PT 2016-2017

DS 1

PREMIER PROBLEME :

Etude d'un tensiomètre électronique (d'après banque PT 2016)

2) Choix des jauges de déformations :

Q1) $R = \rho \frac{\ell}{s} \Rightarrow \ln R = \ln \rho + \ln \ell - \ln s$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta \ell}{\ell} - \frac{\delta s}{s}}$$

Q2) $s = ab \Rightarrow \ln s = \ln a + \ln b$

$$\Rightarrow \frac{\delta s}{s} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$$

or $\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b} = -\nu \frac{\delta \ell}{\ell}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta \rho}{\rho} + (1+2\nu)\frac{\delta \ell}{\ell}}$$

Q3) $V = ab\ell \Rightarrow \ln V = \ln a + \ln b + \ln \ell$

$$\Rightarrow \frac{\delta V}{V} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta \ell}{\ell} = (1-2\nu)\frac{\delta \ell}{\ell}$$

$$\frac{\delta R}{R} = c\frac{\delta V}{V} + (1+2\nu)\frac{\delta \ell}{\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta R}{R} = \left[c(1-2\nu) + (1+2\nu)\right]\frac{\delta \ell}{\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta R}{R} = K\frac{\delta \ell}{\ell} \quad \text{avec } K = c(1-2\nu) + (1+2\nu) \text{ (métal)}}$$

Q4) $\frac{\delta \rho}{\rho} = \Pi \sigma = \Pi E \frac{\delta \ell}{\ell}$

$$\Rightarrow \frac{\delta R}{R} = \Pi E \frac{\delta \ell}{\ell} + (1+2\nu)\frac{\delta \ell}{\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta R}{R} = K\frac{\delta \ell}{\ell} \quad \text{avec } K = 1 + \Pi E + 2\nu \text{ (semi-conducteur)}}$$

Q5) $K_{cuivre} = 1(1-2\times 0{,}3) + (1+2\times 0{,}3) = 2$

$$\boxed{K_{cuivre} = 2}$$

$K_{silicium} = 1 + 10^{-9}\cdot 10^{11} + 2\times 0{,}4$

$$\boxed{K_{silicium} \simeq 10^2}$$

$K_{silicium} \gg K_{cuivre}$

$\Rightarrow$ mieux vaut utiliser un semi-conducteur (silicium) car ainsi, pour une déformation donnée, la variation de résistance sera plus grande qu'avec un métal.

Q6) * Les phénomènes d'hystérésis peuvent induire une erreur sur la mesure : la courbe liant $\frac{\delta R}{R}$ à $\frac{\delta \ell}{\ell}$ n'est pas forcément la même quand la charge appliquée croît ou décroît.

* la température, si elle varie, peut aussi induire une erreur sur la mesure.

PT 2016-2017

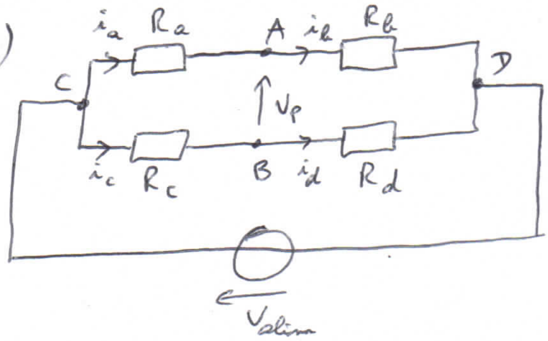
DS 1

PREMIER PROBLEME :

Etude d'un tensiomètre électronique (d'après banque PT 2016)

3) Circuit de conditionnement : pont de Wheatstone :

Q7)



* Les bornes A et B sont branchées à un amplificateur de résistance d'entrée très grande.
  $\Rightarrow i_a = i_b$ et $i_c = i_d$ (pas de courant entre A et B).

