PT 2017-2018 DL6

PREMIER PROBLEME : Microscopie optique - le microscope confocal (d'après banque PT 2017)

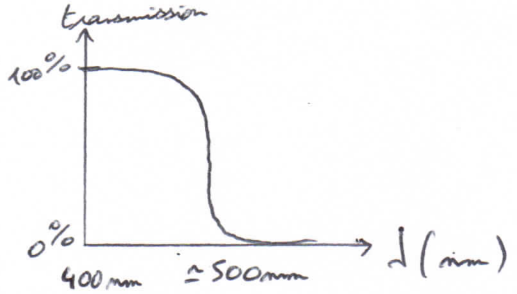
1-1) * visible : $400\,nm < \lambda < 800\,nm$

* UV (ultraviolet) : $\lambda < 400\,nm$

1-2) Le filtre 1 ne coupe pas complètement les faibles longueurs d'onde ; or on ne veut détecter que les longueurs d'onde $\lambda > 500\,nm$ (cf figure 4), c'est-à-dire les longueurs d'onde absorbées puis émises par le FITC.

$\Rightarrow$ le filtre 2 est plus adapté.

1-3) Il faut que le filtre d'excitation coupe les longueurs d'onde $> 500\,nm$, car ces longueurs d'onde ne seront pas absorbées par le FITC et vont perturber les observations.



1-4) LASER : rayonnement quasi-monochromatique

/ lampe spectrale : plusieurs raies

2-1) * La phase de l'onde est $(\omega t - kz)$

$= (\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \Rightarrow \vec{k} \propto +\vec{u}_z$

L'onde se propage donc dans la direction de l'axe (Oz) dans le sens des z croissants.

* $\vec{E} \propto \vec{u}_x$ $\forall t$ dans un plan $z = c^{te}$

$\Rightarrow$ L'onde est polarisée rectilignement selon x.

2-2) $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$

$$c = \frac{1}{\sqrt{4\pi.10^{-7} \times \frac{1}{36\pi.10^{9}}}} = \sqrt{9.10^{9}10^{7}}$$

$\boxed{c = 3.10^{8}\,m.s^{-1}}$ (c'est connu !)

2-3) $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi c}{\lambda} = \dfrac{2\pi \times 3.10^{8}}{628.10^{-9}}$

$$\omega = \frac{2\times 3{,}14}{628} \times 3.10^{17} = \frac{1}{100} \times 3.10^{17}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.10^{15}\,rad.s^{-1}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\times 3{,}14}{628.10^{-9}} = \frac{1}{100}\frac{1}{10^{-9}} = 10^{7}\,m^{-1}$$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.10^{7}\,m^{-1}}$$

2-4) relation de structure d'une OPPM :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\frac{\omega}{c}\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$$

$k = \frac{\omega}{c}$ (relation de dispersion d'une OPPM dans le vide)

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_y}$$

2-5) * vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x \wedge \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_y}{\mu_0}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\,\vec{u}_z \quad \propto +\vec{u}_z \text{ OK}$$

* $\langle \Pi \rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ car $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \dfrac{1}{2}$

* $P = \langle \Pi \rangle s = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} s$

$$\Rightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{s}}}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \times 4\pi 10^{-7}\ 3.10^{8} \times 0,1}{0,75 .\ 10^{-6}}}$$

$$= \sqrt{\frac{24 \times 3,14}{0,75}\ 10^{6}} = \sqrt{\frac{75}{0,75}\ 10^{6}}$$

$$\boxed{E_0 = 1.10^4\ V.m^{-1}}$$

3) Le phénomène de <u>diffraction</u> limite généralement la résolution d'un instrument d'optique, et en particulier celle du microscope. (diffraction sur les montures de l'objectif et de l'oculaire).

PT 2017-2018

DL6

PROBLEME 2 : MOUVEMENT D'UNE SPIRE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE NON UNIFORME

(d'après banque PT 2007)

1-a) si $b = 0$, il n'y aura pas de phénomène d'induction car $\vec{B}$ serait uniforme et le flux magnétique serait constant $\forall z$ (loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = 0$).

