PT 2017-2018 DL1

PREMIER PROBLEME : L'électronique au service du microscope (d'après banque PT 2017)

1- Générateur de balayage :

1-1) $\boxed{i^+ = i^- = 0}$ (résistance d'entrée infinie)

$\boxed{\text{gain infini}}$

1-2) L'ALI 2 n'a pas de boucle de rétroaction entre sa sortie et son entrée inverseuse ⊖

$\Rightarrow$ il fonctionne en régime de saturation.

1-3) $-3V \leq u(t) \leq 3V$

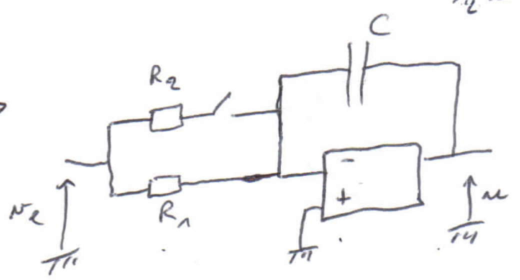
or $V_{sat} = V_0 = 15V$ $\Rightarrow$ $|u(t)| < V_{sat}$

$\Rightarrow$ l'ALI 1 fonctionne en régime linéaire

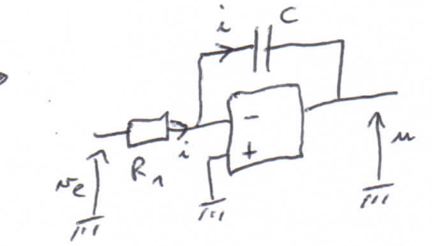
(car $u(t)$ est la tension en sortie de l'ALI 1)

1-4) * $v_e = +V_0 = +15V > 0$ $\Rightarrow$ D_1 est fermé, D_2 est ouvert.

$\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$



* ALI idéal $\Rightarrow$ $i^- = 0$ $\Rightarrow$ $i_{R_1} = i_C$
* régime linéaire $\Rightarrow$ $V^- = V^+$ or $V^+ = 0$ $\Rightarrow$ $V^- = 0$
* $i_{R_1} = \dfrac{v_e - V^-}{R_1}$ $\qquad i_C = C\dfrac{d(V^- - u)}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{v_e}{R_1} = -C\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} v_e$$

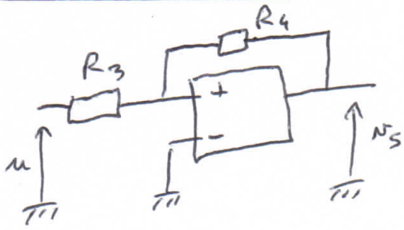
or $v_e = +V_0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{V_0}{R_1 C}$

$$\Rightarrow u(t) = -\frac{V_0}{R_1 C} t + \cancel{c^{te}}$$

$u(t=0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = -\frac{V_0}{R_1 C} t}$$

1-5)



ALI idéal $\Rightarrow$ $i^+ = 0$

thm de Millman : $V^+ = \dfrac{\frac{u}{R_3} + \frac{v_s}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$

$$\Rightarrow \boxed{V^+ = \frac{R_4 u + R_3 v_s}{R_3 + R_4}}$$

Pour $0 < t < t_1$: $v_s = v_e = +V_0$

relié par un fil

$\Rightarrow$ l'ALI 2 est en saturation haute

$$\Rightarrow \begin{cases} V^+ - \cancel{V^-} > 0 \\ v_s = +V_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{R_4 u + R_3 V_0}{R_3 + R_4} > 0 \Rightarrow u > -\frac{R_3}{R_4} V_0$$

$$\Rightarrow -\frac{V_0}{R_1 C} t_1 = -\frac{R_3}{R_4} V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{R_1 R_3}{R_4} C}$$

1-6) Pour l'ALI 1 : $V^+ = 0$ or régime linéaire

$\Rightarrow V^+ = V^- \Rightarrow V^- = 0$

La tension aux bornes du condensateur est donc $(u - V^-) = (u - 0) = u$.

Or on a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur (continuité de l'énergie $\frac{1}{2} C u^2$)

$\Rightarrow$ $u(t)$ ne peut pas subir de discontinuité

1-7) A $t=t_1$, $v_s=v_e$ passe de $+V_0$ à $-V_0$

$\Rightarrow v_e=-V_0<0 \Rightarrow D_1$ est ouvert
D_2 est fermé

$\Rightarrow$ on remplace R_1 par R_2

...

