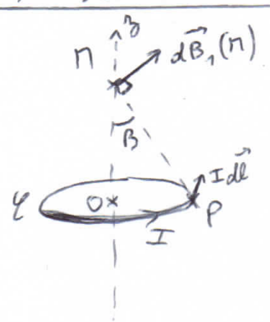
DL6 PT 2016-2017

PREMIER PROBLEME : Etude d'une bobine inductrice (d'après banque PT 2009)

A) ETUDE D'UNE BOBINE PLATE :



$$d\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

A-1) Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan d'anti-symétrie de la distribution de courant.

$\Rightarrow$ en $M \in (Oz)$, $\vec{B}_1(M)$ est porté par $\vec{u_z}$ (car $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur)

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\, PM^3} \oint_{\mathcal{C}} \vec{dl} \wedge \vec{PM}$$

or $\sin\beta = \frac{R}{PM} \Rightarrow PM = \frac{R}{\sin\beta}$

$\vec{B}_1(M)$ est porté par $\vec{u_z} \Rightarrow \vec{B}_1(M) = B_{1z}\, \vec{u_z}$

avec
$$B_{1z} = \vec{B}_1(M) \cdot \vec{u_z}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \sin^3\beta \left(\oint \vec{dl} \wedge \vec{PM}\right) \cdot \vec{u_z}$$
$$\vec{u_z} = c^{te} \rightarrow = \frac{\mu_0 I \sin^3\beta}{4\pi R^3} \oint \left(\vec{dl} \wedge \vec{PM}\right) \cdot \vec{u_z}$$

$$\left(\vec{dl} \wedge \vec{PM}\right) \cdot \vec{u_z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{permutation circulaire}}}{=} \left(\vec{PM} \wedge \vec{u_z}\right) \cdot \vec{dl} = PM \sin\beta\, dl = R\, dl = R^2 d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I \sin^3\beta}{4\pi R^3} \underbrace{\int R^2 d\theta}_{2\pi} \vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\beta\, \vec{u_z}}$$

en O, $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_1(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u_z}}$

A-2) on a N spires sur une largeur $(R_2 - R_1)$

on a dN ———— dr

$$\boxed{dN = \frac{N\, dr}{R_2 - R_1}}$$

$$d\vec{B}(O) = dN \frac{\mu_0 I}{2r} \vec{u_z}$$

$$\boxed{d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \frac{dr}{r} \vec{u_z}}$$

A-3) $\vec{B}(O) = \int_{R_1}^{R_2} d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2-R_1)} \ln\frac{R_2}{R_1} \vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2-R_1)} \ln\frac{R_2}{R_1} \vec{u_z}}$$

A-4) AN : $\boxed{B(O) = 6\,\mu T}$

A-5) Le plan (Oxy) est plan de symétrie de la distribution de courant. Donc en $M \in (Oxy)$ $\vec{B}(M) \perp$ à ce plan (car $\vec{B}$ pseudo-vecteur)

$\Rightarrow$ en $M \in (Oxy)$, $\boxed{\vec{B}(M) = B(M)\, \vec{u_z}}$

flux à travers une spire de rayon r : $\iint B(M)\, r'dr'd\theta$

or on a invariance de la distribution de courant par rotation autour de (Oz) $\Rightarrow B(\cancel{\theta})$

$$\Rightarrow \text{flux} = 2\pi \int_0^r B\, r'dr'$$

flux à travers les dN spires comprises entre r et r+dr :

$$d\phi = dN \; 2\pi \int_0^r B\, r' dr'$$

or $dN = \frac{N}{R_2-R_1}\, dr$

$$\Rightarrow \boxed{d\phi = \frac{2\pi N}{R_2-R_1}\, dr \int_0^r B\, r' dr'}$$

flux propre $\phi = \int d\phi$

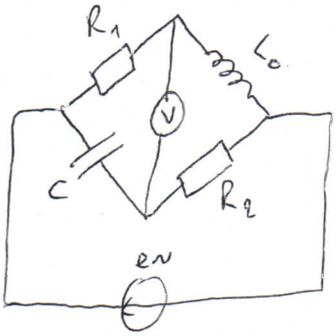
$$\boxed{\phi = \frac{2\pi N}{R_2-R_1}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^r B\, r' dr'\, dr}$$

$$\phi = L_0 I \Rightarrow \boxed{L_0 = \frac{2\pi N}{I(R_2-R_1)}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^r B\, r' dr'\, dr}$$

L_0 ne dépend pas de la valeur de I.