1-b) * sur les 2 côtés verticaux, les forces de Laplace se compensent 2 à 2.

* sur le côté horizontal en $z+a$, $d\vec{F_L} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$

$\vec{dl} \propto \vec{u_y}$ $\quad \vec{B} \propto \vec{u_x}$ $\quad \Rightarrow d\vec{F_L}$ est porté par $\vec{u_z}$

⚠ $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ n'est pas un trièdre direct ... !

or $B(z+a) < B(z)$

et d'après la loi de Lenz, la force de Laplace va s'opposer au mouvement, donc la résultante est portée par $-\vec{u_z}$ (le cadre va tomber à cause du poids)

$\Rightarrow \underline{\underline{i > 0}}$

1-c) $\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint (B_0 - bz)\,\vec{u_x}\, dy\, dz\, \vec{u_x}$

$$\phi = a \int_z^{z+a} (B_0 - bz)\, dz = a \left[B_0 z - b\frac{z^2}{2} \right]_z^{z+a}$$

$$\phi = a \left(B_0(z+a) - B_0 z - b\frac{(z+a)^2}{2} + \frac{bz^2}{2} \right)$$

$$= a \left(B_0 a - \frac{b}{2} \left(\cancel{z^2} + a^2 + 2az - \cancel{z^2} \right) \right)$$

$$\boxed{\phi = B_0 a^2 - \frac{ba^3}{2} - ba^2 z}$$

loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = \boxed{+ba^2\dot{z} = e} > 0$

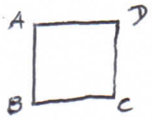
en accord avec 1-b) ($\dot{z} > 0$)

2)a) référentiel du laboratoire supposé galiléen

système : cadre

inventaire des actions extérieures :

* poids du cadre $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u_z}$
* pas de force de frottement
* forces de Laplace :



$d\vec{F_L} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$

• sur AB et CD, les forces de Laplace se compensent 2 à 2

• sur BC : $d\vec{F_L} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B} = i\,dl\,\vec{u_y} \wedge B\,\vec{u_x}$

$\Rightarrow \vec{F_L} = i\left(B_0 - b(z+a)\right) a\, \vec{u_z}$

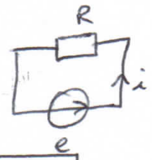
• sur DA : $\vec{F_L} = -i(B_0 - bz)\, a\, \vec{u_z}$

RFD projetée sur $\vec{u_z}$:

$$m\ddot{z} = mg + ia\left(B_0 - b(z+a)\right) - ia(B_0 - bz)$$

$\Rightarrow \boxed{m\ddot{z} = mg - iba^2}$ équation mécanique.

2-b) schéma électrique :



$\Rightarrow e = Ri$

$$\Rightarrow \boxed{ba^2\dot{z} = Ri}$$

2-c) $\Rightarrow i = \frac{ba^2\dot{z}}{R}$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = mg - \frac{b^2a^4}{R}\dot{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{b^2a^4}{mR}\dot{z} = g}$$

$$\boxed{\tau = \frac{mR}{b^2a^4}} \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau} = g}$$

2-d) $\dot{z} = v_z = A\,e^{-t/\tau} + g\tau$

or $v_z(t=0) = 0 \Rightarrow \boxed{v_z = \frac{mRg}{b^2a^4}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

$$\boxed{v_z = g\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$\boxed{v_\ell = g\tau = \frac{mRg}{b^2a^4}}$ $(t \to \infty)$

AN : $\boxed{\tau = \dfrac{mR}{b^2a^4} = 24 \text{ ms}}$

$\boxed{v_\ell = g\,\tau = 0{,}24 \text{ m.s}^{-1}}$

3-a) * A présent (cf 1-c), (on remplace B_0 par $B_0 - b_1(t-t_0)$)

$$\phi = \left[B_0 - b_1(t-t_0)\right]a^2 - \frac{b a^3}{2} - b a^2 z$$

loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{e = b a^2 \dot z + b_1 a^2}$$