* diviseur de tension : $V_A - V_D = \dfrac{R_b}{R_a+R_b} V_{alim}$ (1)

$$V_B - V_D = \frac{R_d}{R_c+R_d} V_{alim} \quad (2)$$

* $V_p = \underset{(1)-(2)}{V_A - V_B} = \boxed{\left(\dfrac{R_b}{R_a+R_b} - \dfrac{R_d}{R_c+R_d}\right) V_{alim} = V_p}$

Q8) $\Delta V_p = V_p - 0$

si $R_a = R_b = R_c = R_d = R_0$, $V_p = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V_p = \left(\frac{R_0+\Delta R_b}{R_0+\Delta R_a + R_0 + \Delta R_b} - \frac{R_0 + \Delta R_d}{R_0 + \Delta R_c + R_0 + \Delta R_d}\right) V_{alim}}$$

$$V_p = \frac{(R_0+\Delta R_b)(R_0+\Delta R_c+\cancel{R_0+\Delta R_d}) - (R_0+\Delta R_d)(R_0+\Delta R_a+\cancel{R_0+\Delta R_b})}{(2R_0+\Delta R_a+\Delta R_b)(2R_0+\Delta R_c+\Delta R_d)} V_{alim}$$

$$V_p = \frac{R_0(\Delta R_b + \Delta R_c - \Delta R_a - \Delta R_d) + \cancel{\Delta R_b \Delta R_c - \Delta R_a \Delta R_d}}{(2R_0 + \cancel{\Delta R_a + \Delta R_b})(2R_0 + \cancel{\Delta R_c + \Delta R_d})} V_{alim}$$

Rq : si $\Delta R_i \ll R_0$:

$$\boxed{V_p \simeq \frac{V_{alim}}{4}\left(\frac{\Delta R_b}{R_0} + \frac{\Delta R_c}{R_0} - \frac{\Delta R_a}{R_0} - \frac{\Delta R_d}{R_0}\right)}$$

Q9) * $\dfrac{\delta R_i}{R_0} = K \dfrac{\delta l_i}{l} = K \varepsilon_i$

* $V_p = \dfrac{V_{alim}}{4} K \left(\varepsilon_b + \varepsilon_c - \varepsilon_a - \varepsilon_d\right)$

* on a $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = \varepsilon_4$

* $\varepsilon_1 = \varepsilon_b$

* hypothèse : $\rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_d \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_c \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_a : V_p = 0$

$\rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_d \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_a \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_c : V_p \neq 0$

$\rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_a \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_c \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_d : V_p = 0$

$\rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_a \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_d \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_c : V_p \neq 0$

$\rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_c \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_a \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_d : V_p = 0$

$\rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_c \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_d \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_a : V_p = 0$

* conclusion : $V_p \neq 0$ si $\varepsilon_4 = \varepsilon_c$

$\Rightarrow$ jauge 4 : R_c

jauges 2 et 3 : (R_a et R_d) ou (R_d et R_a)

Q10) $V_p = \dfrac{V_{alim}}{4} K \underbrace{\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3\right)}_{4\varepsilon_1}$

$$\boxed{V_p = K V_{alim} \varepsilon_1}$$

Q11) $\varepsilon_1 = kF$ or $F = P S_m$

$$\Rightarrow \boxed{V_p = K V_{alim} k S_m P}$$

PT 2016-2017 DS 1

DEUXIEME PROBLEME : (d'après CCP TSI 2005)

Première partie : Charge d'un condensateur à travers une résistance

1) Au bout d'un temps infini, on est en régime permanent $\Rightarrow v_s = c^{te}$

or $i = C\dfrac{dv_s}{dt} \Rightarrow i = 0$

$\Rightarrow$ le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

$\boxed{i(\infty) = 0}$ et $\boxed{v_s(\infty) = E}$ d'après une loi des mailles ($u = Ri = 0$ aux bornes de R)

2) $\tau = RC$ or $R = \dfrac{u}{i} \Rightarrow [R] = V.A^{-1}$

et $i = C\dfrac{du}{dt} \Rightarrow [C] = A.V^{-1}.s$

$\Rightarrow [\tau] = [R][C] = V.A^{-1}.A.V^{-1}.s = s$

$\Rightarrow$ τ est en seconde

c'est la constante de temps du circuit

3-1) loi des mailles : $E = Ri + v_s$

or $i = C\dfrac{dv_s}{dt}$ (convention récepteur)

$\Rightarrow RC\dfrac{dv_s}{dt} + v_s = E \Rightarrow \boxed{\tau\dfrac{dv_s}{dt} + v_s = E}$

3-2) solution équation générale : $v_s = K e^{-t/\tau}$

solution particulière : $v_s = E$

$\Rightarrow v_s = K e^{-t/\tau} + E$

or $v_s(0^-) = 0$ (condensateur initialement déchargé)

et continuité de la tension aux bornes d'un condensateur (continuité de l'énergie $\frac{1}{2}Cv_s^2$)

