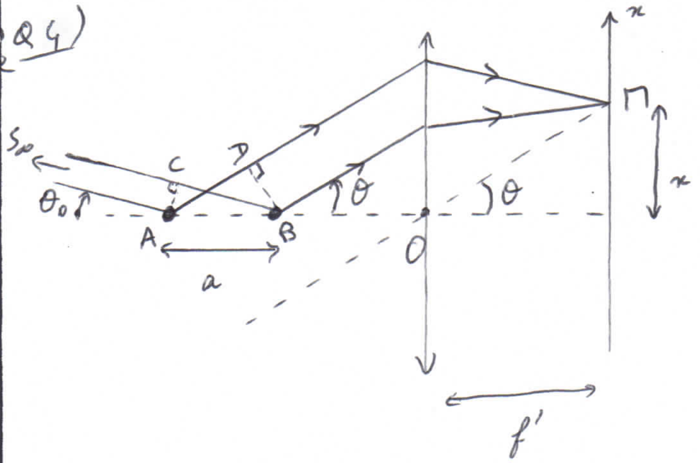
Q3) Le phénomène de diffraction est négligeable si la dimension d de l'obstacle diffractant est très grande devant la longueur d'onde λ.

Diffraction négligeable si $d \gg \lambda$.

Ici $r_{Ga} \simeq 130\,\text{pm}$ et $\lambda = 0{,}01\ \text{nm} \Rightarrow r_{Ga} \simeq 10\lambda$

$\Rightarrow$ le phénomène de diffraction n'est pas négligeable

Q4)



Les 2 rayons diffractés sont parallèles entre eux, ils vont donc converger dans le plan focal image de la lentille, donc sur l'écran.

Q5) $\delta = (SM)_A - (SM)_B = \big((SA) + AD + (DM)\big)$
$\qquad - \big((SC) + CB + (BM)\big)$

or $(SA) = (SC)$ (thm de Malus)

et $(DM) = (BM)$ (principe de retour inverse de la lumière + thm de Malus)

$\Rightarrow \delta = AD - CB$

or dans le triangle ABD : $AD = AB \cos\theta = a \cos\theta$

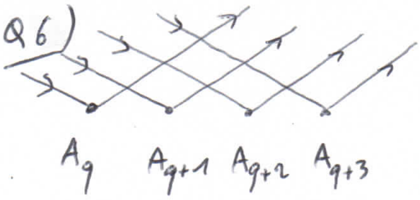
" " " " ABC : $CB = AB \cos\theta_0 = a \cos\theta_0$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = a(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

On a interférences constructives si l'ordre d'interférences $\frac{\delta}{\lambda}$ est un entier $m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\lambda}(\cos\theta - \cos\theta_0) = m$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \cos\theta_0 + m\frac{\lambda}{a}} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Q6) 

Si les ondes passant par A_q et A_{q+1} interfèrent constructivement, alors $\delta = a(\cos\theta - \cos\theta_0) = m\lambda$. ($m \in \mathbb{Z}$)

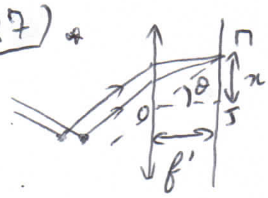
Et alors les 2 ondes passant par A_{q+1} et A_{q+2} interfèrent constructivement aussi, car même différence de marche.

Et les 2 ondes passant par A_q et A_{q+2} interfèrent constructivement aussi, car la différence de marche vaut $2\delta = 2m\lambda$ = nombre entier $\times \lambda$

etc.

$\Rightarrow$ les positions des maxima d'intensité sont toujours les positions déterminées par la condition

$$\cos\theta = \cos\theta_0 + m\frac{\lambda}{a}$$

Q7) * 

triangle OnJ : $\tan\theta = \dfrac{x}{f'}$

approximation de Gauss : $\tan\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \theta = \frac{x}{f'} \quad \Rightarrow \quad x = f'\theta$$

* $\cos\theta = \cos\theta_0 + m\dfrac{\lambda}{a}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{\theta_0^2}{2} + m\frac{\lambda}{a}$$

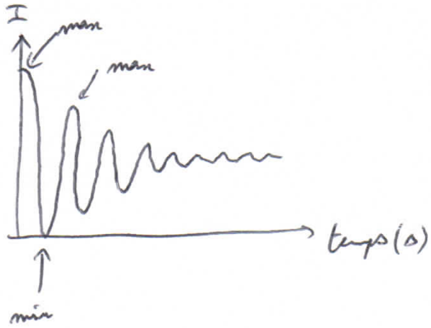
$$\Rightarrow \theta = \sqrt{\theta_0^2 - 2m\frac{\lambda}{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_m = f'\sqrt{\theta_0^2 - 2m\frac{\lambda}{a}}}$$

Q8) On veut observer un maximum d'ordre m.
Pour un x donné, il faut que m soit grand, donc λ petit $\left(x_m = f'\sqrt{\theta_0^2 - 2m\frac{\lambda}{a}}\right)$.

or $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_e E_c}}$ donc λ petit $\Leftrightarrow$ E_c grand

$\Rightarrow$ <u>il faut utiliser des faisceaux de haute énergie</u>

Q9) 

1 pseudo-période correspond à la formation d'une couche. On compte 22,5 périodes

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{22,5 couches}}$

Q10) 22,5 couches formées en 500 s

$\Rightarrow$ 1 couche formée en $\dfrac{500}{22,5} \simeq 22\,s$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{1 couche est formée en 22 s}}$

