

PREMIER PROBLEME : OPTIQUE (langue PT 2001)

I) Mirrors:

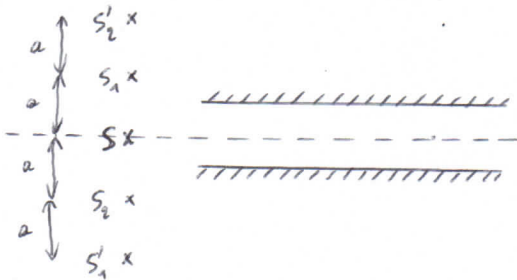
1) Les rayons issus de S et pénétrant entre les 2 miroirs ont 3 possibilités :

- traverser sans réflexion
- se réfléchir une seule fois sur M_1
- se réfléchir une seule fois sur M_2 .

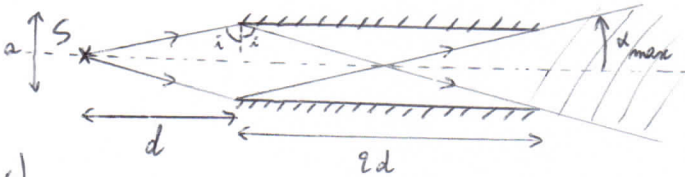
L'observateur O_1 verra donc S, son image symétrique par rapport à M_1 et son image symétrique par rapport à M_2 . Il verra donc 3 sources ponctuelles distantes de a entre elles.

2) Il y a cette fois-ci la possibilité de réflexion sur M_1 puis sur M_2 et de réflexion sur M_2 puis sur M_1 qui s'ajoutent aux possibilités de la question précédente.

L'observateur O_1 verra donc 5 sources ponctuelles distantes de a :



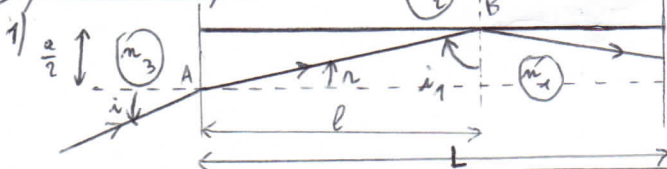
3)



4) $\tan \alpha_{max} = \frac{a}{2d} = 0,1 \Rightarrow \alpha_{max} = 6^\circ$

5) $d + 2d + d = 4d$ donc les 3 sources sont dans le plan focal de la lentille. On aura 3 faisceaux de lumière parallèle en sortie, dont l'un sera parallèle à l'axe optique.

II) Guide diélectrique:



$$n_1 \sin i_{max} = n_2 \sin \frac{\pi}{2} = n_2 \Rightarrow \sin i_{max} = \frac{n_2}{n_1}$$

à la limite de la réflexion totale

$\Rightarrow i_{max} = 86,587^\circ$

2) $r = 90 - i_{max} = 3,413^\circ$

$$n_3 \sin i = n_1 \sin r \Rightarrow \sin i = \frac{n_1}{n_3} \sin 3,413$$

$\Rightarrow i = 5,200^\circ$

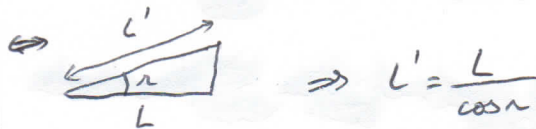
L'angle formé à l'entrée du milieu 1 par les 2 rayons les plus inclinés par rapport à l'axe et qui seront guidés par ce même milieu est égal à $2i$, soit $10,400^\circ$

3) On aura le même angle de $10,400^\circ$ en sortie. (lois de Descartes idem en sortie)

4) Les rayons parallèles à l'axe optique doivent parcourir la distance L dans le milieu d'indice n_1 .

Les rayons faisant l'angle r à l'entrée dans le milieu d'indice n_1 doivent parcourir la distance L'.

Quelque soit le nombre de réflexions à l'intérieur du guide, ces rayons font toujours un angle r (ou -r) par rapport à l'axe optique.



\Rightarrow différence $\delta = L' - L$ pour ces trajets extrêmes.

$$\delta = \frac{L}{\cos r} - L = L \left(\frac{1}{\cos r} - 1 \right)$$

Pour un train d'ondes à l'entrée, on aura en sortie un écart temporel τ , tel que $\frac{c}{n_1} = v = \frac{\delta}{\tau}$

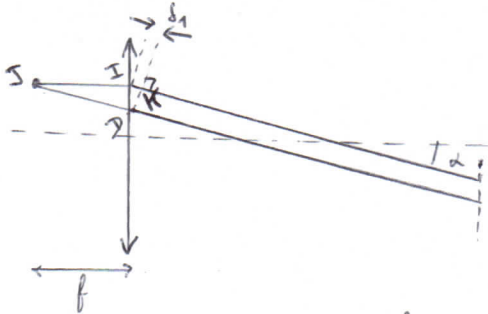
$$\tau = \frac{n_1}{c} \delta = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{1}{\cos r} - 1 \right) = 3,018 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

$3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $3,413^\circ$

$\tau = 0,3018 \text{ ps}$

III) Interféromètre de Michelson :

1)



a) Pour une onde émise en S, les chemins optiques [SIK] et [SID] sont égaux en D et K sont sur un même plan d'onde (thm de Talbot)

b) Indépendamment du trajet, le rayon arrivant en I aura à parcourir en moins le chemin optique δ_1 par rapport au rayon arrivant en D.

$$\delta_1 = IK = ID \sin \alpha = \boxed{2e_0 \tan \alpha \sin \alpha = \delta_1}$$

2) $\delta_2 = (AE + EF + FG + GH + HI) - (AB + BC + CD)$

or $FE = FG$; $AB = AE$; $BC = GH$; $CD = HI$

$$\Rightarrow \delta_2 = 2FE = 2 \frac{e_0}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\delta_2 = \frac{2e_0}{\cos \alpha}}$$



3) $\Delta L = \delta_2 - \delta_1 = 2e_0 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{2e_0}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha$

$$\boxed{\Delta L = 2e_0 \cos \alpha}$$

résultat connu ($\delta = 2e \cos i$) et démontré en cours de manière beaucoup + simple!!