* équation mécanique inchangée $(B_0 \to B_0 - b_1(t-t_0))$

$$\boxed{m\ddot z = mg - i b a^2}$$

* équation électrique : $\boxed{e = Ri = b a^2 \dot z + b_1 a^2}$

$$\Rightarrow i = \frac{b a^2}{R}\dot z + \frac{b_1 a^2}{R}$$

$$\Rightarrow m\ddot z = mg - \frac{b^2a^4}{R}\dot z - \frac{b b_1 a^4}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot z + \frac{\dot z}{\tau} = g - \gamma} \quad \text{avec } \gamma = \frac{b b_1 a^4}{mR}$$

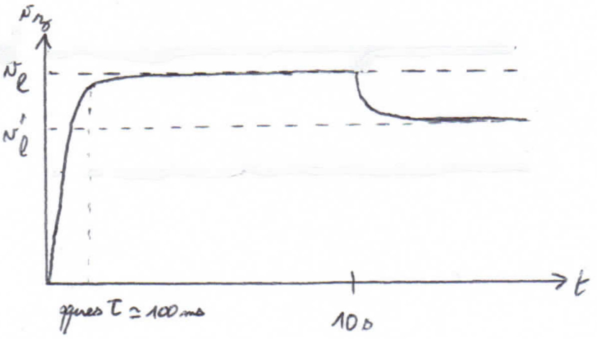
$\Rightarrow v_z(t) = A e^{-t'/\tau} + \tau(g-\gamma)$

or $t_0 = 10\text{ s} \gg \tau = 24\text{ ms} \Rightarrow v(t=10\text{ s}) \simeq v_\ell = g\tau = v(t'=0)$

$\Rightarrow g\tau = A + \tau(g-\gamma) \Rightarrow A = \gamma\tau$

$$\Rightarrow \boxed{v_z(t) = \gamma\tau e^{-t'/\tau} + \tau(g-\gamma)}$$

3-b)



$v'_\ell = (g-\gamma)\tau = 0{,}19 \text{ m.s}^{-1} < v_\ell$

4-a) on ajoute au bilan de la question 2)a) la force de rappel élastique $\vec F = -k(\ell-\ell_0)\vec{u_z} = -k(z-\ell_0)\vec{u_z}$

$$\Rightarrow m\ddot z = mg - i b a^2 - k(z-\ell_0)$$

$$m\ddot z = mg - \frac{b^2a^4}{R}\dot z - k(z-\ell_0)$$

à l'équilibre : $0 = mg - k(z_1 - \ell_0)$

$\Rightarrow mg + k\ell_0 = k z_1$

$$\Rightarrow m\ddot z + \frac{b^2a^4}{R}\dot z + kz = kz_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot z + \frac{\dot z}{\tau} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_1}$$

4-b) équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{1}{\tau}r + \dfrac{k}{m} = 0$

$\Delta = \dfrac{1}{\tau^2} - 4\dfrac{k}{m}$ $\qquad r = \dfrac{-\frac{1}{\tau} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$

$= -2{,}3 \cdot 10^3 \text{ SI} < 0$

on pose $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \dfrac{2\pi}{T}$

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{-\Delta}} = \boxed{\frac{4\pi}{\sqrt{-\frac{b^4a^8}{m^2R^2} + 4\frac{k}{m}}} = T = 0{,}26\text{ s}}$$

4-c) $z(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,e^{-\frac{t}{2\tau}} + z_1$

solution particulière

or à $t=0$, $z = z_2 \Rightarrow A = (z_2 - z_1)$

$\dot z(t=0) = (z_2 - z_1)\left(-\dfrac{1}{2\tau}\right) + B\omega = 0$

pas de vitesse initiale

$$\Rightarrow B = \frac{z_2 - z_1}{2\tau\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)\,e^{-t/2\tau}\left(\cos\omega t + \frac{1}{2\tau\omega}\sin\omega t\right)}$$