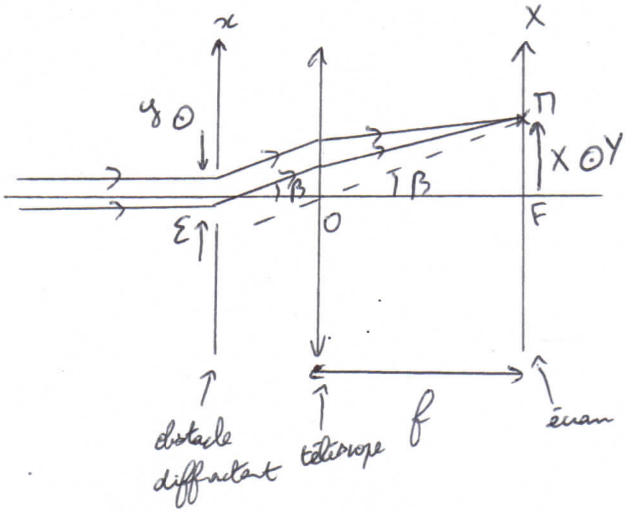
Q11) L'amplitude des oscillations décroît à cause des couches inférieures de plus en plus nombreuses : elles continuent malgré tout à influer sur la figure de diffraction.
Comme elles créent des interférences constructives, l'intensité minimale augmente au cours du temps.
Ça peut aussi être dû aux "trous" et "bosses" d'atomes.
On peut aussi supposer que la section des couches est décroissante (comme une pyramide).

PT 2016-2017 DS 5

DEUXIEME PROBLEME : Interférométrie stellaire

1) Diffraction par un obstacle de taille caractéristique ε :

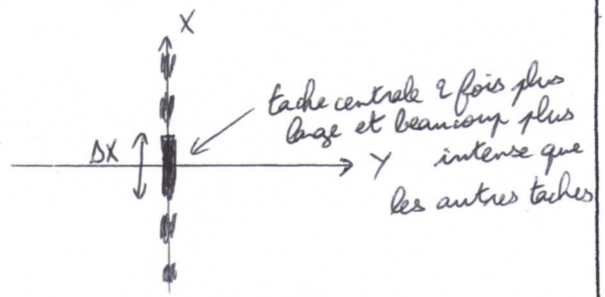
a)



On observe dans le plan focal image de la lentille, les différents rayons arrivant en M sont donc issus d'un même faisceau de lumière parallèle. C'est donc à l'infini qu'interfèrent ces différents rayons : il s'agit de la théorie de la diffraction à l'infini.

b) La fente est infinie selon Oy $\Rightarrow$ pas de diffraction dans cette direction.

*



c) On a $\boxed{\sin\alpha \simeq \dfrac{\lambda}{\varepsilon}}$

Dans l'approximation de Gauss : $\alpha \ll 1$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \simeq \dfrac{\lambda}{\varepsilon}}$

Dans le triangle OFM : $\tan\beta \simeq \beta = \dfrac{X}{f}$

$\Rightarrow X = f\beta \Rightarrow \underbrace{\Delta X}_{\text{largeur totale} = 2X} = f\,(\underbrace{2\alpha}_{\text{rayon angulaire}})$

$\Rightarrow \boxed{\Delta X = \dfrac{2f\lambda}{\varepsilon}}$

$$\Delta X = \frac{2\times 24\times 635.10^{-9}}{14.10^{-2}} = \frac{24\times 635}{7}.10^{-7}$$

$$\simeq 2,2.10^{3}.10^{-7} = 2,2.10^{-4}\,m$$

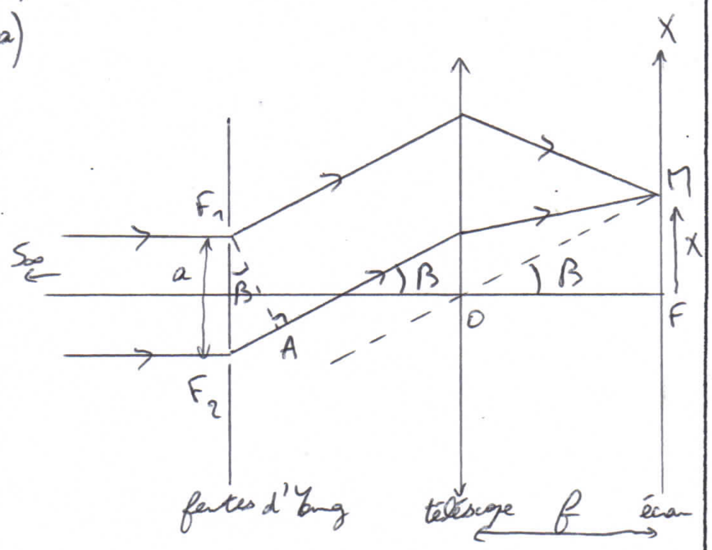
$\boxed{\Delta X \simeq 0,22\ mm}$

d) Si les 2 étoiles sont trop proches, alors les 2 taches de diffraction vont se chevaucher, alors on pourrait croire qu'il n'y a qu'une tache de diffraction, et donc une seule étoile.

$\Rightarrow$ la diffraction limite la résolution.

2) Fentes de Young :

a)



* $\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = \big(SF_2 + F_2A + (AM)\big) - \big(SF_1 + (F_1M)\big)$

or $SF_2 = SF_1$ (thm de Malus)

et $(AM) = (F_1M)$ (thm de Malus + principe de retour inverse de la lumière)

$\Rightarrow \delta = F_2A = a \sin\beta$ (triangle F_1F_2A)

* De plus, les 2 ondes qui interfèrent ont même amplitude $\Rightarrow I = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$

$$\Rightarrow I = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi a \sin\beta}{\lambda}\right)$$

* Dans l'approximation de Gauss : $\beta \ll 1$

$\sin\beta \simeq \beta \simeq \tan\beta = \frac{X}{f}$ (triangle OFM)

$$\Rightarrow \boxed{I = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi a X}{\lambda f}\right)}$$