4) $\Delta \phi = \frac{2\pi \Delta L}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\Delta \phi = \frac{4\pi e_0 \cos \alpha}{\lambda}}$

5) $\Delta L = p\lambda \Rightarrow p = \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{2e_0}{\lambda} \cos \alpha = \frac{2e_0}{\lambda} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)$

Prenons $p_0 = \frac{2e_0}{\lambda} =$ ordre au centre

$$\Rightarrow p = p_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)$$

angles petits $\Rightarrow \alpha \approx \frac{x}{f}$

$$\Rightarrow p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{2f^2} \right) \Rightarrow$$



$$\boxed{x = f \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right)}}$$

$$\boxed{x = f \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{2e_0} \right)}}$$

6) Les franges d'interférences sont des anneaux (franges d'égale inclinaison ici).

cons $\Rightarrow \boxed{I = I_0 (1 + \cos \phi)}$ avec $\phi = \frac{4\pi e_0 \cos \alpha}{\lambda}$

(ainsi, $I_{\max} = 2I_0$)

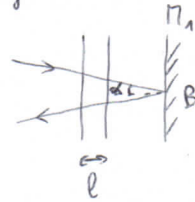
($I = 0$ si $\alpha = \pi/2 \Rightarrow$ anneaux)

$$\boxed{\phi = \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 - \frac{x^2}{2f^2} \right)}$$

7) $e_0 = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow I = 2I_0$ éclaircissement rest uniforme

b) $\Delta L' \approx 2x \left(n \frac{l}{\cos \alpha} \right) - 2x \left(1 \times \frac{l}{\cos \alpha} \right)$

aller-retour trajet dans la lame ne se fait plus dans l'air



(en négligeant la déviation dans la lame de verre, en première approximation).

$$\Delta L' \approx 2(n-1) \frac{l}{\cos \alpha}$$

$\Delta L'$ ne dépend que de $\alpha \Rightarrow$ on observera des anneaux.

c) au centre : $\alpha = 0 \Rightarrow \Delta L' = 2l(n-1)$

Une variation d'épaisseur Δx entraîne une variation de chemin optique $2\Delta x = 2l(n-1)$.

$$\phi = \frac{2\pi \Delta L'}{\lambda} \quad \uparrow \quad \text{car } \alpha = 0 \text{ (incidence normale)}$$

Entre deux maxima successifs, il y a une différence de chemin optique de λ , donc un déplacement de miroir de $\frac{\lambda}{2}$.

$$\Rightarrow 10\lambda = l(n-1) \Rightarrow \boxed{l = \frac{10\lambda}{n-1} = 8,47 \mu\text{m}}$$

$$8) \boxed{I(x, e) = I_0 \left(1 + \cos \left\{ \frac{4\pi}{\lambda} (e_0 + e) \left(1 - \frac{x^2}{2f^2} \right) \right\} \right)}$$

Pour $x_1 = 0$, $i_1 = a I_1 = a I_0 \left(1 + \cos \left\{ \frac{4\pi}{\lambda} (e_0 + e) \right\} \right)$

$$\boxed{\phi_1(e) = \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 + \frac{e}{e_0} \right)}$$

$$9) \boxed{i_2 = a I_2 = a I_0 \left(1 + \cos \left\{ \frac{4\pi}{\lambda} (e_0 + e) \left(1 - \frac{x^2}{2f^2} \right) \right\} \right)}$$

$$\boxed{\phi_2(e) = \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 + \frac{e}{e_0} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2f^2} \right)}$$

$$10) \phi_1(0) - \phi_2(0) = \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 - 1 + \frac{x_2^2}{2f^2}\right) = \frac{2\pi e_0}{\lambda} \frac{x_2^2}{2f^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = f \sqrt{\frac{\lambda}{4e_0}}$$

$$11) \phi_1(e_{max}) - \phi_2(e_{max}) = \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 + \frac{e_{max}}{e_0}\right) - \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 + \frac{e_{max}}{e_0}\right) \left(1 - \frac{x_2^2}{2f^2}\right)$$

$$= \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 + \frac{e_{max}}{e_0}\right) \frac{x_2^2}{2f^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{36}$$

$$\text{avec } \frac{4\pi e_0}{\lambda} \frac{x_2^2}{2f^2} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{cf 10})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{e_{max}}{e_0}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{36} \Rightarrow \frac{e_{max}}{e_0} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow e_{max} = 0,28 \text{ mm}$$

$$12) \phi_3(0) - \phi_2(0) = \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left[\left(1 - \frac{x_3^2}{2f^2}\right) - \left(1 - \frac{x_2^2}{2f^2}\right) \right]$$

$$= \frac{4\pi e_0}{\lambda} \frac{x_2^2 - x_3^2}{2f^2} = \frac{\pi}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi e_0}{2f^2 \lambda} \left(1 - \frac{x_3^2}{x_2^2}\right) = \frac{\pi}{36}$$

$$\text{or } x_2^2 = f^2 \frac{\lambda}{4e_0} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x_3^2}{x_2^2}\right) = \frac{\pi}{36}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x_3^2}{x_2^2} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{x_3^2}{x_2^2} = \frac{17}{18} \Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{17}{18}} x_2$$

$$\text{or } d = x_2 - x_3 \Rightarrow d = x_2 - \sqrt{\frac{17}{18}} x_2$$

$$\Rightarrow d = x_2 \left(1 - \sqrt{\frac{17}{18}}\right)$$

$$\Rightarrow B = x_2$$

$$13) x_2 = \frac{d}{1 - \sqrt{\frac{17}{18}}} \Rightarrow x_2 = 0,32 \text{ mm}$$

