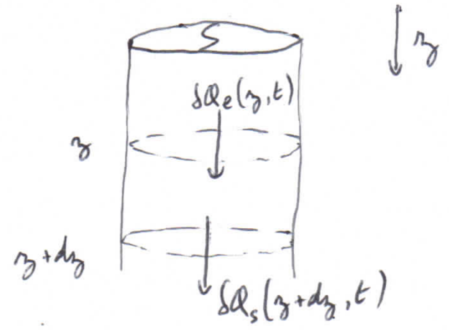
PT 2016-2017 DL2

PREMIER PROBLEME : Etude de géothermie domestique : études sur les ondes thermiques (d'après banque PT 2016)

1)



système étudié : cylindre de section S compris entre z et $z+dz$

On effectue un bilan d'énergie entre t et $t+dt$:

* $dH = \delta Q_P \quad (P = c^{te})$

$= \delta Q_e(z,t) - \delta Q_s(z+dz,t)$

$= j_Q(z,t)\, S\, dt - j_Q(z+dz,t)\, S\, dt$

$= \left(j_Q(z,t) - j_Q(z+dz,t)\right) S\, dt$

$= -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}\, dz\, S\, dt$

or loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda\, \vec{\text{grad}}\, T = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z$

$\Rightarrow j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}$

$\Rightarrow dH = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}\, S\, dz\, dt$

* D'autre part : $dH = dm\, c\, dT$

sol = solide

variation temporelle de T

$\Rightarrow dH = \rho\, S\, dz\, c \dfrac{\partial T}{\partial t}\, dt$

* $\Rightarrow \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t}\, S\, dz\, dt = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}\, S\, dz\, dt$

$\Rightarrow \boxed{\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$

2) * $\omega_A = 2\pi$ rad/an correspond à la variation annuelle de température : <u>été / hiver</u>

* $\omega_J = 2\pi$ rad/jour correspond à la variation journalière de température : <u>nuit / journée</u>

3) On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle :

* $\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\alpha \omega\, e^{-\frac{z}{\delta}} \sin\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right)$

* $\dfrac{\partial T}{\partial z} = -\alpha \dfrac{e^{-\frac{z}{\delta}}}{\delta} \left(\cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right)\right)$

* $\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \alpha \dfrac{e^{-\frac{z}{\delta}}}{\delta^2} \left[\left(\cancel{\cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right)} - \sin\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right)\right) + \left(-\sin\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right) - \cancel{\cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right)}\right)\right]$

* or $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

$\Rightarrow -\alpha \omega \rho c\, e^{-\frac{z}{\delta}} \sin\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right)$

$= -2\lambda\alpha \dfrac{e^{-\frac{z}{\delta}}}{\delta^2} \sin\left(\omega t + \varphi - \dfrac{z}{\delta}\right)$

$\forall t, \forall z$

$\Rightarrow \omega \rho c = \dfrac{2\lambda}{\delta^2} \Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c \omega}}}$

4) amplitude de l'onde : $\alpha\, e^{-\frac{z}{\delta}}$

$\Rightarrow$ <u>l'onde ne pénètre que sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ</u> (δ = grandeur caractéristique d'atténuation)

5) Analogie avec l'<u>effet de peau</u> :

δ est l'analogue de l'<u>épaisseur de peau</u>

(effet de peau : lors de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable)

6) * $\delta_J = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c \omega_J}} = \sqrt{\dfrac{2\times 0{,}5}{1500\times 1000\times 7.10^{-5}}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{10^6 . 10 . 10^{-5}}} = 10^{-1}\ m$

$\boxed{\delta_J \simeq 1.10^{-1}\ m}$

* $\delta_A = \sqrt{\dfrac{2\times 0{,}5}{1500\times 1000\times 2.10^{-7}}} = \sqrt{\dfrac{1}{10^6\ 3\ 10^{-7}}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{0{,}3}}$ ($\simeq 1{,}8$ cf énoncé)

$\boxed{\delta_A \simeq 2\ m}$

Les variations quotidiennes de température ne sont ressenties par le sol que sur épaisseur de l'ordre de quelques dizaines de centimètre, tandis que les variations annuelles de température sont ressenties sur plusieurs mètres.