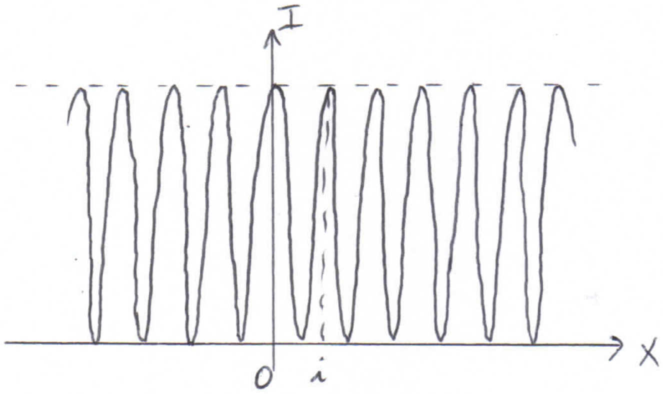
b) $\delta = a\sin\beta = \frac{aX}{f}$

Entre 2 franges brillantes consécutives : $\Delta\delta = \lambda$

$$\Rightarrow \frac{a\Delta X}{f} = \frac{a\,i}{f} = \lambda \quad \Rightarrow i = \frac{\lambda f}{a}$$

$$i = \frac{635.10^{-9}\times 24}{70.10^{-2}} = 2,2.10^{2}.10^{-7}$$

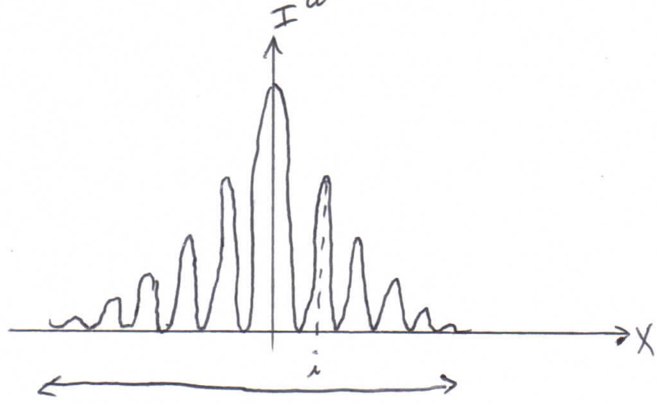
$$\boxed{i = \frac{\lambda f}{a} = 2,2.10^{-5}\ m = 0,022\ mm}$$



c) $\varepsilon = 14$ cm $\Rightarrow \Delta X$ = longueur de la tache centrale de diffraction $= \frac{2f\lambda}{\varepsilon} = 0,22$ mm

$$\frac{\Delta X}{i} = \frac{0,22}{0,022} = 10 \quad \left(= \frac{\frac{2f\lambda}{\varepsilon}}{\frac{\lambda f}{a}} = \frac{2a}{\varepsilon}\right)$$

$\Rightarrow$ il y a <u>10 franges d'interférences</u> dans la tache centrale de diffraction.



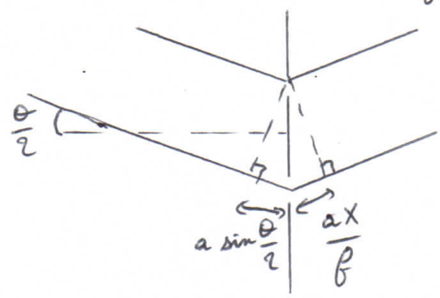
$\Delta X = 10\,i$

d) * si ε devient trop grand, la tache de diffraction sera trop petite, et on verra trop peu de franges d'interférences.

* si ε devient trop petit, la figure d'interférences sera très peu lumineuse !

3) <u>Distance angulaire d'une étoile double symétrique</u> :

a) * Pour l'étoile 1 : $\delta_1 = \frac{aX}{f} + a\sin\frac{\theta}{2}$



$\theta \ll 1$ $\quad (D_S \gg a, x_{S_1})$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2} \simeq \tan\frac{\theta}{2} = \frac{x_{S_1}}{D_S}$$

triangle $\Omega E_1 O$

$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{aX}{f} + \frac{a x_{S_1}}{D_S}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = I_S\left[1+\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{f}+\frac{x_{S_1}}{D_S}\right)\right)\right]}$$

pas de 2 si l'éclairement dû à une étoile, à travers une seule fente est $I_S/2$!

De même, $$\boxed{I_2 = I_s\left[1+\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{f}+\frac{x_{S_2}}{D_S}\right)\right)\right]}$$

b) Chaque étoile donne son propre système de franges car les 2 étoiles sont incohérentes.
On a brouillage quand une étoile donne une frange brillante et que l'autre étoile donne une frange sombre.

$\delta_1 = p\lambda$, p entier (frange brillante)

$\delta_2 = \left(p - \frac{1}{2} - m\right)\lambda$, m entier (frange sombre)

$$\Rightarrow \delta_1 - \delta_2 = p\lambda - \left(p - \frac{1}{2} - m\right)\lambda$$
$$= \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$
$$= \left(\frac{aX}{f} + \frac{a x_{S_1}}{D_S}\right) - \left(\frac{aX}{f} + \frac{a x_{S_2}}{D_S}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{D_S}\left(x_{S_1} - x_{S_2}\right) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

or $x_{S_1} - x_{S_2} = D_S\frac{\theta}{2} - \left(-D_S\frac{\theta}{2}\right)$
$= D_S\theta$

$$\Rightarrow \frac{a}{D_S} D_S \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{a_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\theta}} \quad , m \in \mathbb{N}$$

c) $$I \underset{\text{incohérentes}}{=} I_1 + I_2 = 2I_s + I_s\left[\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{f}+\frac{\theta}{2}\right)\right) + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{f}-\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]$$

or $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

$$\Rightarrow \boxed{I = 2I_s\left[1 + \cos\left(\frac{\pi a\theta}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi a X}{\lambda f}\right)\right]}$$

contraste : $$\mathcal{C} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

$$I_{max} = 2I_s\left[1 + \left|\cos\frac{\pi a\theta}{\lambda}\right|\right]$$

$$I_{min} = 2I_s\left[1 - \left|\cos\frac{\pi a\theta}{\lambda}\right|\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = \left|\cos\frac{\pi a\theta}{\lambda}\right|}$$