$z_1 = 5$ cm $\quad z_2 = 8$ cm $\quad \tau = 24$ ms $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 24 \text{ rad.s}^{-1}$

décrément logarithmique : $\delta = \ln\left(\dfrac{z(t) - z_1}{z(t+T) - z_1}\right)$

$$\delta = \ln\frac{e^{-t/2\tau}}{e^{-\frac{(t+T)}{2\tau}}} = \frac{T}{2\tau} \qquad \boxed{\delta = \frac{T}{2\tau} = 5{,}4}$$

4-d) C'est la loi de Lenz : par ses effets, les forces elmg de Laplace s'opposent à la cause qui lui donne naissance.

application : ralentisseurs électromagnétiques sur les poids lourds.

PT 2017-2018

DL6

PROBLEME 3 : Propagation guidée (d'après banque PT 2010)

I) Propagation dans une structure métallique creuse :

I-1) métal parfait = conductivité électrique γ infinie

$$\boxed{\gamma \to \infty}$$

métal conducteur $\Rightarrow$ loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

or $\gamma \to \infty$ et $\vec{j}$ doit être fini $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

I-2) équation de Maxwell-Faraday : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

or $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow$ le champ magnétique $\vec{B}$ est indépendant du temps en tout point du métal parfait.

or on s'intéresse à des ondes $\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

$$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j\omega \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \right)$$

I-3) équation Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ ($\rho = 0$ vide)

- flux : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- Faraday : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Ampère : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \cancel{\vec{j}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\vec{j} = \vec{0}$ (vide)

* $\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{grad}\,\cancel{\operatorname{div} \vec{E}} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$

$$= \vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}\,\vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\square \vec{E} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

* $\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{B} = \vec{grad}\,\cancel{\operatorname{div} \vec{B}} - \Delta \vec{B}$

$$= \vec{rot}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}\,\vec{E}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\square \vec{B} = \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

I-4) * γ réel : $\underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U}_0}\, e^{\pm|\gamma| z} e^{j\omega t}$ $\quad (\gamma = \pm|\gamma|)$

phase $= \omega t \Rightarrow$ pas de propagation

$\boxed{\gamma \text{ réel : pas de propagation de l'onde électromagnétique}}$

* γ imaginaire pur : $\gamma = \pm j|\gamma|$

$$\Rightarrow \underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U}_0}\, e^{j(\omega t \pm |\gamma| z)}$$

phase $= \omega t \pm |\gamma| z \Rightarrow$ propagation

pas de pertes car pas d'exponentielle réelle

$\boxed{\gamma \text{ imaginaire pur : propagation sans pertes}}$

* γ complexe : $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\Rightarrow \underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U}_0}\, e^{-(\alpha + j\beta) z} e^{j\omega t} = \underline{\vec{U}_0}\, e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

phase $= \omega t - \beta z \Rightarrow$ propagation

$e^{-\alpha z} \Rightarrow$ pertes

$\boxed{\gamma \text{ complexe : propagation avec pertes}}$

I-5) $\gamma = jk \Rightarrow \underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U}_0}\, e^{-jkz} e^{j\omega t} = \underline{\vec{U}_0}\, e^{j(\omega t - kz)}$

or on a propagation dans sens des z croissants ; phase $= \omega t - kz$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{k > 0}$

$$e^{j(\omega t - kz)} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} = j\omega} \text{ et } \boxed{\frac{\partial}{\partial z} = -jk}$$

(car $\underline{\vec{E}_0}$ et $\underline{\vec{B}_0}$ ne dépendent ni de t, ni de z)

I-6) * $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + jk\underline{E}_y \\ -jk\underline{E}_x - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\underline{\vec{B}} = -j\omega \underline{\vec{B}} = -j\omega \begin{vmatrix} \underline{B}_x \\ \underline{B}_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

* $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ où $\underline{B_z} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} jk\,\underline{B_y} \\ -jk\,\underline{B_x} \\ \frac{\partial \underline{B_y}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{B_x}}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2}\,j\omega \begin{vmatrix} \underline{E_x} \\ \underline{E_y} \\ \underline{E_z} \end{vmatrix}$$