En effet, d'après la loi de Biot et Savart, B est proportionnel à I.

A.6) montage permettant de mesurer L_0 : pont de Maxwell



Quand le pont est équilibré ($V=0$), on a $R_1 R_2 = jL_0\omega \frac{1}{jC\omega}$

$\Rightarrow L_0 = R_1 R_2 C$

$\Rightarrow$ connaissant R_1, R_2 et C, on en déduit L_0.

B) BOBINE REELLE

B.1) * $i(t) \Rightarrow \vec{B}(t) \Rightarrow$ le conducteur est placé dans $\vec{B}(t) \Rightarrow$ apparaissent des courants dans le conducteur (courants de Foucault), qui créent eux-mêmes un champ magnétique induit $\Rightarrow$ le flux magnétique, donc l'inductance, est changé.

* μ_0 remplacé par $\mu \Rightarrow \vec{B}$ changé $\Rightarrow L$ changé

B.2) L'inductance de la bobine augmente quand on y introduit un noyau de fer.

$\boxed{L > L_0}$ (car $\mu_r > 1 \Rightarrow \mu > \mu_0$ et $B \propto \mu$)

B.3) $\boxed{P_b = U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi}$

P_b dépend de la position de la bobine par rapport à la pièce. En effet, I_{eff} et φ dépendent de L.

DEUXIEME PROBLEME : Principe du moteur synchrone (d'après CCP PSI)

1) Stator de la machine synchrone : production d'un champ tournant :

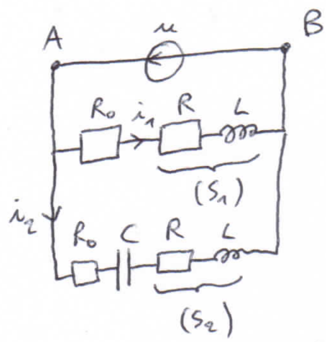
1) * Tout plan contenant (Ox) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant 1.

$\Rightarrow \vec{B}(O) \in$ à l'intersection de tous ces plans

$\Rightarrow \vec{B}(O) = \vec{B}_1 \propto \vec{e}_x$

* Autre méthode : le plan yOz est plan de symétrie de la distribution de courant 1.

$\Rightarrow \vec{B}(O) \perp yOz \Rightarrow \vec{B}_1 \propto \vec{e}_x$

2) 

* loi des mailles dans la maille du haut :

$$\underline{u} = (R_0 + R + jL\omega_0)\,\underline{i_1} \Rightarrow \underline{i_1} = \frac{\underline{u}}{R_0+R+jL\omega_0}$$

$$\Rightarrow I_1 e^{-j\varphi_1} = \frac{U}{R_0+R+jL\omega_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{U}{\sqrt{(R_0+R)^2+(L\omega_0)^2}}}$$

$$-\varphi_1 = \arg\left(\frac{1}{R_0+R+jL\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \arg\left(\underbrace{(R_0+R)}_{>0} + j\underbrace{L\omega_0}_{>0}\right) \Rightarrow \varphi_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{et } \boxed{\tan\varphi_1 = \frac{L\omega_0}{R+R_0}}$$

* De même, $I_2 e^{-j\varphi_2} = \dfrac{U}{R_0+R+jL\omega_0+\dfrac{1}{jC\omega_0}}$

$$\boxed{I_2 = \frac{U}{\sqrt{(R_0+R)^2+\left(L\omega_0-\dfrac{1}{C\omega_0}\right)^2}}}$$

$$\varphi_2 = \arg\left[\underbrace{(R_0+R)}_{>0} + j\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)\right] \Rightarrow \varphi_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{\tan\varphi_2 = \frac{L\omega_0 - \dfrac{1}{C\omega_0}}{R_0+R}}$$