$$* x_2 = f \sqrt{\frac{\lambda}{4e_0}} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{4e_0}{\lambda}} x_2 \Rightarrow f = 6,3 \text{ cm}$$

$$14) i_1' = a I_0 \cos \phi_1(e) \quad (\text{on a supprimé la composante continue})$$

$$\text{avec } \phi_1(e) = \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 + \frac{e}{e_0}\right) = \phi_1(0) + \frac{4\pi e}{\lambda} = \phi_1(0) + \frac{4\pi n t}{\lambda}$$

$$\text{De même, } i_2' = a I_0 \cos \phi_2(e)$$

$$\text{avec } \phi_2(e) = \frac{4\pi e_0}{\lambda} \left(1 + \frac{e}{e_0}\right) \left(1 - \frac{x_2^2}{2f^2}\right)$$

$$\phi_2(e) = \phi_2(0) + \frac{4\pi n t}{\lambda} \left(1 - \frac{x_2^2}{2f^2}\right) = \phi_2(0) + \frac{4\pi n t}{\lambda} \left(1 - \frac{x_2^2}{2f^2}\right)$$

On considère les termes en t comme infiniment petits.

Soit en développant au 1^{er} ordre ($\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$)

$$i_1' = a I_0 \left(\cos \phi_1(0) \times 1 - \sin \phi_1(0) \times \frac{4\pi n t}{\lambda} \right)$$

$$i_1' = a I_0 \left(\cos \phi_1(0) - \frac{4\pi n t}{\lambda} \sin \phi_1(0) \right) = a_1 + b_1 t$$

$$i_2' = a I_0 \left(\cos \phi_2(0) \times 1 - \sin \phi_2(0) \times \frac{4\pi n t}{\lambda} \left(1 - \frac{x_2^2}{2f^2}\right) \right)$$

$$i_2' = a I_0 \left(\cos \phi_2(0) - \frac{4\pi n t}{\lambda} \left(1 - \frac{x_2^2}{2f^2}\right) \sin \phi_2(0) \right)$$

$$\text{avec } \phi_2(0) = \phi_1(0) - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow i_2' = a I_0 \left(\sin \phi_1(0) + \frac{4\pi n t}{\lambda} \left(1 - \frac{x_2^2}{2f^2}\right) \cos \phi_1(0) \right) = a_2 + b_2 t$$

$$\phi_1(0) = \frac{4\pi e_0}{\lambda} = 123689,7501 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \cos \phi_1(0) > 0 \quad \text{et} \quad \sin \phi_1(0) > 0$$

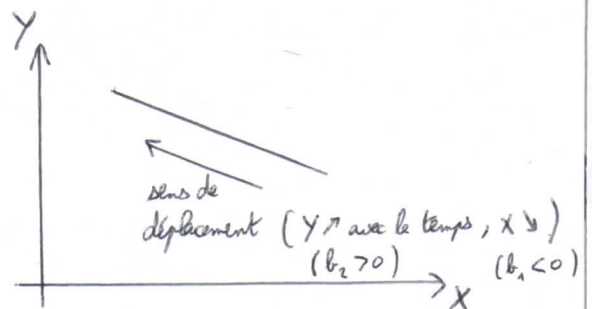
$$\Rightarrow a_1 > 0 ; b_1 < 0 ; a_2 > 0 ; b_2 > 0$$

$$i_1' = a_1 + b_1 t \Rightarrow t = \frac{i_1' - a_1}{b_1}$$

$$i_2' = a_2 + b_2 \left(\frac{i_1' - a_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} \right) = \frac{b_2}{b_1} i_1' + c$$

$c < 0$

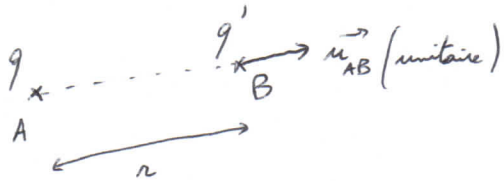
Sachant que X et Y coordonnées du spot sur l'écran sont proportionnels à i_1' et i_2' , $Y = \alpha X + \beta$ avec $\alpha < 0$.



DEUXIEME PROBLEME:PULSAR ET ELECTROMAGNETISME

A) Etude mécanique: (d'après Banque PT 2011)

A-1) * loi de Coulomb:

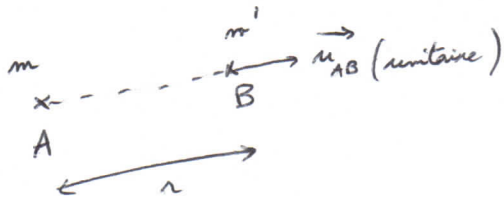


force exercée par q sur q':

$$\vec{F} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{AB} = q' \vec{E}(B)$$

avec \vec{E} le champ électrique créé par q

* loi de Newton:



force exercée par m sur m':

$$\vec{F} = -\frac{m'mG}{r^2} \vec{u}_{AB} = m' \vec{g}(B)$$

avec \vec{g} le champ de gravitation créé par m.