$\mathcal{C} = 0$ pour $\frac{\pi a\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + m\pi$

$$\Rightarrow \boxed{a_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\theta}} \quad , m \in \mathbb{N}$$

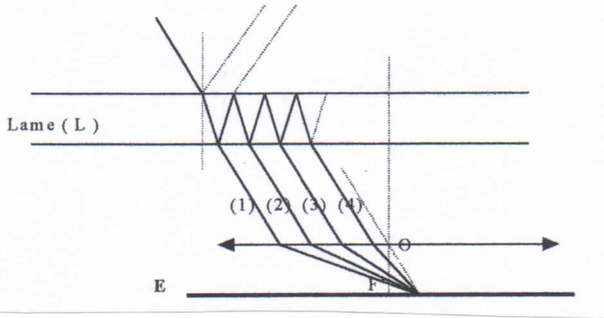
$a_0 = \frac{\lambda}{2\theta} \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{2a_0}$

$$\theta = \frac{635.10^{-9}}{2 \times 116,5.10^{-2}} \text{ rad}$$
$$= \frac{635.10^{-9}}{233.10^{-2}} \times \underset{\text{rad}\to{}^\circ}{\frac{180}{\pi}} \times \underset{{}^\circ\to{}'}{60} \times \underset{{}'\to{}''}{60} \times \underset{{}''\to m''}{10^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\lambda}{2a_0} \simeq 56\ m''}$$

TROISIEME PROBLEME : Etude d'une radiation quasi-monochromatique – Détermination de la largeur spectrale $\Delta\lambda$

1)



2) Entre la lame et la lentille, les rayons sont parallèles entre eux, ce que l'on peut montrer en utilisant les lois de Descartes.

3) $R_1 \Rightarrow$ 2 transmissions $\Rightarrow I_1 = T^2 I_0$

$R_2 \Rightarrow$ 2 transmissions + 2 réflexions $\Rightarrow I_2 = T^2R^2 I_0 = R^2 I_1$

$R_3 \Rightarrow$ 2 transmissions + 4 réflexions $\Rightarrow I_3 = T^2R^4 I_0 = R^4 I_1$

$R_4 \Rightarrow$ 2 transmissions + 6 réflexions $\Rightarrow I_4 = T^2R^6 I_0 = R^6 I_1$

AN : $I_2 = 3{,}6 \cdot 10^{-3} I_1$

$I_3 = 1{,}3 \cdot 10^{-5} I_1$

$I_4 = 4{,}7 \cdot 10^{-8} I_1$

CCL : I_3 et $I_4 \ll I_1$ et I_2

on peut donc se limiter à un phénomène d'interférences à deux ondes associées aux rayons R_1 et R_2.

4-1) $C = \dfrac{I_M - I_m}{I_M + I_m}$ avec $I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ et $I_m = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

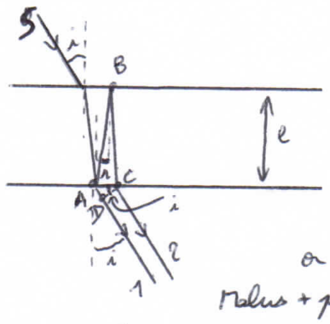
$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}}$$

4-2) $C = \dfrac{2\sqrt{I_1 R^2 I_1}}{I_1 + R^2 I_1} = \dfrac{2R}{1+R^2}$

$$\boxed{C = \frac{2R}{1+R^2} \simeq 0{,}12}$$

4-3) Le contraste C est compris entre 0 et 1 suivant la valeur de R. Ici, C est faible $\Rightarrow$ les franges ne seront pas bien contrastées.

5-1)



$\delta = (SM)_2 - (SM)_1$
$= [\cancel{(SA)} + n AB + n BC + (CM)] - [\cancel{(SA)} + AD + (DM)]$

or $(CM) = (DM)$ (théorème de Malus + principe de retour inverse de la lumière)

$$\delta = n(AB + BC) - AD = 2nAB - AD$$

$$= 2n\frac{e}{\cos r} - AC \sin i$$

or $AC = 2 \times e \tan r$

$$\delta = \frac{2ne}{\cos r} - \frac{2e \sin r \sin i}{\cos r}$$

or loi de Descartes : $\sin i = n \sin r$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2ne}{\cos r}\left(1 - \sin^2 r\right) = 2ne\cos r$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 2ne\cos r}$$

5-2) loi de Descartes $\Rightarrow \boxed{\sin i = n \sin r}$

5-3) petits angles $\Rightarrow i \simeq n r$ et $\cos r \simeq 1 - \dfrac{r^2}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 2ne\left(1 - \frac{i^2}{2n^2}\right)}$$

6) L'anneau de rayon ρ_q étant brillant, $\delta_q = q\lambda$ (q entier)

+ $\rho_q = f' i_q$ car les angles sont petits ($\tan i_q \simeq i_q$)

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{ne}{\lambda}\left(2 - \left(\frac{\rho_q}{f'n}\right)^2\right)}$$

7-1) Le centre est brillant donc la différence de marche s'écrit $\delta_0 = 2ne = q_0\lambda$ avec q_0 entier.