3)a) * $I_1 = I_2 \Rightarrow (L\omega_0)^2 = \left(L\omega_0 - \dfrac{1}{C\omega_0}\right)^2$

$$\Rightarrow L\omega_0 = \pm\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right) \underset{\uparrow}{=} -L\omega_0 + \frac{1}{C\omega_0}$$

impossible sinon (C infini)

$$\Rightarrow 2L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2L\omega_0^2}}$$

* $\varphi_2 - \varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 - \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \tan\varphi_2 = \tan\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan\varphi_1}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi_1 \tan\varphi_2 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{L\omega_0}{R+R_0} \; \frac{L\omega_0 - \dfrac{1}{C\omega_0}}{R_0+R} = -1$$

$$\text{or } C = \frac{1}{2L\omega_0^2} \Rightarrow L\omega_0(L\omega_0 - 2L\omega_0) = -(R+R_0)^2$$

$$L^2\omega_0^2 = (R+R_0)^2 \Rightarrow \boxed{R_0 = L\omega_0 - R}$$

3)b) $\tan\varphi_1 = \dfrac{L\omega_0}{R+R_0} = \dfrac{L\omega_0}{L\omega_0} = 1$ et $\varphi_1 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1 = +\frac{\pi}{4}}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}}$$

4) $I_1 = I_2 = \dfrac{U}{\sqrt{(R+R_0)^2+(L\omega_0)^2}} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{U}{L\omega_0\sqrt{2}}$

$L\omega_0 = R+R_0$

$$B_x = B_1(t) = K\,i_1(t) = K I_1 \sqrt{2}\cos(\omega_0 t - \varphi_1)$$

$$B_x = K \frac{U}{L\omega_0\sqrt{2}} \sqrt{2}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B_x = \frac{KU}{L\omega_0}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B_y = B_2(t) = \dots = \frac{KU}{L\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B_y = \frac{-KU}{L\omega_0}\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B_T = \|\vec{B}\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{KU}{L\omega_0}\sqrt{\underbrace{\cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)}_{1}}$$

$$\boxed{B_T = \frac{KU}{L\omega_0}}$$

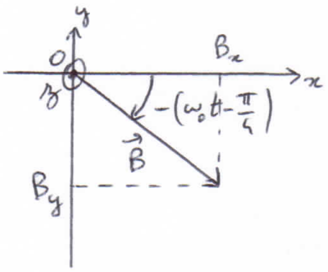
$$\boxed{\vec{B} = B_T\left[\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)\vec{e_x} - \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)\vec{e_y}\right]}$$

5)a) $B_x = B_T \cos\alpha$ et $B_y = B_T \sin\alpha$

avec $\alpha = -\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \|\vec{B}\| = B_T = c^{te}$ et $\vec{B}$ fait l'angle $\alpha = -\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$ avec l'axe (Ox).

$\Rightarrow \vec{B}$ est un champ tournant.



5)b) $\vec{B}$ tourne à la vitesse $(-\omega_0)$ autour de l'axe (Oz) dans le plan (xOy).

2) Entraînement du rotor du moteur synchrone :

1) $\theta(t) = (\vec{M}, \vec{B}) = (\vec{M}, Ox) + (Ox, \vec{B})$

or $(Ox, \vec{B}) = -\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$

$(Ox, \vec{M}) = -\omega t + c^{te}$

$\Rightarrow \theta(t) = -\omega_0 t + \frac{\pi}{4} + \omega t - c^{te} = (\omega - \omega_0)t + c^{te}$

or $\theta(0) = c^{te} = \theta_0$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = (\omega - \omega_0)t + \theta_0}$$

$$\vec{\Gamma}(t) = \vec{M}(t) \wedge \vec{B}(t) = \boxed{M_0 B_T \sin\left((\omega - \omega_0)t + \theta_0\right)\vec{e_z} = \vec{\Gamma}(t)}$$