On réécrit les 2 premières lignes de ces 2 égalités vectorielles :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial \underline{E_z}}{\partial y} + jk\,\underline{E_y} = -j\omega\,\underline{B_x} \\ -jk\,\underline{E_x} - \frac{\partial \underline{E_z}}{\partial x} = -j\omega\,\underline{B_y} \\ k\,\underline{B_y} = \frac{\omega}{c^2}\,\underline{E_x} \\ -k\,\underline{B_x} = \frac{\omega}{c^2}\,\underline{E_y} \end{cases}}$$

ce qui mène à

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{kc^2}{\omega}\,\underline{B_y} &= \underline{E_x} = \frac{jk\,\frac{\partial \underline{E_z}}{\partial x}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \\ -\frac{kc^2}{\omega}\,\underline{B_x} &= \underline{E_y} = \frac{jk\,\frac{\partial \underline{E_z}}{\partial y}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \end{aligned}}$$

I.7) $\square \underline{\vec{E}} = \vec{0}$ $\begin{vmatrix} \square \underline{E_x} \\ \square \underline{E_y} \\ \square \underline{E_z} \end{vmatrix}$ $\Rightarrow \square \underline{E_z} = 0$

$$\Rightarrow \Delta \underline{E_z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial y^2} + (-jk)^2\,\underline{E_z} - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2\,\underline{E_z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial y^2} + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}_{K^2}\underline{E_z} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{K = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}}$$

I.8) relations de passage : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{12}$

$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$

$\Rightarrow$ on a toujours continuité de la composante :

* tangentielle pour $\vec{E}$
* normale pour $\vec{B}$

à la traversée d'une surface.

A l'intérieur du métal parfait : $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ la composante tangentielle de $\vec{E}$ et la composante normale de $\vec{B}$ doivent s'annuler dans le vide au voisinage immédiat du métal parfait.

II) Cas d'une structure rectangulaire :

II.1) E_z est une composante tangentielle pour $\vec{E}$.

$\Rightarrow$ $\underline{E_{0z}}(x,y) = 0$ sur les 4 portions de plan limitant la cavité

$$\boxed{\underline{E_{0z}}(0,y) = \underline{E_{0z}}(a,y) = \underline{E_{0z}}(x,0) = \underline{E_{0z}}(x,b) = 0}$$

II.2) Détermination des solutions :

II.2.1) $\underline{E_z} = \underline{E_{0z}}\,e^{j(\omega t - kz)}$

Dans l'équa diff de I.7), on peut factoriser par $e^{j(\omega t - kz)}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \underline{E_{0z}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_{0z}}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\underline{E_{0z}} = 0}$$

II.2.2) $\underline{E_{0z}} = (A'\sin k_1 x + B'\cos k_1 x)(C'\sin k_2 y + D'\cos k_2 y)$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{E_{0z}}}{\partial x^2} = -k_1^2\,\underline{E_{0z}}$ (après calculs)

et $\frac{\partial^2 \underline{E_{0z}}}{\partial y^2} = -k_2^2\,\underline{E_{0z}}$

$$\Rightarrow -k_1^2\,\underline{E_{0z}} - k_2^2\,\underline{E_{0z}} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\underline{E_{0z}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$$

* $\underline{E}_{0z}(0,y) = B'\left(C'\sin k_2 y + D'\cos k_2 y\right) = 0 \quad \forall y$

$$\Rightarrow \boxed{B' = 0}$$

* $\underline{E}_{0z}(x,0) = D'\left(A'\sin k_1 x + B'\cos k_1 x\right) = 0 \quad \forall x$

$$\Rightarrow \boxed{D' = 0}$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{0z}(x,y) = E_0 \sin k_1 x \sin k_2 y$$