$\Rightarrow v_s(0^+) = v_s(0^-) = 0$

$\Rightarrow K = -E$ et $\boxed{v_s = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

$t \to \infty$: $v_s \to E$ OK

3-3) * asymptote à l'infini : $v_s = E$

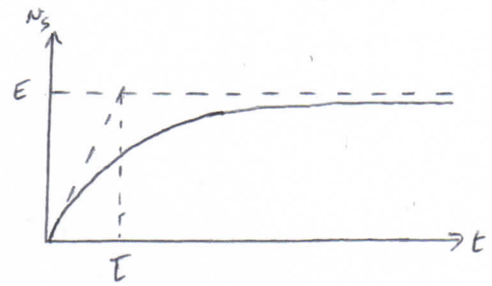
* $\dfrac{dv_s}{dt} = \dfrac{E}{\tau}e^{-t/\tau}$ à $t = 0$: $\dfrac{dv_s}{dt} = \dfrac{E}{\tau}$

$\Rightarrow$ pente à l'origine : $\dfrac{E}{\tau}$

* équation de la tangente à l'origine : $v_s = \dfrac{E}{\tau}t$

* intersection avec l'asymptote à l'infini :

$v_s = \dfrac{E}{\tau}t = E \Rightarrow t = \tau$



3-4) $v_s(t_1) = 0{,}99\,E$

$= E\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)$

$\Rightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0{,}01 \Rightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln 100}$

4) convention récepteur $\Rightarrow i = C\dfrac{dv_s}{dt} = C\dfrac{E}{\tau}e^{-t/\tau}$

$\Rightarrow \boxed{i = \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}}$

Deuxième partie : Etude énergétique de la charge du condensateur

5-1) $E_c = \dfrac{1}{2}Cv_s^2$ or quand $t \to \infty$, $v_s \to E$

$\Rightarrow \boxed{E_c = \dfrac{1}{2}CE^2}$

5-2) puissance Joule : $P_J = Ri^2$

$E_J = \displaystyle\int_0^\infty P_J\,dt = \int_0^\infty Ri^2\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt$

$= \dfrac{E^2}{R}\left(-\dfrac{\tau}{2}\right)\left[e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty = -\dfrac{E^2RC}{2R}(0-1)$

$\boxed{E_J = \dfrac{1}{2}CE^2}$

5-3) $E_g = \int_0^\infty E i \, dt$ car $P_g = E i$

$= E \int_0^\infty \frac{E}{R} e^{-t/\tau} dt = \frac{E^2}{R}(-\tau)\underbrace{\left[e^{-t/\tau}\right]_0^\infty}_{0-1}$

$E_g = \frac{E^2 \tau}{R} \Rightarrow \boxed{E_g = CE^2}$

$E_g = CE^2 = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CE^2 = E_c + E_J$

conservation de l'énergie OK

5-4) $\rho = \frac{E_c}{E_g} = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{CE^2} = \boxed{\frac{1}{2} = \rho}$

6-1) on remplace E par $\frac{E}{2}$ dans la question 5-3)

$\Rightarrow \boxed{E_{g_1} = \frac{1}{4}CE^2}$

on remplace E par $\frac{E}{2}$ dans la question 5-1)

$\Rightarrow \boxed{E_{c_1} = \frac{1}{8}CE^2}$

6-2) on a (cf 3-1)) $\boxed{\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = E}$

(même schéma électrique)

$\Rightarrow v_s = K' e^{-t/\tau} + E$

à $t=0$, $v_s = \frac{E}{2}$ (régime permanent dans la position 1)

$\Rightarrow \boxed{v_s = E\left(1 - \frac{1}{2}e^{-t/\tau}\right)}$

6-3) convention récepteur $\Rightarrow i = +C\frac{dv_s}{dt}$

$\Rightarrow i = \frac{CE}{2\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{i = \frac{E}{2R}e^{-t/\tau}}$

6-4) • $E_{g_2} = \int_0^\infty E i \, dt = E\int_0^\infty \frac{E}{2R}e^{-t/\tau}dt$

$= \frac{E^2}{2R}(-\tau)\underbrace{\left[e^{-t/\tau}\right]_0^\infty}_{0-1} = \frac{E^2 RC}{2R}$

$\boxed{E_{g_2} = \frac{1}{2}CE^2}$

• $E_{c_2} = \frac{1}{2}C v_s(\infty)^2 - E_{c_1} = \frac{1}{2}CE^2 - \frac{1}{8}CE^2$