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{R_2C}v_e \quad \text{avec } v_e=-V_0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{V_0}{R_2C} \Rightarrow u(t)=\frac{V_0}{R_2C}t+c^{te}$$

or à $t=t_1$, $u(t_1)=-\dfrac{R_3}{R_4}V_0$

$$\Rightarrow \boxed{u(t)=\frac{V_0}{R_2C}(t-t_1)-\frac{R_3}{R_4}V_0}$$

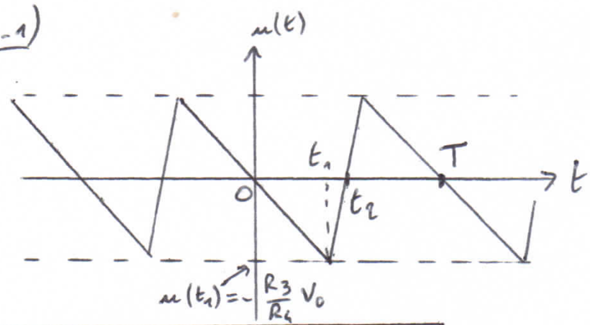
or $t_1=\dfrac{R_1R_3}{R_4}C$

$$\Rightarrow \boxed{u(t)=\frac{V_0}{R_2C}t-\frac{R_3}{R_4}V_0\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

$$u(t_2)=0=\frac{V_0}{R_2C}t_2-\frac{R_3}{R_4}V_0\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2=\frac{R_3}{R_4}(R_1+R_2)C}$$

1-8-1)



$$\boxed{T=2t_2=2\frac{R_3}{R_4}(R_1+R_2)C}$$

1-8-2) * $u(t_1)=-\dfrac{R_3}{R_4}V_0=-3V$
↑
lecture graphique
(3 carreaux / 1V/div)

$$\Rightarrow R_3=\frac{3V}{V_0}R_4=\frac{3}{15}\cdot 1=\frac{1}{5}=0,2\,k\Omega$$

$$\boxed{R_3=0,2\,k\Omega}$$

$$* \quad t_2-t_1=\frac{R_3}{R_4}(R_1+R_2)C-\frac{R_1R_3}{R_4}C=\frac{R_2R_3}{R_4}C$$

$\simeq 0,5$ carreau $\times$ 1 ms/div
$\simeq 0,5$ ms

$$R_2=\frac{(t_2-t_1)R_4}{R_3C}=\frac{0,5.10^{-3}\times 1}{0,2\times 1.10^{-6}}=2,5.10^3\,\Omega=2,5\,k\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2=3\,k\Omega}$$

$$* \quad T=2\frac{R_3}{R_4}(R_1+R_2)C \Rightarrow R_1=\frac{TR_4}{2R_3C}-R_2$$

or $T\simeq 5$ carreaux $\times$ 1 ms/div $=5$ ms

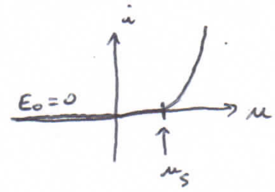
$$\Rightarrow R_1=\frac{5.10^{-3}\times 1}{2\times 0,2\times 1.10^{-6}}-2,5.10^3$$

$$=12,5.10^3-2,5.10^3=10.10^3\,\Omega=10\,k\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1=1.10^1\,k\Omega}$$

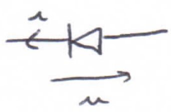
2. Le capteur CCD :

2-1)



$\boxed{u_s=0,6V}$ par lecture graphique

2-2)



on est en convention récepteur

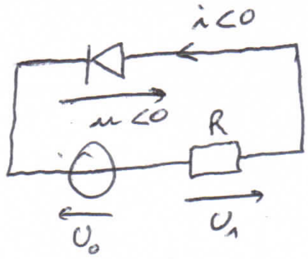
$\Rightarrow$ le composant se comporte comme un dipôle récepteur si u et i sont de même signe ($|u=Ri$)

$\Rightarrow$ cadrans 1 et 2

Le composant se comporte comme un dipôle générateur si u et i sont de signes opposés.