7) On veut $\dfrac{T(z,t)}{T(0,t)} = \dfrac{1}{5}$ (~~en~~ terme d'amplitude)

$\Rightarrow \dfrac{\alpha e^{-\frac{z}{\delta}}}{\alpha} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow -\dfrac{z}{\delta} = \ln\dfrac{1}{5} = -\ln 5$

$\Rightarrow \boxed{z = \delta \ln 5}$

$\omega_A = 2{,}0.10^{-7}\ rad.s^{-1} \Rightarrow \delta_A \simeq 2\ m$

$\Rightarrow \boxed{z \simeq 3\ m}$

(cf énoncé : $\ln 5 \simeq 1{,}6$)

Rq : ce phénomène est appelé "effet de cave"

(on enterre les caves pour limiter l'amplitude de la variation de température)

PT 2016 - 2017 DL 2

DEUXIEME PROBLEME : Etude de géothermie domestique : dimensionnement d'un puits canadien (d'après banque PT 2016)

1) * On doit renouveler l'air du logement pour amener du O_2 !! (En respirant, on consomme O_2 !!)

* L'inconvénient est que l'air apporté est froid. Pour le réchauffer, il faut fournir de l'énergie.

* → volume du logement $V = S \times h = 100\,m^2 \times 2\,m$

$V = 200\,m^3$

→ $D_v = 50\,m^3.h^{-1}$

→ durée nécessaire pour renouveller entièrement l'air du logement : $t = \dfrac{V}{D_v} = \dfrac{200}{50}$

$\boxed{t = 4h}$

* Avec le puits canadien, l'air apporté est "préchauffé", "tiédi" au contact du sol.

⇒ économie d'énergie pour l'utilisateur.

2) * Si le puits est de longueur infinie, l'air en sortie sera à la température du sol.

$\boxed{T_{max} = T_0 = 12°C}$

* Sans puits canadien, l'air passe de T_{ext} à T_L :

Par unité de masse : $q_1 = c_p(T_L - T_{ext})$

Par unité de temps : $P_1 = \dfrac{dm\, q}{dt} = D_m q = \rho D_v q$

⇒ $P_1 = \rho D_v c_p (T_L - T_{ext})$

* Avec puits canadien : l'air passe de T_0 à T_L

⇒ $P_2 = \rho D_v c_p (T_L - T_0)$

* puissance gagnée P : $P = P_1 - P_2$

⇒ $\boxed{P = \rho D_v c_p (T_0 - T_{ext})}$

$P = 1{,}275 \times \dfrac{50}{3600} \times 1000 \times (12 + 4)$

$\boxed{P = 2{,}8.10^2\,W}$ Le gain est conséquent !

3) On applique le 1^er principe au système ouvert compris entre x et $x+dx$:

$D_m(\underbrace{de}_{v=c^{te}} + \underbrace{de_c}_{\text{horizontal}} + de_p) = \underbrace{d\mathcal{P}_i}_{\text{pas de parties mobiles}} + d\mathcal{P}_{th}$

⇒ $\rho D_v c_p \underbrace{(T(x+dx) - T(x))}_{dT} = -h(T - T_0) \times 2\pi R dx$

$T < T_0$ alors que la puissance thermique reçue par le gaz est > 0.

⇒ $\rho D_v c_p \dfrac{dT}{dx} + 2\pi R h \underbrace{(T - T_0)}_{\theta} = 0$

$\dfrac{dT}{dx} + \dfrac{2\pi h R}{\rho D_v c_p}\theta = 0$

or $\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{d\theta}{dx}$ $(\theta = T - \underbrace{T_0}_{c^{te}})$

⇒ $\boxed{\dfrac{d\theta}{dx} + K\theta = 0}$ avec $K = \dfrac{2\pi h R}{\rho D_v c_p}$

⇒ $\theta = c^{te} e^{-Kx}$

condition aux limites : en $x = 0$, $c^{te} = T_{ext} - T_0$

⇒ $\boxed{\theta = \theta_i e^{-Kx}}$ avec $\theta_i = T_{ext} - T_0$

4) * $T_{finale} = 96\,\%\, T_{max} = 96\,\%\, T_0 = 0{,}96\, T_0$

$= T(x = L)$

* $\underset{\substack{\uparrow \\ 0{,}96\,T_0}}{T(L)} - T_0 = \left(T_{ent} - T_0\right) e^{-KL}$

* $\Rightarrow \quad e^{-KL} = \dfrac{-0{,}04\, T_0}{T_{ent} - T_0}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L = -\frac{1}{K} \ln \frac{0{,}04\, T_0}{T_0 - T_{ent}}}$$

$$L = -\frac{1}{0{,}15} \ln \frac{0{,}04 \times 12}{12 + 4} = -\frac{1}{0{,}15} \ln 0{,}03$$

$$L = -\frac{1}{0{,}15} \times (-3{,}5) \qquad (\text{cf énoncé})$$

$$\boxed{L = 23\ m}$$

5) Si le débit augmente, l'air circulant dans le tuyau a moins le temps de se réchauffer au contact du sol, il faudra donc une canalisation de plus grande longueur L pour obtenir la température souhaitée en sortie.