L'ordre d'interférence décroît à partir du centre ($\dfrac{\delta}{\lambda} = \dfrac{2ne\cos r}{\lambda}$ et $\cos r < 1 \Rightarrow \dfrac{\delta}{\lambda} < \dfrac{2ne}{\lambda} = \dfrac{\delta_0}{\lambda}$). Donc pour le 2ème anneau brillant, l'ordre d'interférence est

$$q_2 = q_0 - 2$$

$$q_2 = \frac{ne}{\lambda}\left(2 - \left(\frac{\ell_2}{f'_n}\right)^2\right) = q_0 - 2 = \frac{2ne}{\lambda} - 2$$

$$\Rightarrow \frac{ne}{\lambda}\left(\frac{\ell_2}{f'_n}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{e = 2n\lambda\left(\frac{f'}{\ell_2}\right)^2 = 5{,}000.10^{-4}\,m = 0{,}5000\,mm}$$

7-2) $q_2 = \underbrace{\frac{2ne}{\lambda}}_{2372 \text{ (entier!)}} - 2 \Rightarrow \boxed{q_2 = 2370}$

8-1) on a $q_2 = \frac{ne}{\lambda}\left(2 - \left(\frac{\ell_2}{f'_n}\right)^2\right)$ (cf 6))

$$\Rightarrow \lambda = \frac{ne}{q_2}\left(2 - \left(\frac{\ell_2}{f'_n}\right)^2\right)$$

on différencie (n et f' supposés constants, $q_2 = c^{te}$)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{2e\ell_2}{f'^2 n q_2}\Delta\ell_2}$$

$\Rightarrow$ la mesure de $\Delta\ell_2$ donne accès à $\Delta\lambda$.

8-2) $\boxed{\Delta\lambda = 4{,}3.10^{-12}\,m = 4{,}3\ pm}$

9) $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \simeq 1{,}5.10^5$ et $q_0 = 2372$

$\Rightarrow q_0 \ll \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \Rightarrow$ la condition de visibilité des anneaux est vérifiée.

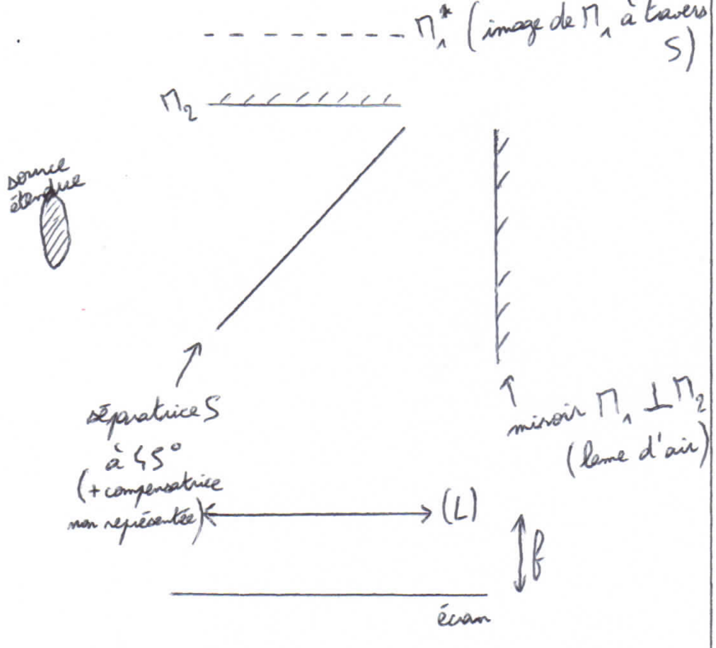
PT 2016 - 2017 **DS 5**

QUATRIEME PROBLEME : Interféromètre de Michelson : Détermination de petits déplacements :

(d'après banque PT 2010)

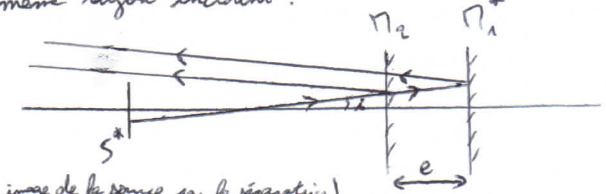
1) franges d'égale inclinaison ⇒ on est monté en lame d'air.

Avec une source ponctuelle, les franges ne seraient pas localisées. Mais ici, on a une source étendue ⇒ les franges sont localisées à l'infini. On observe donc dans le plan focal image d'une lentille convergente (L).



2) La source est étendue ⇒ les franges sont localisées à l'infini. Deux rayons qui interfèrent se coupent donc à l'infini, et proviennent évidemment du même point source (problème de cohérence)

⇒ Deux rayons qui interfèrent proviennent d'un même rayon incident :



(S^* = image de la source par la séparatrice)

3) On est à la teinte plate quand on est au contact optique, c'est-à-dire quand e l'épaisseur de la lame d'air est nulle. M_1^* et M_2 sont parfaitement superposés. ⇒ différence de marche géométrique nulle.

* Si on suppose qu'il n'y a pas de réflexions déphasantes, alors $\delta = 0$ $\forall i$ l'angle d'incidence