$\Rightarrow$ cadran 3

2-3-1)



le générateur impose $i<0$ et $u<0$

$\Rightarrow$ le point de fonctionnement se trouve dans le cadran 2 (dipôle récepteur).

2-3-2) * loi d'Ohm : $U_1 = -Ri$ (convention générateur)

* Dans le cadran 2 : $i=0$ pour $E_0=0$

$i = -0{,}01\,mA$ pour $E_1 \simeq 1000$ lum

$i \simeq -0{,}02\,mA$ pour $E_2 \simeq 2000$ lum

$i = -0{,}03\,mA$ pour $E_3 \simeq 3000$ lum

$\Rightarrow$ i est proportionnel à E

$$i = \underset{\substack{\uparrow\\ mA/lum}}{-10^{-5}}\,E = \underset{\substack{\uparrow\\ A/lum}}{-10^{-8}}\,E$$

* $U_1 = -Ri$ avec $R = 1\,k\Omega = 1.10^3\,\Omega$

$$= 10^3 . 10^{-8}\,E = 10^{-5}\,E$$

$$\boxed{U_1 = kE \quad \text{avec} \quad k = 10^{-5}\ V.lum^{-1}}$$

2-4) ALI idéal $\Rightarrow i^+ = i^- = 0$

régime linéaire $\Rightarrow V^+ = V^-$

or $V^+ = U_1 \Rightarrow V^- = U_1 = kE$

thm de Millman sur l'entrée $\ominus$ ($i^-=0$) :

$$V^- = \frac{\frac{0}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,U_2 = kE$$

$$\Rightarrow \quad U_2 = k\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)E = KE$$

avec $\boxed{K = k\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$

Supposons que l'on veuille $K = 1\ V.lum^{-1}$

(l'énoncé n'a pas précisé d'unité !)

$$K = 10^{-5}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 1$$

si $\frac{R_2}{R_1} = 10^5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_2 = 10^5\,R_1}$

PT 2017 - 2018 DL 1

DEUXIEME PROBLEME : Retard introduit par un filtre passe-bas d'ordre 2.

1) $\underline{H} = \dfrac{-1}{1-x^2+jx\sqrt{2}} = \dfrac{-(1-x^2)+jx\sqrt{2}}{(1-x^2)^2+2x^2}$

$\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{x\sqrt{2}}{-(1-x^2)} = \dfrac{-x\sqrt{2}}{1-x^2}$

or $x \ll 1$ $(\omega \ll \omega_0)$ $\Rightarrow \dfrac{1}{1-x^2} = 1+x^2$

$\Rightarrow \tan\varphi = -x\sqrt{2}\,(1+\cancel{x^2}) = -x\sqrt{2} < 0$

or $\cos\varphi$ est du signe de $-(1-\cancel{x^2}) < 0$

$\sin\varphi$ " " " " $x\sqrt{2} > 0$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow \varphi = \pi - \text{Arctan}\, x\sqrt{2} \simeq \pi - x\sqrt{2}$

$\varphi \simeq \pi - \dfrac{\omega}{\omega_0}\sqrt{2}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi = \pi - K\omega}$ avec $\boxed{K = \dfrac{\sqrt{2}}{\omega_0}}$

2) * $\boxed{\langle E(t) \rangle = \dfrac{E_0}{2}}$ vrai pour le signal créneau et pour son développement en série de Fourier $\Rightarrow$ OK !

* Le créneau est une fonction paire, son développement en série de Fourier est bien une fonction paire (série de cosinus). (pas de sinus).

3) On peut sommer de $p=0$ à $p=5$ car les signaux sont assimilés à leurs 6 premiers harmoniques non nuls.

$$s(t) = \underline{H}(0)\frac{E_0}{2} + \sum_{p=0}^{5} \frac{2E_0(-1)^p}{\pi(2p+1)} \left|\underline{H}((2p+1)\omega)\right| \times \cos\left(\frac{2\pi(2p+1)t}{T} + \varphi((2p+1)\omega)\right)$$

$\underline{H}(0) = -1$

Or pour $p=5$: $(2p+1)\omega = 11\omega = 1100\ \text{rad.s}^{-1} \ll \omega_0 = 10000\ \text{rad.s}^{-1}$