6) * Si le diamètre est faible, l'air circulant sera davantage au contact du sol et se réchauffera donc plus vite. L pourra donc être "faible".

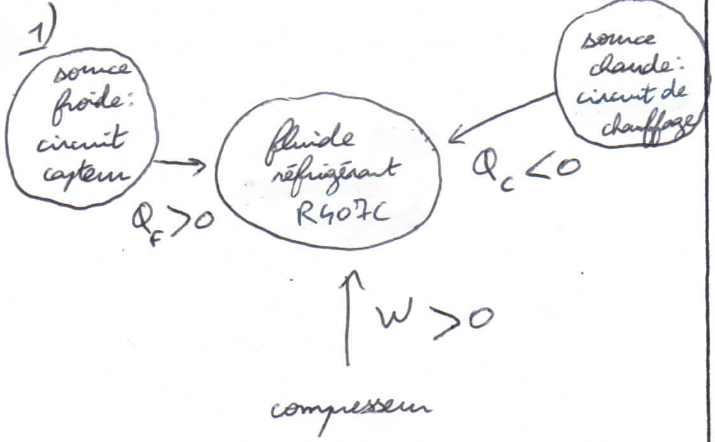
Donc si $R \nearrow$, il faut $L \nearrow$ pour obtenir la température souhaitée en sortie.

* Mais si R est faible, ça augmente les pertes de charge.

PT 2016 - 2017 DL2

TROISIEME PROBLEME : Etude de géothermie domestique : remplacement d'un chauffage électrique par un chauffage géothermique horizontal (d'après banque PT2016)

1)



Le fluide réfrigérant R407C prend de l'énergie à la source froide (circuit capteur / $Q_F > 0$), en cède à la source chaude (circuit de chauffage / $Q_c < 0$ / c'est le but), et reçoit du travail de la part du compresseur ($W > 0$ / c'est le coût).

2) Le circuit capteur est au contact de l'évaporateur.

En effet, le fluide réfrigérant R407C prend de l'énergie au circuit capteur ($Q_F > 0$), et va alors se vaporiser ($\ell_{vap} > 0$).

3) $P = \dfrac{E_{chauffage}}{t} = \dfrac{7000 \text{ kWh}}{6 \text{ mois}}$

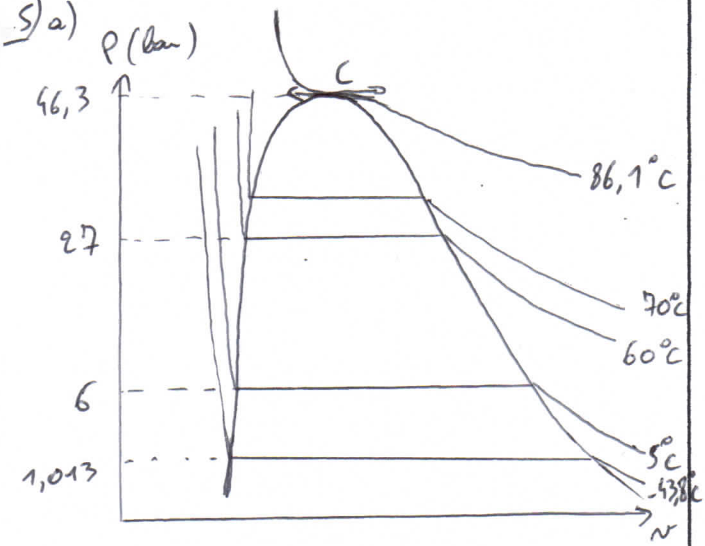
$= \dfrac{7.10^6 \text{ Wh}}{\frac{365}{2} \times 24 \text{ h}} = 1{,}6.10^3 \text{ W}$

$\boxed{P = 1{,}6 \text{ kW}}$

4) $P_{max} = 7000 \text{W} > P_{moyenne} = 1{,}6 \text{ kW}$.

C'est logique car on ne chauffe pas de la même manière pendant 6 mois ! La puissance moyenne n'a pas de sens ! Il faut prévoir les pics de froid (hiver) pour dimensionner la PAC.