* théorème de Gauss pour le champ électrique:

le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge contenue à l'intérieur de cette surface divisée par la permittivité diélectrique du vide:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

* Par analogie: $q \rightarrow m$

$q' \rightarrow m'$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow -4\pi G$$

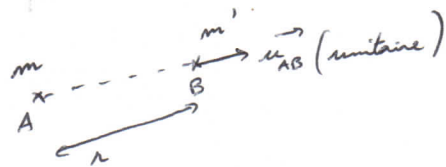
$$\vec{E} \rightarrow \vec{g}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

$$A-2) dm = \mu(r) dV = \mu(r) 4\pi r^2 dr = dm$$

$$m_{totale} = \int_0^R \mu(r) 4\pi r^2 dr$$

A-3)



force exercée par m sur m':

$$\vec{F} = -\frac{m'mG}{r^2} \vec{u}_{AB}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{m'mG}{r^2} dr = d\left(\frac{Gmm'}{r} + c^{\frac{b}{2}}\right)$$

$$= -d\left(-\frac{Gmm'}{r} + c^{\frac{b}{2}}\right) = -dE_p$$

\Rightarrow la force dérive d'une énergie potentielle E_p

$$\Rightarrow E_p = -\frac{Gmm'}{r} + c^{\frac{b}{2}}$$

$$r \rightarrow \infty, E_p = c^{\frac{b}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{Gmm'}{r}$$

A-4) * on a invariance de la distribution de masse par rotation autour de O $\Rightarrow g(r', \phi, \theta)$

* tous les plans contenant la droite (OZ) sont plans de symétrie de la distribution de masse.

or par analogie avec le champ électrique, le champ de gravitation est un vecteur polaire

→ $\vec{g}(\pi) \in$ à tous ces plans, donc à leur intersection

→ $\vec{g}(\pi) \propto \vec{u}_r$

→ $\vec{g}(\pi) = g(r) \vec{u}_r$

→ surface de Gauss : sphère de centre O de rayon r'

→ $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint_S g(r') \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \oint_S g(r') dS$

\uparrow
 $r' = r' = \text{sur } S$
 $= g(r') \oint_S dS = g(r') 4\pi r'^2$

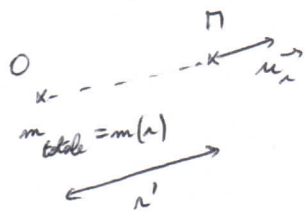
\uparrow
 plan de Gauss
 $= -4\pi G m_{\text{int}}$

Pour $r' > r$ ($r =$ rayon de l'étoile), $m_{\text{int}} = m_{\text{totale}}$

→ $m_{\text{int}} = \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3$

→ $\vec{g}(r') = \frac{-G m_{\text{totale}}}{r'^2} \vec{u}_r = \frac{-G \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3}{r'^2} \vec{u}_r$

$\vec{g}(r') = \frac{-G m_{\text{totale}}}{r'^2} \vec{u}_r = \frac{-G m(r)}{r'^2} \vec{u}_r$



→ Le champ est identique à celui qui serait créé par une masse ponctuelle $m(r)$ située au centre O de l'étoile.

A-5) on a $dm = \mu_c 4\pi r^2 dr$

La force subie par dm est $d\vec{f} = dm \vec{g}(r')$

$$\int^2 W = d\vec{f} \cdot d\vec{l} = dm \vec{g}(r') \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_c 4\pi r^2 dr \left(-\frac{G m(r)}{r'^2} \vec{u}_r \right) \left(dr' \vec{u}_r + r' d\theta \vec{u}_\theta + r' \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi \right)$$

$$= -\mu_c 4\pi r^2 dr G m(r) \frac{dr'}{r'^2}$$

or $m(r) = \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3$

→ $\int^2 W = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^5 dr \frac{dr'}{r'^2}$

$\int W = \int_{\text{infini}}^r \int^2 W$

$= -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^5 dr \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2}$

$\left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r = -\frac{1}{r}$

$= - \left(-G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^4 dr \right)$

$= -dE_p$

→ $dE_p = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^4 dr$

$\Pi_0 = \mu_c \frac{4}{3} \pi R^3$

$E_p = \int_0^R dE_p = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 \int_0^R r^4 dr$
 $\underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{\frac{R^5}{5}}$

$E_p = -G \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \mu_c \right)^2 \left(\frac{1}{R} \times \frac{1}{5} \times 3 \right)$

$E_p = -K \frac{G \Pi_0^2}{R}$

avec $K = \frac{3}{5}$

A-6) f A-4) invariances + symétries + choix de la surface de Gauss \Rightarrow idem

$$\Rightarrow \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G m_{int}$$

$$\text{or } m_{int} = \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow g(r) = -\frac{G m_{int}}{r^2} = -\frac{G \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3}{r^2} = -G \mu_c \frac{4}{3} \pi r$$

$$\text{or } \mu_c = \frac{\rho_0}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \frac{-G \rho_0 r}{R^3} \vec{u}_r \quad \text{à l'intérieur de l'étoile, à la distance } r \text{ de } O.$$

A-7) équilibre hydrostatique $\Rightarrow -\vec{\text{grad}} P + \mu_c \vec{g} = \vec{0}$

\uparrow force volumique de pression \uparrow force volumique de gravitation

$$\Rightarrow -\frac{dP}{dr} \vec{u}_r + \mu_c g(r) \vec{u}_r = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \mu_c g(r) \quad \left(\text{relation fondamentale de la statique des fluides avec } g(r) = -\frac{G \rho_0 r}{R^3} \right)$$

$P(R) = 0$ car au-dessus de l'étoile, on est dans le vide.

$$\int_R^r \frac{dP}{dr'} dr' = \int_0^{P(r)} dP = \int_R^r \mu_c g(r') dr'$$

$$\Rightarrow P(r) = \int_R^r \mu_c \left(-\frac{G \rho_0 r'}{R^3} \right) dr' = -\frac{G \rho_0 \mu_c}{R^3} \int_R^r r' dr' = -\frac{G \rho_0 \mu_c}{R^3} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_R^r = \frac{G \rho_0 \mu_c}{2 R^3} (R^2 - r^2)$$

$$P(r) = -\frac{G \rho_0 \mu_c}{2 R^3} (r^2 - R^2)$$

$$P(r) = -\frac{3 G \rho_0^2}{8 \pi R^6} (r^2 - R^2)$$

A-8) équation d'état des gaz parfaits: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \frac{PV}{m} = \frac{n}{m} RT \Rightarrow \frac{P}{\mu_c} = \frac{R}{M_m} T$$

$$\Rightarrow P(r) = \frac{\mu_c R}{M_m} T(r)$$

gaz parfait: 1^{ère} loi de Joule: $dU = C_V dT$

loi de Mayer: $C_{Pm} - C_{Vm} = R$

definition de γ : $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$

$$\Rightarrow C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

on intègre la 1^{ère} loi de Joule: $U = C_V T + \text{const}$

$$e(r) = \frac{U}{V} = \frac{C_V}{V} T = \frac{n R}{V(\gamma - 1)} T(r) = \frac{n R}{V(\gamma - 1)} \frac{M_m}{\mu_c R} P(r) = \frac{n R}{V(\gamma - 1)} \frac{m}{m} P(r) = \frac{P(r)}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow P(r) = (\gamma - 1) e(r) \quad \left(\begin{array}{l} P(R) = 0 \\ \text{et } e(R) = 0 \end{array} \right)$$