$\Rightarrow$ dans le domaine des pulsations considérées, $x \ll 1$

$\Rightarrow |\underline{H}| \simeq 1$ et $\varphi((2p+1)\omega) \simeq \pi - K(2p+1)\omega$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{E_0}{2} + \sum_{p=0}^{5} \frac{2E_0(-1)^p}{\pi(2p+1)} \cos\left((2p+1)\omega t + \pi - K(2p+1)\omega\right)$$

$$s(t) = -\frac{E_0}{2} + \sum_{p=0}^{5} \frac{2E_0(-1)^p}{\pi(2p+1)} \cos\left((2p+1)\omega(t-K) + \pi\right)$$

$$s(t) = -\frac{E_0}{2} - \sum_{p=0}^{5} \frac{2E_0(-1)^p}{\pi(2p+1)} \cos\left((2p+1)\omega(t-K)\right)$$

inversion du signal

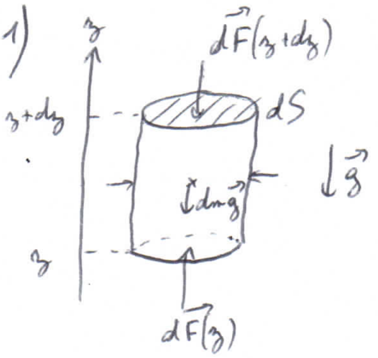
retard de $\tau = K$

$\tau = K = \dfrac{\sqrt{2}}{\omega_0} \simeq \dfrac{1{,}4}{10000}$

$\boxed{\tau = K = \dfrac{\sqrt{2}}{\omega_0} \simeq 1{,}4.10^{-4}\ \text{s} = 0{,}14\ \text{ms}}$

TROISIEME PROBLEME : Equilibre d'une atmosphère non isotherme

1)



$dm = \rho\, dS\, dz$

$\uparrow$ $\simeq c^{te}$ entre z et $z+dz$

forces s'exerçant sur le cylindre :

- poids : $dm\,\vec{g} = -\rho\, dS\, dz\, g\, \vec{u_z}$
- forces de pression
  - latéralement : elles se compensent
  - $\vec{dF}(z+dz) = -P(z+dz)\,dS\,\vec{u_z}$
  - $\vec{dF}(z) = +P(z)\,dS\,\vec{u_z}$

relation fondamentale de la statique (projetée sur $\vec{u_z}$)

$\Rightarrow -\rho\, dS\, dz\, g - P(z+dz)\,dS + P(z)\,dS = 0$

$\Rightarrow -\rho g\, dz = P(z+dz) - P(z) = \dfrac{dP}{dz}dz$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dP}{dz} = -\rho g}$

2) équation d'état des GP : $PV = nRT$

$\Rightarrow P\dfrac{V}{m} = \dfrac{n}{m}RT \Rightarrow \dfrac{P}{\rho} = \dfrac{RT}{M}$

$\Rightarrow \rho = \dfrac{MP}{RT}$

$\Rightarrow \dfrac{dP}{dz} = -\rho g = -\dfrac{MP}{RT}g \Rightarrow \dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT}dz$

or $T = T_0 = c^{te} \Rightarrow \dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT_0}dz$

$\Rightarrow \ln\dfrac{P}{P_0} = -\dfrac{Mg}{RT_0}(z-0)$

$\Rightarrow \boxed{P = P_0\, e^{-\frac{z}{H}} \quad \text{avec } H = \dfrac{RT_0}{Mg}}$

3) $T = T_0\dfrac{z_0}{z+z_0}$ et $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT}dz$

$\Rightarrow \dfrac{dP}{P} = -\dfrac{Mg}{RT_0}\,\dfrac{z+z_0}{z_0}dz = -\dfrac{1}{H}\left(1+\dfrac{z}{z_0}\right)dz$

$\Rightarrow \ln\dfrac{P}{P_0} = -\dfrac{z}{H} - \dfrac{1}{Hz_0}\,\dfrac{z^2}{2} = -\dfrac{z}{H}\left(1+\dfrac{z}{2z_0}\right)$

$\Rightarrow \boxed{P = P_0\, e^{-\frac{z}{H}\left(1+\frac{z}{2z_0}\right)}}$

4) __1^er modèle__ : $P = P_0\, e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = \dfrac{RT_0}{Mg}$