2) Si $\omega \neq \omega_0$, alors $\langle \sin[(\omega - \omega_0)t + \theta_0] \rangle = 0$

donc $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$

Le couple moteur a une valeur moyenne non nulle que si $\omega = \omega_0$. ($\Rightarrow$ moteur "synchrone")

3)1) $\omega = \omega_0 \Rightarrow \theta = \theta_0 = c^{te} \Rightarrow \Gamma(t) = M_0 B_T \sin\theta_0$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_0 = M_0 B_T \sin\theta_0}$$

3)2) Fonctionnement moteur si puissance $P = \underset{\propto -\vec{e_z}}{\vec{\Gamma}(t)} \cdot \underset{\propto -\vec{e_z}}{\vec{\omega}(t)} > 0$

$\Rightarrow \Gamma_0 < 0 \Rightarrow \sin\theta_0 < 0$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_0 \in [-\pi, 0]} \qquad (\theta = \theta_0)$$

3)3) $P_{méca} = \vec{\Gamma}(t) \cdot \vec{\omega}(t) = \left(M_0 B_T \sin\theta_0 \, \vec{e_z}\right)\left(-\omega_0 \vec{e_z}\right)$

$= -M_0 B_T \omega_0 \sin\theta_0$

$$\boxed{P_{méca} = M_0 B_T \omega_0 |\sin\theta_0|}$$

3)4) Le moteur ne peut démarrer que si $|\Gamma_0|$ peut être supérieur à Γ_r.

$\Rightarrow$ il faut donc que $|\Gamma_0|_{max} > \Gamma_r$

soit $\boxed{\Gamma_r < M_0 B_T}$

Rq : Inverser le sens d'enroulement de la bobine 2 aurait permis d'avoir un sens de rotation positif du moteur.

Ici, il y avait visiblement des erreurs d'énoncé (l'énoncé a été retravaillé ...).

PT 2016-2017 DL6

TROISIEME PROBLEME : Réflexion d'une OPPH sur une plaque métallique (d'après banque PT 2009)

A) Réflexion sur un plan conducteur parfait :

A-1) éq. Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ ($\rho = 0$ au vide)

éq. Maxwell-flux : $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

éq. Maxwell-Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

éq. Maxwell-Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\underbrace{\vec{j}}_{\vec{j}=\vec{0}\text{ (vide)}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \ ; \ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \ ; \ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ ; \ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

A-2) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\mathrm{grad}}\,\cancel{\mathrm{div}\,\vec{E}} - \Delta\vec{E}$

$= \vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\boxed{\square\vec{E} = \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \qquad \left(\boxed{\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1}\right)$$

d'Alembertien

C'est l'équation de d'Alembert.

A-3) $\vec{E}_i = E_0\cos(\omega t + ky)\,\vec{u}_x$

$\square\vec{E}_i = \vec{0} \Rightarrow \square E_{ix} = 0$

$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial^2 E_{ix}}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 E_{ix}}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 E_{ix}}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_{ix}}{\partial t^2} = 0$

$\Rightarrow -k^2E_0\cos(\omega t + ky) - \frac{1}{c^2}\left[-\omega^2E_0\cos(\omega t+ky)\right] = 0$

$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = c}$ C'est la relation de dispersion

A-4) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t}$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_i = \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}E_0\cos(\omega t+ky)\\ 0\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ +kE_0\sin(\omega t+ky)\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} = -kE_0\sin(\omega t+ky)\,\vec{u}_z$

$\Rightarrow \vec{B}_i = \frac{k}{\omega}E_0\cos(\omega t+ky)\,\vec{u}_z$

$$\boxed{\vec{B}_i = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t+ky)\,\vec{u}_z} \qquad \text{amplitude : } \boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}}$$

Rq : on a bien $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i\wedge\vec{E}_i}{\omega} = \frac{-k\,\vec{u}_y\wedge E_0\cos(\omega t+ky)\vec{u}_x}{\omega}$

$= \frac{E_0}{c}\cos(\omega t+ky)\,\vec{u}_z$

<u>équation de propagation :</u>

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{\mathrm{grad}}\,\cancel{\mathrm{div}\,\vec{B}} - \Delta\vec{B}$