(d'où le choix de la constante nulle en intégrant la 1^{ère} loi de Joule).

$$\Rightarrow e(r) = \frac{P(r)}{\gamma - 1}$$

$$E_{int} = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_0^R \frac{-3GM_0^2}{(\gamma-1)8\pi R^6} (r^2 - R^2) 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{-3GM_0^2}{(\gamma-1)2R^6} \left[\int_0^R r^4 dr - R^2 \int_0^R r^2 dr \right]$$

$$\frac{R^5}{5} - \frac{R^5}{3} = \frac{-2}{15} R^5$$

$$E_{int} = \frac{GM_0^2}{5(\gamma-1)R}$$

or $E_p = -\kappa \frac{GM_0^2}{R} = -\kappa 5(\gamma-1) E_{int}$
avec $\kappa = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow E_p = -5\kappa(\gamma-1) E_{int} = -3(\gamma-1) E_{int}$$

A-9) $\rho_0 = \mu_0 \frac{4}{3} \pi R^3 = 4 \cdot 10^{23} \text{ kg} = \rho_0$

$$E_p = -\kappa \frac{GM_0^2}{R} = -\frac{3}{5} \frac{GM_0^2}{R} = -6 \cdot 10^{44} \text{ J} = E_p$$

$$E_{int} = \frac{-E_p}{3(\gamma-1)} = 3 \cdot 10^{44} \text{ J} = E_{int}$$

$$P(0) = \frac{3GM_0^2}{8\pi R^4} = 1 \cdot 10^{32} \text{ Pa} = P(0)$$

A-10) équation de Maxwell-Gauss: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\vec{E} \Leftrightarrow \vec{g}$$

ρ : densité volumique de charge $\Leftrightarrow \mu$ masse volumique
($q \Leftrightarrow m$)

$$\frac{1}{\epsilon_0} \Leftrightarrow -4\pi G$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{g} = -4\pi G \mu$$

$$\text{or } \vec{g} = g(r) \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{g} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 g(r))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 g(r)) = -4\pi G \mu(r)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} (r^2 g(r)) = -4\pi G r^2 \mu(r)$$

statique des fluides: $-\text{grad } P + \mu(r) \vec{g} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \mu(r) g(r)$$

or $P(r) = K_0 \mu(r)^k \Rightarrow \frac{dP}{dr} = K_0 k \mu^{k-1} \frac{d\mu}{dr}$

$$\Rightarrow g(r) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr} = K_0 k \mu^{k-2} \frac{d\mu}{dr}$$

on remplaçant dans l'équation différentielle:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{k-2} \frac{d\mu}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{k K_0} r^2 \mu$$

A-11) $y = \left(\frac{\mu}{\mu_c} \right)^{1/n}$

Si y est considéré comme une fonction de r :

$$\Rightarrow \frac{dy}{dr} = \frac{1}{\mu_c^{1/n}} \frac{1}{n} \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\mu}{dr} \quad (a)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{1}{\mu_c^{1/n}} \frac{1}{n} \left(\mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d^2 \mu}{dr^2} + \left(\frac{1}{n}-1 \right) \mu^{\frac{1}{n}-2} \left(\frac{d\mu}{dr} \right)^2 \right) \quad (b)$$

D'autre part, $k=1+\frac{1}{n}$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{k-2} \frac{d\mu}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\mu}{dr} \right)$$

$$= \frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{\frac{1}{n}-1} \right) \frac{d\mu}{dr} + r^2 \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d^2 \mu}{dr^2}$$

$$= 2r \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\mu}{dr} + r^2 \left(\frac{1}{n}-1 \right) \mu^{\frac{1}{n}-2} \left(\frac{d\mu}{dr} \right)^2 + r^2 \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d^2 \mu}{dr^2}$$

(a) $\Rightarrow 2r \mu_c^{1/n} \frac{dy}{dr}$

(b) $\Rightarrow r^2 \mu_c^{1/n} \frac{d^2 y}{dr^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{k-2} \frac{d\mu}{dr} \right) = r^2 \mu_c^{1/m} m \frac{d^2 y}{dr^2} + 2 r m \mu_c^{1/m} \frac{dy}{dr}$$

$$= - \frac{4\pi G}{k K_0} r^2 \mu$$

$$= - \frac{4\pi G}{(1+\frac{1}{m}) K_0} r^2 \mu_c y^m$$

$$k = 1 + \frac{1}{m}$$

$$\mu = \mu_c y^m$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dy}{dr} = - \frac{4\pi G}{(m+1) K_0} \mu_c^{1-\frac{1}{m}} y^m$$

ça ne colle pas à l'équation proposée.

⇒ y est donc considéré comme une fonction de x (non précisé par l'énoncé original).