$H = 8{,}8.10^3\,m$ $\boxed{P(8850\,m) = 0{,}36\text{ bar}}$

__2^ème modèle__ : $P = P_0\, e^{-\frac{z}{H}\left(1+\frac{z}{2z_0}\right)}$

Il faut au préalable déterminer z_0.

gradient de température $= \dfrac{dT}{dz}$ or $T = T_0\dfrac{z_0}{z+z_0}$

$\Rightarrow \dfrac{dT}{dz} = \dfrac{-T_0 z_0}{(z+z_0)^2} \Rightarrow \left.\dfrac{dT}{dz}\right)_{z=0} = -\dfrac{T_0}{z_0} = -7{,}5\,K.km^{-1}$

$\Rightarrow z_0 = 40\,km$

$\boxed{P(8850\,m) = 0{,}33\text{ bar}}$

5) $z \ll H = 8{,}8.10^3\,m < z_0 = 40\,km$

1^er modèle : $P = P_0\, e^{-\frac{z}{H}} \simeq P_0\left(1-\dfrac{z}{H}\right)$

2^ème modèle : $P = P_0\, e^{-\frac{z}{H}\left(1+\cancel{\frac{z}{2z_0}}\right)} = P_0\left(1-\dfrac{z}{H}\right)$

$\Rightarrow \boxed{P = P_0\left(1-\dfrac{z}{H}\right)}$ dans les 2 cas

PT 2017 - 2018 DL1

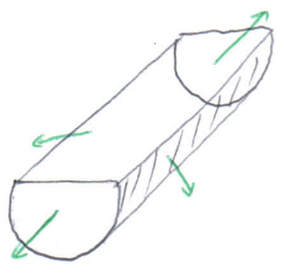
QUATRIEME PROBLEME : Force pressante sur la paroi d'un récipient

1) $\boxed{\dfrac{dP}{dz} = +\rho g}$ car $\downarrow z$

2) $dP = \rho g \, dz \Rightarrow P(z) - P(0) = \rho g (z - 0)$

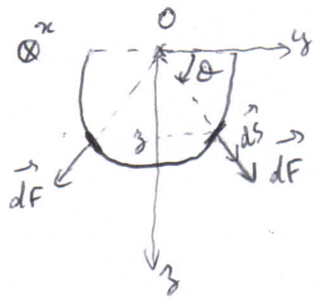
$\Rightarrow \boxed{P(z) = P_0 + \rho g z}$

3)



* Sur les 2 demi-disques, les forces se compensent 2 à 2.

* Sur la paroi cylindrique :



Par symétrie, la résultante est portée par $\vec{u}_z$. (les forces selon $\vec{u}_y$ se compensent 2 à 2).

- $z = R \sin\theta$
- $dS = R \, d\theta \, dx$
- $\vec{dS} \cdot \vec{u}_z = dS \sin\theta$
- $\vec{F}_{eau} = F_z \vec{u}_z = \left(\iint_S P(z) \vec{dS} \cdot \vec{u}_z \right) \vec{u}_z$
- $\vec{F}_{air} = F_z \vec{u}_z = \left(\iint_S (-P_0 \vec{dS}) \cdot \vec{u}_z \right) \vec{u}_z$

$\Rightarrow \vec{F} = \iint_S (\cancel{P_0} + \rho g z) \, dS \sin\theta \, \vec{u}_z + \iint_S \cancel{-P_0} \, dS \sin\theta \, \vec{u}_z$

$= \iint_S (\rho g R \sin\theta) R \sin\theta \, d\theta \, dx \, \vec{u}_z$

$(\vec{F} = \vec{F}_{eau} + \vec{F}_{air})$

$\Rightarrow \vec{F} = \rho g R^2 \int_0^L dx \int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta \, \vec{u}_z$

or $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$\Rightarrow \vec{F} = \rho g R^2 L \left[\int_0^\pi \dfrac{d\theta}{2} - \dfrac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2\theta \, d\theta \right] \vec{u}_z$

$= \rho g R^2 L \left[\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{4} \underbrace{\left[\sin 2\theta \right]_0^\pi}_{=0} \right] \vec{u}_z$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \dfrac{\pi R^2}{2} L \rho g \, \vec{u}_z}$

4) $\dfrac{\pi R^2}{2} L = V_{eau}$

$\dfrac{\pi R^2}{2} L \rho = m_{eau}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \text{poids de l'eau}}$

CINQUIEME PROBLEME : Variation d'entropie d'un gaz parfait

1) On libère brusquement le piston ⇒ la transformation est rapide. Les échanges de chaleur n'ont pas le temps de se faire ⇒ transformation adiabatique.