$$I = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) = 4I_0 = c^{te}$$

⇒ on a un écran uniformément éclairé

avec $I = 4I_0 = I_{max}$

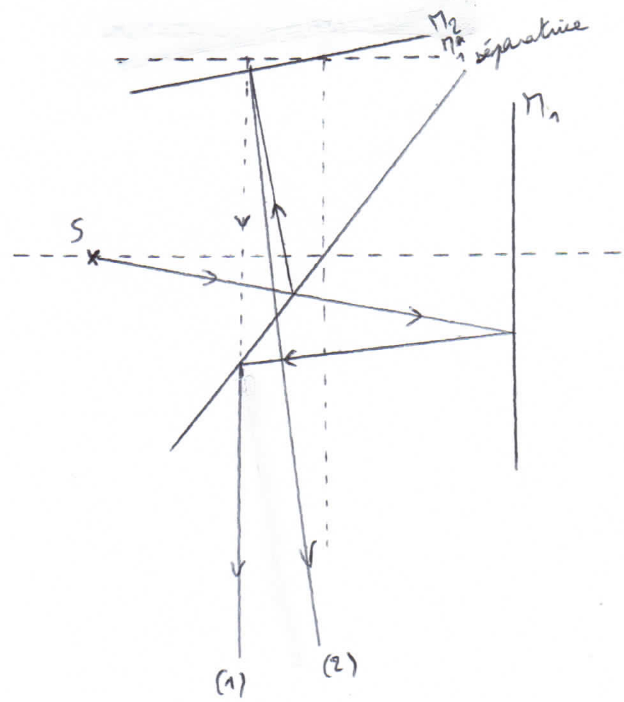
* Si on suppose qu'il y a des réflexions déphasantes, alors $\delta = \frac{\lambda}{2}$ $\forall i$ l'angle d'incidence

$$I = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) = 0$$

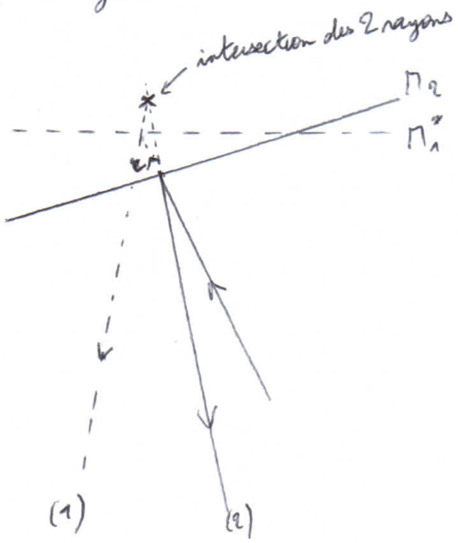
⇒ on a un écran noir.

4) On se place en coin d'air.

4.1)



Si on fait un "zoom" :

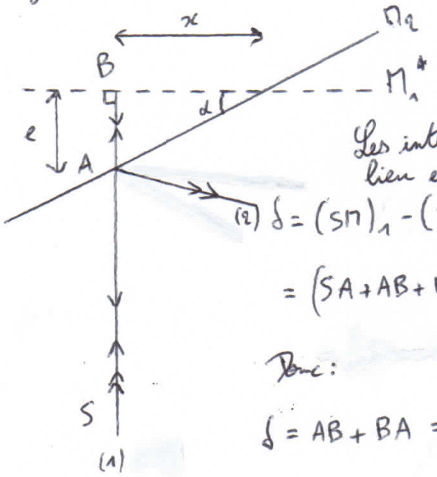


4.2) Si on a une source étendue, en coin d'air, les franges sont localisées au voisinage des miroirs.

(ailleurs, on a brouillage des franges).

En effet, 2 ondes qui interfèrent sont issues d'un même rayon incident si la source est étendue, et on a vu dans la question précédente que les 2 rayons se coupent au voisinage des miroirs.

4.3) angle d'incidence nul :



Les interférences ont lieu en A.

$\delta = (SM)_1 - (SM)_2$

$= (SA + AB + BA)_1 - (SA)_2$

Donc :

$\delta = AB + BA = 2e$

or $e = x \tan\alpha \simeq \alpha x \quad (\alpha \ll 1)$

$\Rightarrow \boxed{\delta = 2\alpha x}$

4.4) $I = 2I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$ (les 2 ondes qui interfèrent ont même amplitude)

$I = c^{te} \Rightarrow \delta = c^{te} \Rightarrow x = c^{te}$

Les franges sont caractérisées par $x = c^{te}$

$\Rightarrow$ les franges sont des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

Entre 2 franges brillantes successives :

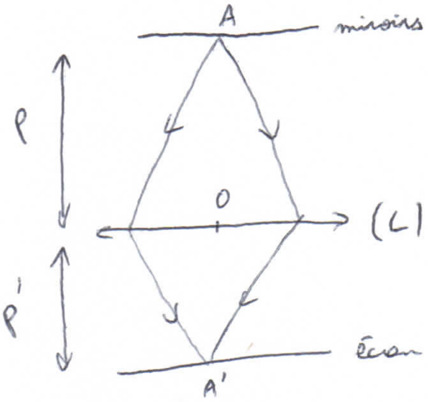
$\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \Delta\delta = \lambda \Rightarrow 2\alpha\Delta x = \lambda$

$\Rightarrow$ interfrange : $i \qquad i = \Delta x = \dfrac{\lambda}{2\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{i = \dfrac{\lambda}{2\alpha} = 0{,}3 \text{ mm}}$

4.5) Les franges sont localisées sur les miroirs

$\Rightarrow$ il faut conjuguer les miroirs et un écran grâce à la lentille convergente.



interfrange multiplié par 4,0 $\Rightarrow$ grandissement $|\gamma| = 4{,}0$

$|\gamma| = 4{,}0 = \dfrac{|\overline{OA'}|}{|\overline{OA}|} = \dfrac{p'}{p} \Rightarrow \dfrac{p'}{p} = 4{,}0$

$-\dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}} \Rightarrow -\dfrac{1}{-p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{f'}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{f'} \\ \dfrac{p'}{p} = 4{,}0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p' = 4{,}0p \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{4{,}0p} = \dfrac{1}{f'} \end{cases}$

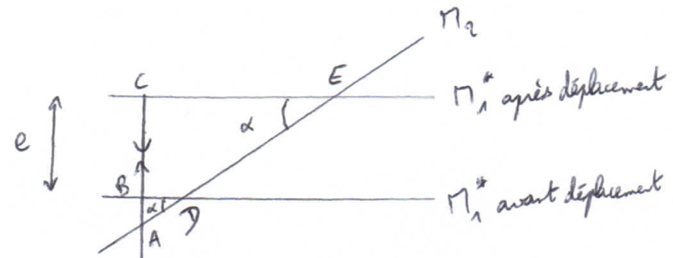
$\Rightarrow \dfrac{5{,}0}{4{,}0p} = \dfrac{1}{f'} \Rightarrow p = \dfrac{5{,}0f'}{4{,}0} = 25 \text{ cm}$

$p' = 5{,}0f' = 1{,}0 \text{ m}$

⇒ On doit placer la lentille 25 cm derrière les miroirs et l'écran 1,0 m derrière la lentille.