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dr} = y' \frac{1}{a}$$

$x = \frac{r}{a}$

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{d\left(\frac{y'}{a}\right)}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{1}{a^2} y''$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} y'' + \frac{2}{a r} y' = - \frac{4\pi G}{(m+1) K_0} \mu_c^{1-\frac{1}{m}} y^m$$

$$\Rightarrow y'' + 2 \frac{a}{r} y' = - \frac{4\pi G a^2 \mu_c^{1-\frac{1}{m}}}{(m+1) K_0} y^m$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' + 2 \frac{y'}{x} = - y^m}$$

à la condition que $\frac{4\pi G a^2 \mu_c^{1-\frac{1}{m}}}{(m+1) K_0} = 1$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{(m+1) K_0}{4\pi G \mu_c^{1-\frac{1}{m}}}}$$

$$\text{or } k = 1 + \frac{1}{m} \Rightarrow m = \frac{1}{k-1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Rightarrow 1 - \frac{1}{m} = 2 - k \\ \Rightarrow m+1 = \frac{k}{k-1} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\frac{k K_0}{4\pi G (k-1) \mu_c^{2-k}}}}$$

A-19) * en $r=0$, on est au cœur ⇒ $\mu(0) = \mu_c$

$$\Rightarrow y_m(0) = \left(\frac{\mu(0)}{\mu_c}\right)^{1/m} = 1^{1/m} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y_m(0) = 1}$$

* en $r=0$, la masse volumique est maximale (à cause de la gravitation!) ⇒ $\frac{d\mu}{dr}(r=0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy_m}{dx}(0) = 0}$$

$$\left(\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dr} = a \frac{1}{\mu_c^{1/m}} \frac{1}{m} \mu_c^{\frac{1}{m}-1} \frac{d\mu}{dr} \right)$$

\uparrow a \uparrow (a)

$$* m=1 \Rightarrow y'' + 2 \frac{y'}{x} = -y$$

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow y_1' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y_1'' = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} - \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}$$

$$= - \frac{\sin x}{x} - 2 \frac{\cos x}{x^2} + 2 \frac{\sin x}{x^3}$$

$$\Rightarrow y_1'' + 2 \frac{y_1'}{x} = - \frac{\sin x}{x} - 2 \frac{\cos x}{x^2} + 2 \frac{\sin x}{x^3}$$

$$+ 2 \frac{\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)}{x}$$

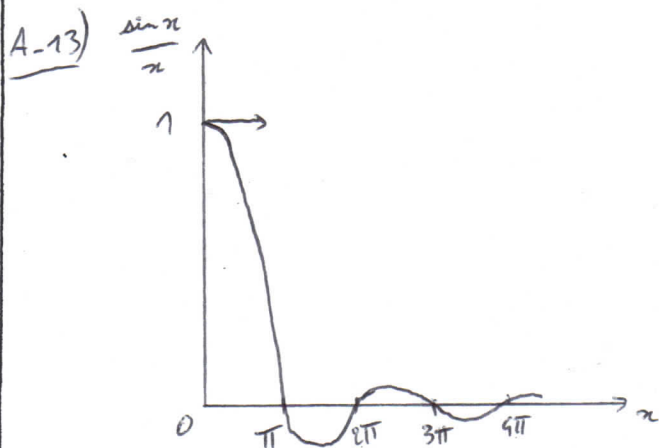
$$= - \frac{\sin x}{x} = -y_1$$

⇒ $\frac{\sin x}{x}$ vérifie l'équation différentielle

$$* y_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{OK}$$

$$* y_1'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} = 0 \quad \text{OK}$$

La solution proposée vérifie l'équation différentielle et les 2 conditions aux limites, c'est donc la solution au problème.



$\frac{\sin x}{x}$ s'annule en $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}^*$

$$y = \left(\frac{\mu(r)}{\mu_c} \right)^{\frac{1}{n}} > 0$$

= 0 en $r = R$ rayon de l'étoile

($y < 0$ n'a pas de sens physique).

$$\Rightarrow \text{en } r = R, x = \pi$$

$$\Rightarrow \frac{R}{a} = \pi \Rightarrow R = \pi a$$

$$a = \sqrt{\frac{k \kappa_0}{4\pi G (k-1) \mu_c^{2-k}}} \quad \text{avec } n=1$$

$$\Rightarrow k = 1 + \frac{1}{n} = 2$$

$$\Rightarrow R = \pi \sqrt{\frac{2 \kappa_0}{4\pi G (2-1) \mu_c^{2-2}}} = \sqrt{\frac{\pi \kappa_0}{2G}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt{\frac{\pi \kappa_0}{2G}}}$$

$$P(r) = \kappa_0 \mu(r)^k = \kappa_0 \mu(r)^2$$

$$\Rightarrow P(0) = \kappa_0 \mu(0)^2 = \kappa_0 \mu_c^2$$

$$\Rightarrow \kappa_0 = \frac{P(0)}{\mu_c^2} = \frac{1 \cdot 10^{32}}{(10^{17})^2} = 10^{-2} \text{ SI}$$

$$\boxed{R = 1 \cdot 10^4 \text{ m} \approx 10 \text{ km}}$$

R_0 : même valeur qu'en A-3)

* en $\theta=0$ et $\theta=\pi$, $r=0$

* $r=r_{\max}=r_0$ en $\theta=\frac{\pi}{2}$ et $\theta=-\frac{\pi}{2}$

* $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $B_r > 0$, d'où l'orientation des lignes de champ

B-2) $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ force de Lorentz

$\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y \Rightarrow \vec{F} = q \vec{v} \wedge B_0 \vec{e}_y$

On néglige toutes les autres forces (donc le poids, et on se place dans un référentiel galiléen \Rightarrow pas de forces d'inertie)