$= \vec{\mathrm{rot}}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\square\vec{B}_i = \Delta\vec{B}_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}_i}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

A-5) * $\boxed{\begin{matrix}\sigma \text{ en } C.m^{-2}\\ \vec{j}_s \text{ en } A.m^{-1}\end{matrix}}$

* Dans le conducteur parfait : $\underbrace{\vec{j}}_{\text{fini (en fait nul)}} = \underbrace{\gamma}_{\infty}\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$ (d'après l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation de Maxwell-Faraday)

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0} \text{ et } \vec{B} = \vec{0}}$ dans le métal conducteur parfait

* relations de passage en $y = 0$

$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \Rightarrow \vec{E}(y=0^+) - \underbrace{\cancel{\vec{E}(y=0^-)}}_{\text{conducteur parfait}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y$

$$\boxed{\left(\vec{E}_i + \vec{E}_r\right)_{y=0^+} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y}$$

On a toujours continuité de la composante <u>tangentielle</u> du champ électrique à la traversée d'une surface chargée.

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \Rightarrow \vec{B}(y=0^+) - \underbrace{\vec{B}(y=0^-)}_{\text{cond. parfait}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\vec{B}_i + \vec{B}_r\right)_{y=0^+} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_y}$$

<u>A.6)</u> Les ondes incidentes et réfléchies ont même fréquence car la réflexion n'entraîne pas de changement de fréquence.

$\vec{k}_i = -k\,\vec{u}_y = -\frac{\omega}{c}\vec{u}_y$ car l'onde se propage selon $-\vec{u}_y$

L'onde réfléchie se propage selon $+\vec{u}_y$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k}_r = +k\,\vec{u}_y = +\frac{\omega}{c}\vec{u}_y = -\vec{k}_i}$$

<u>A.7)</u> on cherche $\vec{E}_r$ de la forme :

$$\vec{E}_r = r E_0 \cos(\omega' t - k' y)\,\vec{u}_x$$

↑ même polarisation que $\vec{E}_i$

$k' = \frac{\omega'}{c} > 0$ (propagation dans le sens des y croissants)

$$\left(\vec{E}_i + \vec{E}_r\right)_{y=0^+} = \left(E_0 \cos\omega t + r E_0 \cos\omega' t\right)\vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y$$

or $\vec{u}_x \perp \vec{u}_y \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\sigma = 0} \\ E_0\cos\omega t + r E_0 \cos\omega' t = 0 \quad \forall t \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega'}$ cf <u>A.6)</u>

et $r = -1 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_r(y=0^+) = -E_0\cos\omega t\,\vec{u}_x}$

Rq : Il suffisait d'écrire la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ en $y=0$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_r = -E_0\cos(\omega t - ky)\,\vec{u}_x}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_r = -\frac{\partial \vec{B}_r}{\partial t}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -E_0\cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ kE_0 \sin(\omega t - ky) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}_r}{\partial t} = -kE_0\sin(\omega t - ky)\,\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B}_r = \frac{k}{\omega}E_0\cos(\omega t - ky)\,\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{B}_r = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\,\vec{u}_z}$$

Rq : on a bien $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{+k\vec{u}_y \wedge \left(-E_0\cos(\omega t - ky)\vec{u}_x\right)}{\omega}$

$$= \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\,\vec{u}_z$$

<u>A.8)</u> $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0\cos(\omega t + ky)\,\vec{u}_x - E_0\cos(\omega t - ky)\,\vec{u}_x$

or $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{tot} = -2E_0 \sin ky \sin\omega t\,\vec{u}_x}$$

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t + ky)\,\vec{u}_z + \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\,\vec{u}_z$$

or $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{tot} = 2\frac{E_0}{c}\cos ky \cos\omega t\,\vec{u}_z}$$

<u>particularité</u> : le champ électromagnétique total est une <u>onde stationnaire</u> : $E_{tot} = f(y)\,g(t)$