2) transformation rapide, donc irréversible.

3) Dans l'état final, on a équilibre mécanique

$$\Rightarrow \boxed{P_f = P_0}$$

4) $dU = T\,dS - P\,dV$ (identité thermodynamique)

$= C_v\,dT = n\,C_{v_m}\,dT$ ($1^{ère}$ loi de Joule car GP)

$$\Rightarrow dS = n\,C_{v_m}\frac{dT}{T} + \frac{P}{T}dV$$

or relation de Mayer (GP) : $C_{P_m} - C_{v_m} = R$

et $\gamma = \dfrac{C_{P_m}}{C_{v_m}}$

$\Rightarrow C_{v_m} = \dfrac{R}{\gamma - 1}$

et équation d'état des GP : $PV = nRT \Rightarrow \dfrac{P}{T} = \dfrac{nR}{V}$

$$\Rightarrow dS = \frac{nR}{\gamma-1}\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{V_f}{V_i}}$$

5) système fermé ⇒ $n = c^{te}$

or $PV = nRT$ (équation d'état des GP)

$$\Rightarrow \frac{PV}{T} = c^{te} \Rightarrow \frac{P_f V_f}{T_f} = \frac{P_i V_i}{T_i}$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{P_0 V_f T_i}{P_i V_i} \qquad \boxed{T_f = T_i\,\frac{1}{x}\,\frac{V_f}{V_i}}$$

6) 1^{er} principe : $\Delta U = \underbrace{\cancel{Q}}_{\text{adiabatique}} + W$ avec $W = \int -P_{ext}\,dV = \int -P_0\,dV$

or $P_0 = c^{te} \Rightarrow W = -P_0\int dV = -P_0(V_f - V_i)$

$1^{ère}$ loi de Joule (GP) : $\Delta U = C_v\,\Delta T = n\,C_{v_m}(T_f - T_i)$

or $T_f = T_i\,\dfrac{1}{x}\,\dfrac{V_f}{V_i} \Rightarrow \dfrac{nR}{\gamma-1}T_i\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{V_f}{V_i} - 1\right) = -P_0(V_f - V_i)$

$$\Rightarrow V_f\Big(P_0 + \underbrace{\frac{nRT_i}{V_i}}_{P_i}\frac{1}{x}\frac{1}{\gamma-1}\Big) = P_0 V_i + \underbrace{\frac{nRT_i}{\gamma-1}}_{\frac{P_i V_i}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow V_f = V_i\,\frac{P_0 + \frac{P_i}{\gamma-1}}{P_0 + \frac{P_i}{x}\frac{1}{\gamma-1}} \underset{P_i = xP_0}{=} V_i\,\frac{P_0 + \frac{xP_0}{\gamma-1}}{P_0 + \frac{P_0}{\gamma-1}}$$

$$V_f = V_i\,\frac{\gamma-1+x}{\gamma-1+1} \Rightarrow \boxed{V_f = V_i\,\frac{\gamma-1+x}{\gamma}}$$

7) $\dfrac{T_f}{T_i} = \dfrac{1}{x}\dfrac{V_f}{V_i} = \dfrac{\gamma-1+x}{\gamma x}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{\gamma-1+x}{\gamma x} + nR\ln\frac{\gamma-1+x}{\gamma}}$$

8) $\boxed{\Delta S = 5{,}8\ \mathrm{J.K^{-1}}} > 0$ OK car :

2^{nd} principe : $\Delta S = \underbrace{\cancel{S_e}}_{\text{adiabatique}} + \underbrace{S_c}_{>0\ (\text{irréversible})} > 0$

9) $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta S = 0 \\ P_i = P_0 \end{cases}$

C'est normal car si $P_i = P_0$, le système n'évolue pas, il est toujours à l'équilibre. L'entropie du système n'évolue pas !