RFD: $m \vec{a} = q \vec{v} \wedge B_0 \vec{e}_y$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q B_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = q B_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = q B_0 \dot{y} \\ m \ddot{y} = -q B_0 \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = q B_0 y + c_1 \\ m \ddot{y} = -q B_0 x + c_2 \\ \dot{z} = c_3 \end{cases}$$

or à $t=0$, $\dot{y} = v_{0y}$; $\dot{x} = v_{0x}$; $\dot{z} = 0$

$y_0 = 0$; $x_0 = 0$; $y = 0$
(on choisit l'origine là où se trouve la charge initiale)

$$\Rightarrow \begin{cases} m(\dot{x} - v_{0x}) = q B_0 y \\ m \dot{y} = -q B_0 x \\ \dot{z} = v_{0z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{q B_0}{m} y + v_{0x} \\ \dot{y} = -\frac{q B_0}{m} x \end{cases}$$

or $\begin{cases} m \ddot{x} = q B_0 \dot{y} \\ m \ddot{y} = -q B_0 \dot{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = -\frac{q^2 B_0^2}{m} x \\ m \ddot{y} = -\frac{q^2 B_0^2}{m} y - q B_0 v_{0x} \\ \dot{z} = v_{0z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{q^2 B_0^2}{m^2} x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{q^2 B_0^2}{m^2} y = -\frac{q B_0}{m} v_{0x} \\ \dot{z} = v_{0z} \end{cases}$$

on reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\frac{q B_0}{m}$

DEUXIEME PROBLEME :

PULSAR ET ELECTROMAGNETISME

(d'après banque PT 2011)

B) Electromagnétisme :

B-1) Sur les lignes de champ, \vec{B} et $d\vec{l}$ sont colinéaires.

$$\vec{B} \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \end{pmatrix} = \alpha d\vec{l} = \alpha \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix}$$

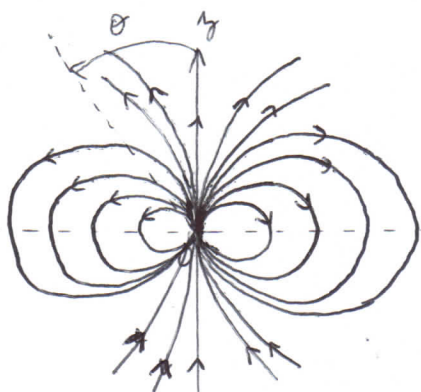
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{\frac{2\mu_0 I_0 \cos\theta}{4\pi r^3}} = \frac{r d\theta}{\frac{\mu_0 I_0 \sin\theta}{4\pi r^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{2 \cos\theta} = \frac{r d\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \ln r = 2 \ln(\sin\theta) + c_1 \\ = \ln \sin^2\theta + \ln r_0 \quad \uparrow c_1$$

$\Rightarrow r = r_0 \sin^2\theta$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_1\right) \\ y = \alpha_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_2\right) - \frac{m}{qB}v_{0\perp} \\ z = v_{0z}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\alpha_1 \frac{qB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_1\right) \\ \dot{y} = -\alpha_2 \frac{qB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

conditions initiales:

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \cos \varphi_1 \\ 0 = \alpha_2 \cos \varphi_2 - \frac{m}{qB}v_{0\perp} \\ v_{0\perp} = -\alpha_1 \frac{qB}{m} \sin \varphi_1 \\ 0 = -\alpha_2 \frac{qB}{m} \sin \varphi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = 0, \alpha_2 = \frac{m}{qB}v_{0\perp}, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_1 = \frac{mv_{0\perp}}{qB}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{mv_{0\perp}}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ y = \frac{mv_{0\perp}}{qB} \left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right) \\ z = v_{0z}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{mv_{0\perp}}{qB}\right)^2 = \left(\frac{mv_{0\perp}}{qB}\right)^2 \underbrace{\left(\sin^2\frac{qBt}{m} + \cos^2\frac{qBt}{m}\right)}_1$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{mv_{0\perp}}{qB}\right)^2 = \left(\frac{mv_{0\perp}}{qB}\right)^2 = R^2$$

On reconnaît l'équation d'un cercle dans le plan (xOy) , centré en $y = -\frac{mv_{0\perp}}{qB}$ et de rayon $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\boxed{R = \frac{mv_{0\perp}}{qB}}$$

or $z = v_{0z}t$ croît linéairement avec t

\Rightarrow mouvement hélicoïdal



$$\dot{x} = v_{0\perp} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right); \quad \dot{y} = -v_{0\perp} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right); \quad \dot{z} = v_{0z}$$

$$\Rightarrow E_{c\perp} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mv_{0\perp}^2 = E_{c\perp}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv_{0\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{0z}^2 = E_c$$

$\Rightarrow E_c$ et $E_{c\perp}$ sont constantes au cours du temps.

B.3) $\mu = IS$

avec S la surface de la spire de rayon $R = \frac{mv_{0\perp}}{qB}$

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{\pi m^2 v_{0\perp}^2}{q^2 B^2}$$

et I le courant parcourant la spire

$\Rightarrow I = \frac{q}{T}$ avec T la période (temps qu'il faut pour que la charge fasse le tour du cercle).

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \text{ et on a vu que } \Omega = \frac{qB}{m}$$

$$\Rightarrow I = \frac{q\Omega}{2\pi} = \frac{q^2 B}{2\pi m}$$

$$\Rightarrow \mu = IS = \frac{q^2 B}{2\pi m} \frac{\pi m^2 v_{0\perp}^2}{q^2 B^2}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2}mv_{0\perp}^2 \times \frac{1}{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{E_{c\perp}}{B}}$$

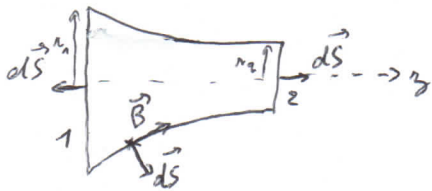
B.4) a) \vec{B} est à flux conservatif

$$\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall S \text{ fermée}$$

Soit S une surface fermée constituée de :

* $S_{\text{latérale}}$ = tube de champ

* 2 bases = 2 sections droites du tube de champ
= 2 disques



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{left}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{base 1}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{base 2}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

par déf. du tube de champ: $\vec{B} \perp d\vec{S}$

$$\Rightarrow - \iint_{\text{base 1}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{base 2}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \iint_{\text{section 1}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{section 2}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

avec $d\vec{S} = +dS \vec{e}_z$ (vers la droite).