<u>A.9)</u> $\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}_{tot}(y=0^+) = \vec{0} \\ \vec{B}_{tot}(y=0^+) = 2\frac{E_0}{c}\cos\omega t\,\vec{u}_z \end{array}}$

Le plan $y=0$ est un plan $\begin{cases} \text{nodal pour } \vec{E}_{tot} \\ \text{ventral pour } \vec{B}_{tot} \end{cases}$

($\vec{B}_{tot}$ y est maximum)

$\boxed{\sigma = 0}$ car condition de passage (cf A-7)

$$\vec{E}_{tot}(y=0^+) = \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y}_{=\vec{0}}$$

$$\vec{B}_{tot}(y=0^+) = 2\frac{E_0}{c}\cos\omega t\,\vec{u}_z = \mu_0\,\vec{j}_S\wedge\vec{u}_y$$

relation de passage

$\vec{u}_y \wedge (\dots)$

$$\Rightarrow \mu_0\left(\vec{j}_S\,(\underbrace{\vec{u}_y\cdot\vec{u}_y}_{1}) - \vec{u}_y\,(\cancel{\vec{j}_S\cdot\vec{u}_y})\right) = \mu_0\,\vec{j}_S$$

$$= 2\frac{E_0}{c}\cos\omega t\,\vec{u}_y\wedge\vec{u}_z = \frac{2E_0}{c}\cos\omega t\,\vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos\omega t\,\vec{u}_x}$$

$\sigma=0$: la surface du conducteur reste localement neutre. L'onde incidente engendre un courant à la surface du conducteur. Comme les ē sont mis en mouvement par le champ électrique, il est normal que les courants ainsi créés soient parallèles au champ électrique incident (selon $\vec{u}_x$). Ces courants sont à l'origine du champ réfléchi, ce qui explique pourquoi l'onde réfléchie a même fréquence que l'onde incidente.

A-10) densité volumique d'énergie électromagnétique $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_i^2 + \frac{B_i^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t+ky) + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t+ky)$$

or $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$

$$\boxed{\mathcal{E}_i = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t+ky)}$$

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_r^2 + \frac{B_r^2}{2\mu_0}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_r = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t-ky)}$$

$$\boxed{\langle\mathcal{E}_i\rangle = \langle\mathcal{E}_r\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2}$$

A-11) $\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i\wedge\vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t+ky)\,\underbrace{\vec{u}_x\wedge\vec{u}_z}_{-\vec{u}_y}$

$$P_i = \vec{\Pi}_i\cdot(-S\vec{u}_y)$$

propagation suivant $-\vec{u}_y$

$$P_i = \frac{E_0^2 S}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t+ky)$$

$$\boxed{P_i = \varepsilon_0 c E_0^2 S\cos^2(\omega t+ky)}$$

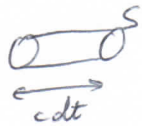
$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r\wedge\vec{B}_r}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t-ky)\,\underbrace{\vec{u}_x\wedge\vec{u}_z}_{-\vec{u}_y}$$

$P_r = \vec{\Pi}_r\cdot(S\vec{u}_y)$ (propagation suivant $+\vec{u}_y$)

$$\boxed{P_r = \varepsilon_0 c E_0^2 S\cos^2(\omega t-ky)}$$

$\boxed{P_i = \mathcal{E}_i S c}$ $\boxed{P_r = \mathcal{E}_r S c}$

C'est logique car $P_i\,dt$ est l'énergie qui se trouve dans le cylindre de section S et de longueur $c\,dt$



$$P_i\,dt = \mathcal{E}_i\,(Sc\,dt)$$

$$\rightarrow P_i = \mathcal{E}_i S c$$

A-12) $\langle P_i\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 S$

$$\langle P_r\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 S$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P_i\rangle = \langle P_r\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 S}$$

car $\langle\cos^2(\omega t-ky)\rangle = \langle\cos^2(\omega t+ky)\rangle = \frac{1}{2}$

$\langle P_i\rangle = \langle P_r\rangle \Rightarrow$ la réflexion s'effectue sans perte d'énergie (OK car épaisseur de peau nulle $\Rightarrow$ pas de perte par effet Joule)