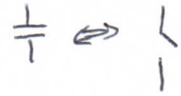
$\boxed{E_{c_2} = \frac{3}{8}CE^2}$

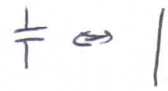
6-5) $\rho' = \frac{E_{c_1} + E_{c_2}}{E_{g_1} + E_{g_2}} = \frac{\frac{1}{8}CE^2 + \frac{3}{8}CE^2}{\frac{1}{4}CE^2 + \frac{1}{2}CE^2} = \boxed{\frac{2}{3} = \rho'}$

$> \rho$

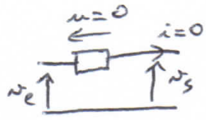
7) On peut donc imaginer de charger le condensateur progressivement, en une multitude d'étapes, diminuant ainsi l'énergie fournie par le générateur pour la même énergie fournie au condensateur.

Troisième partie : Circuit en régime sinusoïdal

8) $\omega \to 0$ (TBF) :  interrupteur ouvert

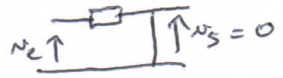
$\omega \to \infty$ (THF) :  fil

$\omega \to 0$:



$\Rightarrow v_s = v_e$

$\omega \to \infty$:



Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

9-1) A $v_e(t)$ on associe le complexe $\underline{v_e} = V_e e^{j\omega t}$

$v_s(t)$ $\qquad \underline{v_s} = V_s e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{V_s} e^{j\omega t}$

diviseur de tension : $\underline{v_s} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}\underline{v_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{v_e}$

$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}}$$

$\varphi = \arg \underline{H} = \boxed{-\text{Arctan}(RC\omega) = -\text{Arctan}\frac{\omega}{\omega_0} = \varphi(\omega)}$

9-2) * $\omega \to 0$: $\underline{H} \to 1 \Rightarrow G \to 1$, $g \to 0$, $\varphi \to 0$

* $\omega \to \omega_0$: $\underline{H} \to \frac{1}{1+j} \Rightarrow G \to \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g \to -3\text{dB}$, $\varphi \to -\frac{\pi}{4}$

* $\omega \to \infty$: $\underline{H} \to -j\frac{\omega_0}{\omega} \Rightarrow G \to 0$, $g \to -\infty$, $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$

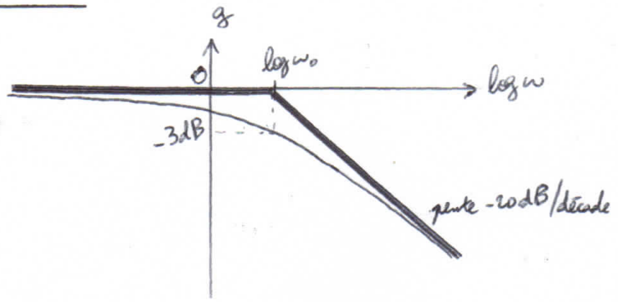
	G	$g = 20 \log G$	φ
$\omega \to 0$	1	0	0
$\omega \to \omega_0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-3dB$	$-\frac{\pi}{4}$
$\omega \to \infty$	0	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$

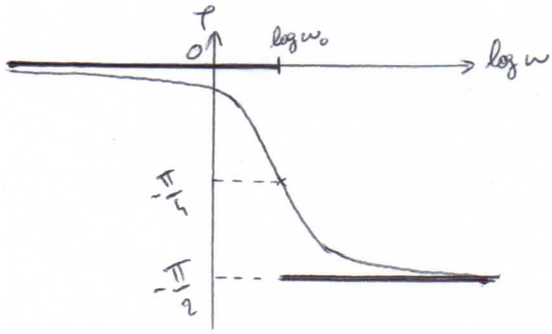
$\omega \to \infty$, $\underline{H} \to -j\frac{\omega_0}{\omega} \Rightarrow G \to \frac{\omega_0}{\omega}$

$g \to 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega$

$\Rightarrow$ la pente de la courbe $g(\log \omega)$ est donc de $-20dB$ par décade.