5)1) $\delta = 2\alpha x$ car on est toujours en coin d'air mais par contre l'arête du coin d'air s'est déplacée ⇒ x a changé !

⇒ $\delta = \delta_{\text{précédent}} \underbrace{\pm}_{\text{suivant le sens de translation}} \underbrace{2}_{\text{aller-retour}}e$



$\delta_{\text{avant}} = 2AB$

$\delta_{\text{après}} = 2AC$

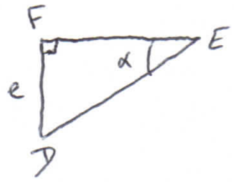
⇒ $\Delta\delta = 2AC - 2AB = 2BC$
$= 2e$

⇒ $\boxed{\Delta\delta = \pm 2e}$

5.2) * la différence de marche vaut toujours $\delta = 2\alpha x$

⇒ $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$ est inchangée

* Avant translation, la frange d'ordre zéro se trouvait en D (sur l'arête du coin d'air : $x=0$)
Après translation, la frange d'ordre zéro se trouve en E (sur l'arête du coin d'air : $x=0$).



⇒ $FE = \frac{e}{\tan\alpha} \simeq \frac{e}{\alpha}$

⇒ la frange d'ordre zéro a été translatée de $\frac{e}{\alpha}$

$\left.\begin{array}{l}\text{* interfrange} = c^{te} \\ \text{frange d'ordre 0 translatée de } \frac{e}{\alpha}\end{array}\right\}$ ⇒ en bloc, la figure d'interférences a été translatée de $\frac{e}{\alpha}$.

* il faut $\frac{e}{\alpha} > \frac{i}{10} = \frac{\lambda}{20\alpha}$

⇒ $e > \frac{\lambda}{20}$

⇒ $\boxed{e_{\text{mini}} = 34 \text{ nm}}$

DS 5 PT 2016-2017

CINQUIEME PROBLEME : Etude d'un prisme

1) * La $1^{\text{ère}}$ loi de Snell-Descartes pour la réfraction stipule que le rayon réfracté est dans le plan d'incidence qui est ici confondu avec le plan de section principale contenant SI.

* De même pour la réfraction en I'.

2) a) et b) $2^{\text{ème}}$ loi de Snell-Descartes pour la réfraction :

en I : $\boxed{\sin i = n \sin r}$

en I' : $\boxed{n \sin r' = \sin i'}$

c) Dans le triangle AII' : $A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$

$\Rightarrow \boxed{A = r + r'}$

d) $D = (\overrightarrow{I'R}, \overrightarrow{SI}) = (\overrightarrow{I'R}, \overrightarrow{II'}) + (\overrightarrow{II'}, \overrightarrow{SI})$

$= (i' - r') + (i - r)$

$\Rightarrow D = i + i' - (r + r') \Rightarrow \boxed{D = i + i' - A}$

3) Pour un prisme d'indice n, l'angle de réfraction limite est Λ tel que $n \sin \Lambda = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

soit $\Lambda = \text{Arcsin}\,\frac{1}{n}$

* en I', pour qu'un rayon émerge (et donc pour qu'il n'y ait pas de réflexion totale), il faut $r' \leq \Lambda$

or $r + r' = A \Rightarrow$ il faut $A - r \leq \Lambda$ (1)

* en I, pour $0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 \leq r \leq \Lambda$ (2)
(loi Descartes en I)

* $\Rightarrow$ (1) et (2) $\Rightarrow A - \Lambda \leq r \leq \Lambda$

$\Rightarrow A \leq 2\Lambda = 2\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{A \leq 2\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{n}}$

* La condition $A \leq 2\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{n}$ est nécessaire mais non suffisante pour qu'il y ait émergence.

En effet, $A - \Lambda \leq r \leq \Lambda \Rightarrow \boxed{i_0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}}$

avec i_0 tel que $\boxed{\sin i_0 = n \sin(A - \Lambda) = n \sin\left(A - \text{Arcsin}\,\frac{1}{n}\right)}$

4) * $D = i + i' - A$

D minimal $\Leftrightarrow dD = 0 = di + di'$ car $dA = 0$ (A fixé).

$\Leftrightarrow di = -di'$

or $\sin i = n \sin r \Rightarrow \cos i\, di = n \cos r\, dr$

$\sin i' = n \sin r' \Rightarrow \cos i'\, di' = n \cos r'\, dr'$

$\Rightarrow di = -di' \Rightarrow n \frac{\cos r}{\cos i} dr = -n \frac{\cos r'}{\cos i'} dr'$

or $A = r + r' \Rightarrow 0 = dr + dr' \Rightarrow dr = -dr'$

$\Rightarrow \cos r \cos i' = \cos r' \cos i$

L'obtention d'un minimum équivaut donc à :

$\cos r \cos i' = \cos r' \cos i$

$\Leftrightarrow \cos^2 r \cos^2 i' = \cos^2 r' \cos^2 i$

$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 r)(1 - \sin^2 i') = (1 - \sin^2 r')(1 - \sin^2 i)$

$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 i')\left(1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}\right) = (1 - \sin^2 i)\left(1 - \frac{\sin^2 i'}{n^2}\right)$

$\Leftrightarrow (n^2 - 1)(\sin^2 i - \sin^2 i') = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{i = i' = i_m}$ * autre méthode moins calculatoire, plus qualitative, à la fin du corrigé.