B) Réflexion de l'onde avec prise en compte de la conductivité du métal :

B.1) $\frac{y}{\delta}$ est sans dimension

$\Rightarrow$ δ est une longueur en mètre (m)

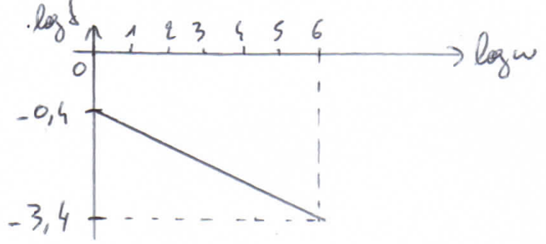
δ est l'épaisseur de peau.

Au-delà d'une profondeur de quelques δ, le champ électromagnétique est quasiment nul dans le conducteur.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \left(\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \log \delta = \frac{1}{2}\log\frac{2}{\mu_0\gamma} - \frac{1}{2}\log\omega = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2}\log\omega$$

$$= -0{,}4 - 0{,}5\log\omega$$



B.2) Puissance volumique cédée par le champ elmg à la matière : $\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E}}$

loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \gamma E^2 = \gamma\left(\sqrt{2}\,k\delta E_0\, e^{\frac{y}{\delta}}\cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

$$= 2\gamma k^2\delta^2 E_0^2\, e^{\frac{2y}{\delta}} \underbrace{\cos^2\left(\omega t + \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)}_{\langle\,\rangle = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\tau}\right\rangle = \gamma k^2 \delta^2 E_0^2\, e^{\frac{2y}{\delta}}}$$

$$\langle P_J \rangle = S\int_{-L}^{0}\left\langle\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}\right\rangle dy$$

$$= S\gamma k^2\delta^2 E_0^2 \int_{-L}^{0} e^{\frac{2y}{\delta}}\,dy$$

$$\langle P_J \rangle = S\gamma k^2\delta^2E_0^2\,\frac{\delta}{2}\left[e^{\frac{2y}{\delta}}\right]_{-L}^{0}$$

$$= S\gamma k^2\delta^2E_0^2\,\frac{\delta}{2}\left(1 - \underbrace{e^{-\frac{2L}{\delta}}}_{0 \text{ car } L \gg \delta}\right)$$

$$\boxed{\langle P_J\rangle = \frac{1}{2}S\gamma k^2\delta^3E_0^2}$$

B.3) $$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t\wedge\vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{2\sqrt{2}\,k\delta E_0^2}{\mu_0 c}\, e^{\frac{2y}{\delta}}\cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta}\right)\vec{u}_x\wedge\vec{u}_y$$

$$\vec{\Pi}_t(y=0) = \frac{-2\sqrt{2}\,k\delta E_0^2}{\mu_0 c}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\omega t\,\vec{u}_y$$

or $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$\Rightarrow \vec{\Pi}_t(y=0) = \frac{-\sqrt{2}\,k\delta E_0^2}{\mu_0 c}\left[\underbrace{\cos\left(2\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}_{\langle\,\rangle = 0} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]\vec{u}_y$$

$$\langle\vec{\Pi}_t(y=0)\rangle = \frac{-\sqrt{2}\,k\delta E_0^2}{\mu_0 c}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\vec{u}_y = \frac{-k\delta E_0^2}{\mu_0 c}\vec{u}_y$$

$$\langle P_t\rangle = \langle\vec{\Pi}_t(y=0)\rangle\cdot\underbrace{(-S\vec{u}_y)}_{\text{propagation suivant } -\vec{u}_y}$$

$$\rightarrow \langle P_t\rangle = S\,\frac{k\delta E_0^2}{\mu_0 c}$$

$$\boxed{\langle P_t\rangle = \frac{Sk\delta E_0^2}{\mu_0 c}}$$

$$\langle P_J\rangle = \frac{1}{2}S\gamma k^2\delta^3E_0^2$$

$$= \frac{1}{2}S\gamma k\,k\,\delta\,\delta^2E_0^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}S\cancel{\gamma}k\,\frac{\cancel{\omega}}{c}\,\delta\,\frac{\cancel{2}}{\mu_0\cancel{\gamma}\cancel{\omega}}E_0^2$$