9-3)





10) $|\underline{H}|_{max} = G_{max} = 1 \Rightarrow g_{max} = 0$

$g(\omega_c) = g_{max} - 3dB = -3dB$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

Quatrième partie : Caractère intégrateur d'un filtre

11) AO idéal $\Rightarrow i_+ = i_- = 0$

régime linéaire + AO de gain infini $\Rightarrow V_- = V_+$ or $V_+ = V_B = 0$

$\Rightarrow V_A = V_- = 0$

loi des noeuds en A : $\frac{v_e - V_A}{R} = \frac{V_A - v_s}{R'} + i_c$

avec $i_c = +C \frac{d(V_A - v_s)}{dt}$ (convention récepteur).

$$\Rightarrow \boxed{v_s + R'C\frac{dv_s}{dt} = -\frac{R'}{R} v_e}$$

12-1) $v_e = V_e \cos \omega t \Rightarrow v_s = V_s \cos(\omega t + \varphi)$

le montage est intégrateur si $|v_s| \ll \left|R'C\frac{dv_s}{dt}\right|$

et alors $R'C\frac{dv_s}{dt} = -\frac{R'}{R} v_e \Rightarrow v_s = K\int v_e\,dt$

intégrateur si $V_s \ll R'C V_s \omega$

intégrateur si $\boxed{R'C\omega \gg 1}$

$R'C\frac{dv_s}{dt} = -\frac{R'}{R} v_e \Rightarrow v_s = -\frac{1}{RC}\int v_e\,dt$

$v_s = -\frac{1}{RC} V_e \int \cos \omega t\,dt \Rightarrow \boxed{v_s = -\frac{V_e}{RC\omega} \sin \omega t}$

12-2) si $|v_s| \gg \left|R'C\frac{dv_s}{dt}\right|$, c'est-à-dire $R'C\omega \ll 1$

alors $v_s = -\frac{R'}{R} v_e$

Le montage est amplificateur inverseur de gain

$$\boxed{G = -\frac{R'}{R} \text{ si } R'C\omega \ll 1}$$

13-1) $v_s + R'C\frac{dv_s}{dt} = -\frac{R'}{R}E$ pour $t > 0$

$\Rightarrow v_s = K e^{-t/R'C} - \frac{R'}{R}E$

or à $t=0$, $v_s - \underbrace{V_A}_{0} = 0$ car condensateur déchargé et continuité tension aux bornes d'un condensateur.

$$\Rightarrow \boxed{v_s = -\frac{R'}{R}E\left(1 - e^{-\frac{t}{R'C}}\right)}$$

13-2) Si $\frac{t}{R'C} \ll 1$, $e^{-\frac{t}{R'C}} = 1 - \frac{t}{R'C}$

$$\Rightarrow v_s = -\frac{R'}{R}E\frac{t}{R'C} = \boxed{-\frac{E}{RC}t = v_s \text{ si } t \ll R'C}$$

v_e étant constant, v_s décroissant linéairement avec le temps, v_s est bien l'intégrale de v_e.

v_s ne doit pas dépasser la tension de saturation sinon l'AO va saturer, le comportement ne sera plus linéaire.

PT 2016 - 2017 — DS1

TROISIEME PROBLEME : Notion d'harmoniques - Analyse de Fourier très simplifié (d'après CAPES externe 2005)

I) Quelques généralités

1) Le système est linéaire si $s(t)$ est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la forme générale est :

$$a\, s(t) + b \frac{d s(t)}{dt} + \dots + c \frac{d^n s(t)}{dt^n} = d\, e(t) + f \frac{de(t)}{dt} + \dots + g \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

2)a) Si $s(t)$ est un signal périodique, il est développable (pulsation ω) en série de Fourier :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

L'ensemble des amplitudes C_n forme le spectre de fréquence du signal $s(t)$. Il est représenté par un diagramme en bâtons : $C_n = f(n\omega)$ ou $f(n)$ ou $f(nf)$

2)b) système 1 : on retrouve les mêmes fréquences que pour $e(t)$ $\Rightarrow$ système linéaire

rôle : filtre passe-bas (coupe HF : 4 et 5 kHz)

2)c) système 2 : linéaire (idem)

filtre passe-bande

système 3 : non linéaire car des fréquences supplémentaires apparaissent (0,5 et 3,5 kHz)

3)1) U : valeur efficace de la tension $u(t)$

↳ mesurable avec un voltmètre, à l'oscilloscope, ...