II-2-3) * $\underline{E}_{0z}(a,y) = 0 \quad \forall y$

$$= E_0 \sin k_1 a \sin k_2 y$$

$$\Rightarrow \sin k_1 a = 0$$

$$\Rightarrow k_1 a = n\pi \qquad \Rightarrow \boxed{k_1 = \frac{n\pi}{a}}$$

* $\underline{E}_{0z}(x,b) = 0 \quad \forall x$

$$= E_0 \sin k_1 x \sin k_2 b \qquad \Rightarrow \sin k_2 b = 0$$

$$\Rightarrow k_2 b = m\pi \qquad \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{m\pi}{b}}$$

* $k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_1^2 - k_2^2$

$$\Rightarrow \boxed{k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}}$$

* expliquer le terme "mode TM_{mn}" :

→ TM : transverse magnétique : $B_z = 0$: $\vec{B} \perp$ direction de propagation de l'onde.

→ TM_{mn} : $\underline{E}_{0z} = E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$

* m et n déterminent la valeur du module d'onde k.

* valeurs minimales de m et n : $\boxed{m = n = 1}$

(si m ou $n = 0$, $\underline{E}_{0z} = 0 \Rightarrow \underline{B}_{0y} = \underline{E}_{0x} = \underline{B}_{0x} = \underline{E}_{0y} = 0$ cf I6) $\Rightarrow \vec{E} = \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow$ pas intéressant)

* $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}$

$$\Rightarrow \text{il faut } \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \omega > \pi c\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow f > \frac{c}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{mini} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

II-2-4) $\underline{E}_x = \frac{jk \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{jk}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \times e^{j(\omega t - kz)}$

$$\boxed{\underline{E}_x = \frac{jkE_0 \frac{n\pi}{a}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \cos\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \, e^{j(\omega t - kz)}}$$

$$\boxed{\underline{B}_y = \frac{\omega}{kc^2}\underline{E}_x = \frac{j\omega E_0 \frac{n\pi}{a}}{c^2k^2 - \omega^2} \cos\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \, e^{j(\omega t - kz)}}$$

$$\boxed{\underline{E}_y = \frac{jk \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{jkE_0 \frac{m\pi}{b}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \sin\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{m\pi y}{b} \, e^{j(\omega t - kz)}}$$

$$\boxed{\underline{B}_x = -\frac{\omega}{kc^2}\underline{E}_y = \frac{-j\omega E_0 \frac{m\pi}{b}}{c^2k^2 - \omega^2} \sin\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{m\pi y}{b} \, e^{j(\omega t - kz)}}$$

composante normale de $\vec{B}$:

$$\boxed{\underline{B}_x(0,y) = \underline{B}_x(a,y) = \underline{B}_y(x,0) = \underline{B}_y(x,b) = 0}$$

⇒ OK

composante tangentielle de $\vec{E}$:

$$\boxed{\underline{E}_y(0,y) = \underline{E}_y(a,y) = \underline{E}_x(x,0) = \underline{E}_x(x,b) = 0}$$

⇒ OK

II-2-5) $\boxed{\varphi(z,t) = \omega t - kz}$

2 points d'espace-temps voisins ont même phase si

$$\varphi(z,t) = \varphi(z+dz, t+dt)$$

$$\Rightarrow \omega t - kz = \omega(t+dt) - k(z+dz)$$

$$\Rightarrow \omega dt - k dz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}}} > c$$

Cette vitesse de phase est <u>supérieure à c</u>, célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

Ce dispositif est <u>dispersif</u>, car la vitesse de phase est fonction de la pulsation ω de l'onde.

<u>II-2-6)</u>

cf <u>II-2-3)</u> : $\boxed{f_c = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 9{,}0.10^9 \text{ Hz} = 9{,}0 \text{ GHz}}$

$n = 1$
$m = 1$
$\omega = 2\pi f = 4\pi f_c$

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{16\pi^2 f_c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}}$$

or $f_c^2 = \frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow \frac{c^2}{4 f_c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_\varphi = \frac{2c}{\sqrt{3}} = 3{,}5 \cdot 10^8 \, m.s^{-1}}$$