$$= \frac{Sk\delta E_0^2}{\mu_0 c}$$

$$\boxed{\langle P_t\rangle = \langle P_J\rangle}$$

La puissance moyenne $\langle P_t \rangle$ rayonnée par l'onde transmise à travers S en $y=0$ est dissipée par effet Joule dans le conducteur dans le cylindre de section S et de longueur L ($L \gg \delta$).

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad \left.\begin{matrix}\omega \text{ finie} \\ \gamma \to \infty\end{matrix}\right) \Rightarrow \delta \to 0$$

$\Rightarrow$ pas d'onde transmise, on retrouve le cas du conducteur parfait étudié dans la partie A)

B_4) on a ici un modèle volumique pour les distributions de charges et de courants $\Rightarrow$ continuité du champ électromagnétique.

$$\Rightarrow \boxed{\left(\vec{E}_i + \vec{E}_r\right)_{y=0^+} = \vec{E}_t(y=0^-)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_r(y=0) = \vec{E}_t(y=0) - \vec{E}_i(y=0)$$
$$= \sqrt{2}\, k\delta E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_x - E_0 \cos\omega t\, \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_r = E_0\left[\sqrt{2}\, k\delta \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(\omega t - ky)\right]\vec{u}_x}$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{+\vec{u}_y \wedge \vec{E}_r}{c}$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x}{c} E_0\left[\sqrt{2}\, k\delta \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(\omega t - ky)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_r = -\frac{E_0}{c}\left[\sqrt{2}\, k\delta \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(\omega t - ky)\right]\vec{u}_z}$$

B_5) $$\vec{\Pi}_R = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{-E_0^2}{\mu_0 c}\left(\sqrt{2}\, k\delta \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(\omega t - ky)\right)^2 \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z$$

$$\vec{\Pi}_R = \frac{+E_0^2}{\mu_0 c}\vec{u}_y\left(2k^2\delta^2\cos^2\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\, k\delta\left[\cos\left(2\omega t - 2ky + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4}\right] + \cos^2(\omega t - ky)\right)$$

$$\langle \vec{\Pi}_R \rangle = +\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\vec{u}_y\left(\cancel{k^2\delta^2} - \sqrt{2}\, k\delta\left[0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + \frac{1}{2}\right)$$
$$= +\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}(1 - 2k\delta)\vec{u}_y$$

$$\langle P_R \rangle = \langle \vec{\Pi}_R \rangle \cdot (+S\vec{u}_y)$$

propagation selon $+\vec{u}_y$

$$\boxed{\langle P_R \rangle = \frac{S E_0^2}{2\mu_0 c}(1 - 2k\delta)}$$

B_6) $$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 S = \frac{S E_0^2}{2\mu_0 c} \quad \text{(cf A-12)}$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{S k\delta E_0^2}{\mu_0 c} \quad \text{(cf B-3)}$$

$$\Rightarrow \langle P_R \rangle = \langle P_i \rangle - \langle P_t \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P_i \rangle = \langle P_R \rangle + \langle P_t \rangle}$$

Ceci traduit la conservation de l'énergie.

Remarque : il manque un terme du 1^er ordre en $k\delta$ dans l'expression de $\vec{B}_t$.

En effet, pour la question B_4), on aurait pu déterminer $\vec{B}_r$ par $\left(\vec{B}_i + \vec{B}_r\right)_{y=0} = \vec{B}_t(y=0)$.

Avec l'expression de $\vec{B}_t$ fournie par l'énoncé, on ne trouve pas le même résultat que celui trouvé en B_4).

A la question B_6), on trouverait alors

$$\langle P_i \rangle = \langle P_R \rangle + \frac{1}{2}\langle P_t \rangle \;!!!$$

!!!

ce qui ne traduit pas la conservation de l'énergie !!