ω : pulsation du signal $\omega = 2\pi f$

f : fréquence → mesurable à l'oscillo, ou avec un fréquencemètre

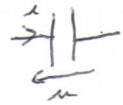
φ_u : phase à l'origine des temps → il suffit de définir une origine des temps

3)2)a) * résistance : $u(t) = R\, i(t)$ loi d'Ohm en convention récepteur

$= \underline{Z}\, \underline{i}$

$$\boxed{\underline{Z} = R}$$

* capacité :



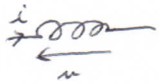
$i = C \frac{du}{dt}$

$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}$

$\Rightarrow \underline{i} = jC\omega \underline{u}$

$\Rightarrow \underline{u} = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} = \underline{Z}\, \underline{i} \quad \Rightarrow \boxed{\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}}$

* inductance :



$u = L \frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \underline{u} = j\omega L\, \underline{i} = \underline{Z}\, \underline{i} \Rightarrow \boxed{\underline{Z} = jL\omega}$

3)2)b) $\underline{u} = 10\sqrt{2}\, e^{j\omega t} = \underbrace{(1.10^3}_{\Omega} + j\, 1.10^3)\, \underbrace{I\sqrt{2}\, e^{j\omega t} e^{j\varphi}}_{\underline{i}}$

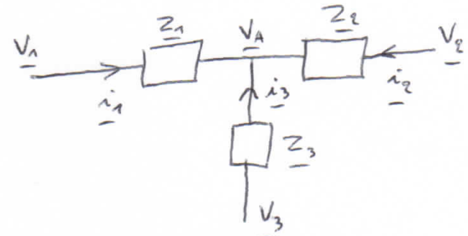
$\Rightarrow 10 = 1.10^3 (1+j)\, I\, e^{j\varphi}$

$0{,}01 = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}\, I\, e^{j\varphi}$

$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} \qquad I = \frac{0{,}01}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \boxed{i(t) = 0{,}01 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ en Ampère}}$

4)



loi des nœuds : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

$\Rightarrow$ (loi d'Ohm) $\frac{\underline{V_3} - \underline{V_A}}{\underline{Z_3}} + \frac{\underline{V_2} - \underline{V_A}}{\underline{Z_2}} + \frac{\underline{V_1} - \underline{V_A}}{\underline{Z_1}} = 0$

$$\Rightarrow \underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_1}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{V_2}}{\underline{Z_2}} + \frac{\underline{V_3}}{\underline{Z_3}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + \frac{1}{\underline{Z_3}}}$$

$$\boxed{\underline{V_A} = \frac{\underline{Y_1}\,\underline{V_1} + \underline{Y_2}\,\underline{V_2} + \underline{Y_3}\,\underline{V_3}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3}} = \frac{\sum_i \underline{Y_i}\,\underline{V_i}}{\sum_i \underline{Y_i}}}$$

thm de Millman

II) Filtre sélectif

1)a) $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω

or système linéaire (résistance, capacité, AO en régime linéaire)

$\Rightarrow$ $s(t)$ sinusoïdale de pulsation ω

$$\left.\begin{array}{l} \underline{e}(t) = E\sqrt{2}\, e^{j\varphi_e}\, e^{j\omega t} \\ \underline{s}(t) = S\sqrt{2}\, e^{j\varphi_s}\, e^{j\omega t} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{T}(\omega) = \frac{S}{E} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

indépendant du temps

La connaissance de $\underline{T}(\omega)$ nous donne la réponse du circuit pour toutes les pulsations, toutes les fréquences.

1)b) * système linéaire $\Rightarrow$ on peut utiliser le thm de superposition

* De plus, tout signal périodique est développable en série de Fourier (si pas périodique : transformée de Fourier). Tout signal est donc une somme de signaux sinusoïdaux.

$\Rightarrow$ Chaque harmonique va être filtré différemment.

1)c) * thm de Millmann en A

$$\boxed{\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{E}}{R_1} + \frac{0}{R_2} + jC_1\omega \underline{V_B} + jC_1\omega \underline{S}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega}}$$

* thm de Millmann en B (AO idéal $\Rightarrow \underline{i}_- = 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\underline{V_B} = \frac{jC_1\omega \underline{V_A} + \frac{\underline{S}}{2R_1}}{jC_1\omega + \frac{1}{2R_1}}}$$

or $\underline{V_B} = \underline{V^-} = \underline{V^+} = 0$

$\underline{V^-} = \underline{V^+}$: régime linéaire et ALI de gain infini ; $\underline{V^+} = 0$: relié à la masse

$$\Rightarrow \underline{V_A} = \frac{-\underline{S}}{2jR_1C_1\omega} = \frac{\frac{\underline{E}}{R_1} + jC_1\omega \underline{S}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega}$$