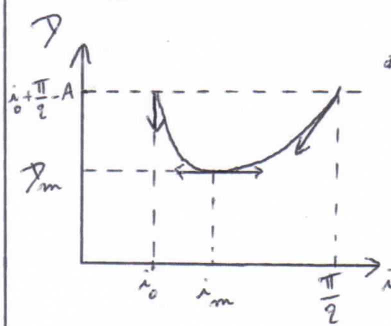
* Cela impose alors $\boxed{r = r'}$ par symétrie par rapport à la bissectrice de $\hat{A}$ (ou bien car $\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$)

* $D_m = D(i = i_m) = 2 i_m - A \Rightarrow i_m = \frac{A + D_m}{2}$

$r = r'$ et $r + r' = A \Rightarrow r = r' = \frac{A}{2}$ au minimum de déviation

or $\sin i_m = n \sin r \Rightarrow \sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$



* $D(i_0) = i_0 + i'(i_0) - A$

$= i_0 + \frac{\pi}{2} - A$

car $i'(i_0) = \frac{\pi}{2}$

* $D(i = \frac{\pi}{2}) = D(i_0)$ (principe retour inverse de la lumière)

* $\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$ ($D = i + i' - A$)

$= 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}$

car $n = \frac{\cos i\, di}{\cos r\, dr} = \frac{\cos i'\, di'}{\cos r'\, dr'}$ et $dr = -dr'$ ($A = r + r'$)

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dD}{di}(i = i_0) = -\infty} \quad \text{car } i'(i_0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\frac{dD}{di}\left(i = \frac{\pi}{2}\right) = 1} \quad \text{car } i = \frac{\pi}{2}$$

* Un prisme utilisé au minimum de déviation permet ainsi des mesures précises d'indice optique n. De plus, à l'aide d'un goniomètre, le minimum de déviation est facile à obtenir.

5) $D = i + i' - A \Rightarrow \frac{dD}{dn} = \underbrace{\frac{di}{dn}}_{0 \text{ pour } i \text{ fixé}} + \frac{di'}{dn}$ car $A = c^{te}$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dn} = \frac{di'}{dn}$$

or $\sin i = n \sin r \Rightarrow 0 = dn \sin r + n \cos r \, dr$

et $A = r + r' \Rightarrow dr + dr' = 0$

et $\sin i' = n \sin r' \Rightarrow \cos i' \, di' = dn \sin r' + n \cos r' \, dr'$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dn} = \frac{di'}{dn} = \frac{\sin r'}{\cos i'} - n \frac{\cos r'}{\cos i'} \frac{dr}{dn}$$

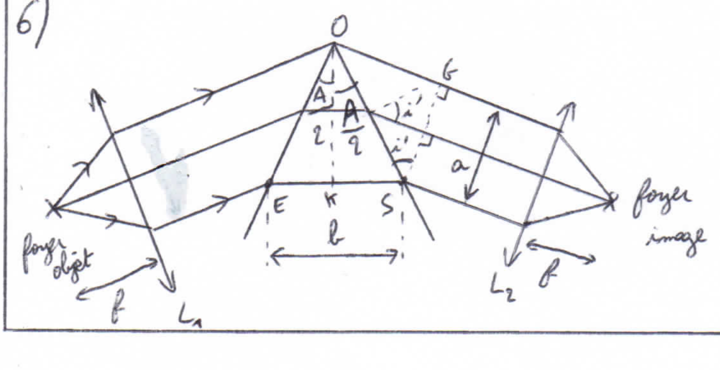
$$= \frac{\sin r'}{\cos i'} + \frac{\cos r'}{\cos i'} \frac{\sin r}{\cos r}$$

$$= \frac{\sin r' \cos r + \cos r' \sin r}{\cos r \cos i'} = \frac{\sin(r + r')}{\cos r \cos i'}$$

$$\frac{dD}{dn} = \frac{\sin A}{\cos r \cos i'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{\sin A}{\cos r \cos i'}}$$

6)



Au minimum de déviation, $r = \frac{A}{2}$ et $i' = i_m$

$$\Rightarrow \frac{dD}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{\sin A}{\cos \frac{A}{2} \cos i_m} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cancel{\cos \frac{A}{2}}}{\cancel{\cos \frac{A}{2}} \cos i_m}$$

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{2 \, OS \sin \frac{A}{2}}{OS \cos i_m}$$ (en multipliant et en divisant par OS !)

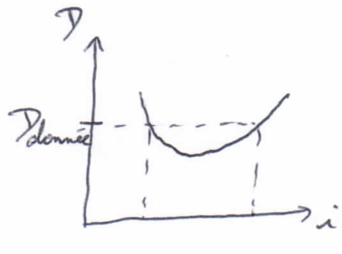
$$\Rightarrow \boxed{\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{b}{a}}$$

car $\begin{cases} \frac{b}{2} = OS \sin \frac{A}{2} & \text{(triangle OSK)} \\ a = OS \cos i_m & \text{(triangle OSG)} \end{cases}$

* Retour sur la question 4), pour montrer qu'au minimum de déviation, $i = i'$.

$\Rightarrow$ Un angle d'incidence i donne un angle d'émergence i', et donc, par le principe de retour inverse de la lumière, un angle d'incidence i' donnera un angle d'émergence i. Etant donné que $D = i + i' - A$, les couples (i, i') et (i', i) donneront la même déviation D.

$\Rightarrow$ La déviation est la même pour les 2 angles, d'où l'allure de la courbe :



$\Rightarrow$ 2 solutions pour i : i et i'

$\Rightarrow$ $i = i'$ au minimum de la courbe.