\Rightarrow le flux de \vec{B} à travers une section est constant.

$$\Rightarrow \iint_{\text{section}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = c^k = \iint_{\text{section}} B_z dS$$

or l'énoncé dit que " B_z est lentement variable"

\Rightarrow on suppose $B_z \approx c^k$ sur la section

$$\Rightarrow B_z \pi r^2 = c^k \Rightarrow r^2 B_z = \frac{c^k}{\pi} \text{ sur un tube de champ}$$

$$b) \mu = \frac{E_{c\perp}}{B_z} = c^k = \frac{\frac{1}{2} m (r\Omega)^2}{B_z}$$

$$\text{or } \Omega = \frac{q B_z}{m} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} m r^2 \frac{q^2 B_z^2}{m^2}}{B_z} = c^k$$

$$\Rightarrow r^2 B_z = c^k$$

or sur un tube de champ: $r^2 B_z = c^k$

\Rightarrow la trajectoire est une succession de cercles qui suivent un tube de champ.

c) Quand on va de $z_1=0$ à $z_2=z_2$, $r \searrow \Rightarrow B_z \nearrow$
 $\text{or } \mu = \frac{E_{c\perp}}{B_z} = c^k \Rightarrow E_{c\perp} \nearrow$

or le système n'est soumis qu'à une seule force qui ne travaille pas: $(P = \vec{F} \cdot \vec{v} = (q \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0)$
 D'après le thm de l'énergie cinétique: $E_c = c^k$

$$\Rightarrow E_{c\perp} + \frac{1}{2} m v_z^2 = c^k$$

$$\text{or } E_{c\perp} \nearrow \Rightarrow v_z \searrow$$

$$* v_z(r_2) = 0 \Rightarrow E_{c\perp}(r_2) = E_{c\perp}(r_0) + \frac{1}{2} m v_{0z}^2$$

$$\frac{1}{2} m (r_2 \Omega_2)^2 = \frac{1}{2} m (r_0 \Omega_0)^2 + \frac{1}{2} m v_{0z}^2$$

$$\text{or } \Omega = \frac{q B_z}{m} \Rightarrow \frac{q^2}{m^2} r_2^2 B_z^2(r_2, z_2) = \frac{q^2}{m^2} r_0^2 B_z^2(r_0, 0) + v_{0z}^2$$

$$\text{or } r^2 B_z = c^k \Rightarrow B_z(r_2, z_2) = \frac{r_0^2}{r_2^2} B_z(r_0, 0)$$

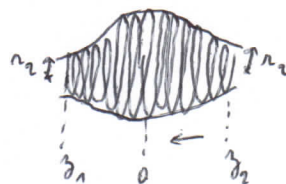
$$\frac{q^2}{m^2} \frac{r_0^4}{r_2^2} B_z^2(r_0, 0) = \frac{q^2}{m^2} r_0^2 B_z^2(r_0, 0) + v_{0z}^2$$

$$\frac{q^2}{m^2} r_0^2 B_z^2(r_0, 0) \left(\frac{r_0^2}{r_2^2} - 1 \right) = v_{0z}^2$$

$$\frac{r_0^2}{r_2^2} = 1 + \frac{m^2 v_{0z}^2}{q^2 r_0^2 B_z^2(r_0, 0)}$$

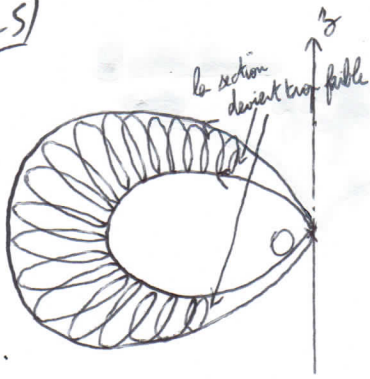
$$\Rightarrow r_2 = r_0 \sqrt{1 + \frac{m^2 v_{0z}^2}{q^2 r_0^2 B_z^2(r_0, 0)}}$$

* mouvement ultérieur: le champ magnétique a une composante radiale qui va créer une force sur la charge
 $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}_r \propto -\vec{e}_z \Rightarrow$ la charge va repartir dans le sens des z_j décroissants (tout en continuant à tourner)



Elle ira jusqu'en z_1 où le rayon du tube est r_2 .
 Puis elle ira vers la droite, etc.

B-5)



la particule sera piégée sur le tube de champ, et quand la section devient trop faible, la particule fera demi-tour

C'est le principe de la protection de la Terre contre les vents solaires grâce au champ magnétique terrestre.

B.6) Dans le référentiel de l'étoile : la particule est à l'équilibre, donc immobile, et est placée dans un champ magnétique permanent \Rightarrow pas de phénomène d'induction $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$
 * Dans R^* , $\vec{F} = \vec{0}$ en invariance des forces par changement de référentiel.

$$\Rightarrow q(\vec{E}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_1) \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{B}$$

ou $\vec{v}_2 = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ (en rotation autour de l'axe (O, z))
 en coordonnées cylindriques

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = -(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \vec{E}_1$$

Sur l'équateur : $\vec{B} = -B \vec{e}_z$ (cf orientation lignes de champ)

$$\vec{r} = R \vec{e}_r$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_1 = -B \vec{e}_z \wedge (\Omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_r)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = R \Omega B \vec{e}_r \quad \text{sur l'équateur}$$

porté par $+\vec{e}_r \Rightarrow$ expulsion des particules

B.7)
$$E_1 = 6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

co-rotation \Rightarrow même vitesse de rotation

$$v_{\text{max}} = c = r_{\text{max}} \Omega$$

\Rightarrow

$$r_{\text{max}} = \frac{c}{\Omega} = \frac{3 \cdot 10^8}{6} = 5 \cdot 10^7 \text{ m}$$