1)d)
$$\frac{-\underline{S}}{2jR_1C_1\omega}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC_1\omega\right) - jC_1\omega\underline{S} = \frac{\underline{E}}{R_1}$$

$$\underline{S}\left[\frac{1}{2jR_1C_1\omega} + \frac{1}{2jR_2C_1\omega} + 1 + jR_1C_1\omega\right] = -\underline{E}$$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{-1}{1 + jR_1C_1\omega + \frac{1}{2jC_1\omega}\underbrace{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}_{\frac{R_2+R_1}{R_1R_2}}}$$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{-1}{1 + jR_1C_1\omega - j\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}\frac{1}{C_1\omega}}$$

$$\boxed{\underline{T}(\omega) = \frac{-1}{1 + j\left(R_1C_1\omega - \frac{1}{R_eC_1\omega}\right)}} \quad \text{avec } R_e = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$$

1)e) $$\underline{T}(\omega) = \frac{-1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{Q}{\omega_0} = R_1C_1 \\ Q\omega_0 = \frac{1}{R_eC_1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q = \sqrt{\frac{R_1}{R_e}} \\ \omega_0 = \frac{1}{C_1\sqrt{R_eR_1}} \end{array}\right.$$

avec $R_e = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$ $\Rightarrow$
$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{R_1+R_2}{2R_2}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}\sqrt{\frac{R_1+R_2}{2R_2}}}$$

1)f) $f_0 = 3{,}0\ \text{kHz} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = 2 \cdot 10^4\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

$Q = 20$

Prenons par exemple $C_1 = 10\ \text{nF}$ (typique au labo)

$$\frac{Q}{\omega_0} = R_1C_1 \Rightarrow R_1 = \frac{Q}{\omega_0 C_1} = 1 \cdot 10^5\ \Omega$$

$$Q = 20 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{R_1}{R_2}} \Rightarrow \left(400 - \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow R_2 = 1 \cdot 10^2\ \Omega$$

$\Rightarrow$ le couple $\boxed{\left\{\begin{array}{l} C_1 = 10\ \text{nF} \\ R_1 = 1 \cdot 10^5\ \Omega \\ R_2 = 1 \cdot 10^2\ \Omega \end{array}\right.}$ convient pour avoir $f_0 = 3{,}0\ \text{kHz}$ et $Q = 20$.

2)a) $T(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

est maximum si $Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 0$ et alors $T(\omega)=1 = T_{max}$

$\Rightarrow \boxed{T(\omega) \text{ max pour } \omega = \omega_0}$

2)b) pulsations de coupure ω_c telles que $T(\omega_c) = \dfrac{T_{max}}{\sqrt{2}}$

ici $T_{max} = 1$

$$T(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow Q^2\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c}\right) = \pm 1$$

$$\Rightarrow \omega_c^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}+4\right)$$

$$\omega_c = \frac{\pm\frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$$

4 solutions (2 positives, 2 négatives)
on garde les 2 positives

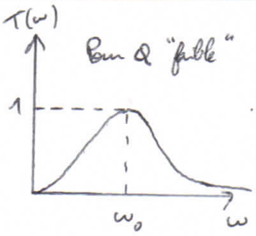
$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{c_B} &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4} \\ \omega_{c_H} &= \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4} \end{aligned}}$$

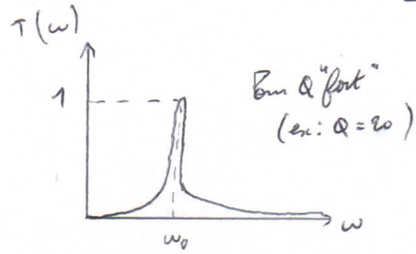
$B_\omega = \omega_{c_H} - \omega_{c_B} = \dfrac{\omega_0}{Q} \quad \Rightarrow \boxed{B_\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}}$

2)c) $Q = \dfrac{\omega_0}{B_\omega}$ $\Rightarrow$ plus la bande passante est faible, <u>plus le filtre est sélectif</u>, <u>plus le facteur de qualité est grand</u>.

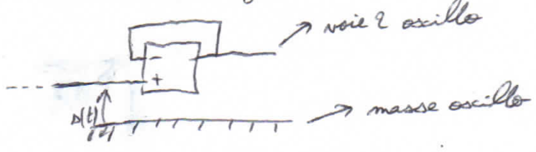
2)d) $B_f = \dfrac{B_\omega}{2\pi} = \dfrac{f_0}{Q} = \dfrac{3{,}0.10^3}{20} = \boxed{1{,}5.10^2 \text{Hz} = B_f}$

2)e) $\omega \to 0$, $T(\omega) \to 0$
$\omega \to \infty$, $T(\omega) \to 0$
$\omega = \omega_0$, $T(\omega) = T_{max} = 1$





3)a) intercaler un montage suiveur :



(+ alim +15/-15 V AO)

idem pour $e(t)$ sur voie 1 oscillo

3)b) On envoie un signal sinusoïdal d'amplitude 1 V pour $e(t)$ (avec GBF). On relève l'amplitude pour $s(t)$, d'où $T(\omega)$. Ensuite, on change la fréquence, idem, etc.

3)c) La source +15V/-15V sert à faire fonctionner l'AO !

Si l'amplitude théorique de $s(t)$ dépassait 15 V, alors on aurait saturation et $s(t) = 13-14 \text{ V} = V_{sat}$.

3)d) Si on inversait les bornes + et - de l'AO dans le circuit 2, on n'aurait plus de boucle de rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse de l'AO, donc on ne fonctionnerait plus en régime linéaire, et $s(t) = \pm V_{sat}$ (on serait en régime saturé).

4) * $\langle e(t) \rangle = \dfrac{E}{2}$ OK

* terme (harmonique) de rang impair $\Rightarrow$ OK
* décroissance en $\dfrac{1}{n}$ $\Rightarrow$ OK (créneau)

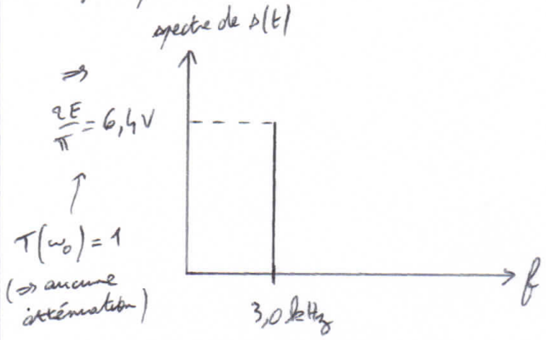
4)a) $e(t) = \frac{E}{2} + \underbrace{\frac{2E}{\pi}\sin(2\pi f t)}_{\text{harmonique de rang 1 = fondamental (fréquence } f)} + \underbrace{\frac{2E}{3\pi}\sin(2\pi\, 3f\, t)}_{\text{harmonique de rang 3 (fréquence } 3f)} + \underbrace{\frac{2E}{5\pi}\sin(2\pi 5 f t)}_{\text{harmonique de rang 5}} + \dots$

$\frac{E}{2}$: $\langle e(t) \rangle$ valeur moyenne composante continue

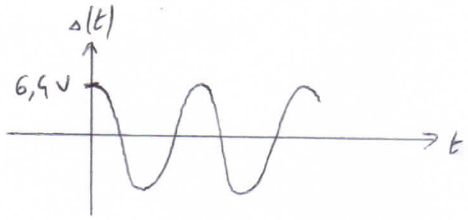
4)b) $f_0 = 3{,}0$ kHz et $Q = 20$ $\Rightarrow B_f = 1{,}5.10^2$ Hz

$\Rightarrow$ seul le fondamental est dans la bande passante du filtre (filtre sélectif) $\Rightarrow$ les autres harmoniques sont très fortement atténués (et la composante continue est coupée).

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



sinusoïde de fréquence $f = f_0 = 3{,}0$ kHz

4)c) On veut toujours garder un filtre sélectif.

$\Rightarrow$ on garde $Q = 20$ (donc on ne change pas les valeurs de R_1 et R_2) $\left(Q = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2R_2}} \right)$.

Par contre, on change la valeur de C_1 (capacité réglable), donc de $\omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1}\sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2R_2}}$.

Ainsi, en changeant la valeur de C_1, donc de ω_0, on peut "ballader" le pic de résonance du filtre sur toute la gamme de fréquence. Ainsi, à chaque fois qu'une sinusoïde apparaît pour $s(t)$ sur l'écran de l'oscillo, ça correspond à un harmonique de $e(t)$ $\Rightarrow$ on peut en déduire la fréquence de l'harmonique, son amplitude.