5) a)



b) * Dans le détendeur, l'évolution est isenthalpique

$\Rightarrow h_4 = h_3$

* or $h_3 = h_L(27 \text{ bar}) = 295 \text{ kJ/kg}$

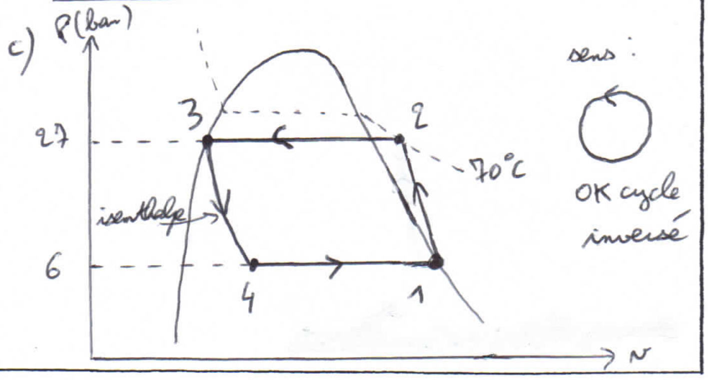
$\Rightarrow h_4 = 295 \text{ kJ/kg}$

* $x_4 = \dfrac{h_4 - h_L(6 \text{ bar})}{h_v(6 \text{ bar}) - h_L(6 \text{ bar})}$

$= \dfrac{295 - 210}{410 - 210} = \dfrac{85}{200}$

$\boxed{x_4 = 0{,}43}$

c)



6) * 1$^{\text{er}}$ principe pour le fluide traversant le condenseur

$$(h_3 - h_2) + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\text{négligés}} = \underbrace{w_i}_{\text{pas de parties mobiles}} + q_{2\to 3}$$

$$\Rightarrow q_c = h_3 - h_2 = h_L(27\,\text{bar}) - h(70°C, 27\,\text{bar})$$

$$q_c = 295 - 435 = \boxed{-140\ \text{kJ/kg} = q_c}$$

* 1$^{\text{er}}$ principe pour le fluide traversant le compresseur

$$h_2 - h_1 = w_{i_{12}} + \cancel{q_{1\to 2}} \text{ adiabatique}$$

$$w_{comp} = h_2 - h_1$$

<u>Hypothèse</u> : Au point 1, on a de la vapeur saturante sèche (ainsi, le fluide R407C prend un max d'énergie à la source froide, et de plus, on n'a que du gaz lors de la compression, donc moins de corrosion sur les pales).

Ainsi, $h_1 = h_v(5°C, 6\,\text{bar}) = 410\ \text{kJ/kg}$

$h_2 = h_v(70°C, 27\,\text{bar}) = 435\ \text{kJ/kg}$

$$\Rightarrow w_{comp} = 435 - 410 = \boxed{25\ \text{kJ/kg} = w_{comp}}$$

* Au cours du cycle : $\Delta h = 0$ (h fonction d'état)

$$\Rightarrow \underbrace{(h_2 - h_1)}_{w_{comp}} + \underbrace{(h_3 - h_2)}_{q_c} + \underbrace{(h_4 - h_3)}_{0} + \underbrace{(h_1 - h_4)}_{q_F} = 0$$

En effet, d'après 1$^{\text{er}}$ principe pour le fluide traversant l'évaporateur : $h_1 - h_4 = q_F + \underbrace{w_{i_{41}}}_{\text{pas de parties mobiles}}$

$$\Rightarrow q_F = -q_c - w_{comp} = 140 - 25 = 115\ \text{kJ/kg}$$

$$\boxed{q_F = 115\ \text{kJ/kg}}$$

Rq : $q_F = h_1 - h_4 = h_1 - h_3 = h_v(5°C, 6\,\text{bar}) - h_L(60°C)$
$= 410 - 295 = 115\ \text{kJ/kg}$

7) a) * $e = \dfrac{\text{but}}{\text{coût}} = \dfrac{|q_c|}{w_{comp}} = \dfrac{140}{25}$ $\boxed{e = 5{,}6}$

* $\Delta U = 0 = W + Q_F + Q_c$

($\Delta U = 0$: cycle et U fonction d'état ; $= W + Q_F + Q_c$: 1$^{\text{er}}$ principe ; de même pour S)

$\Delta S = 0 = \dfrac{Q_F}{T_F} + \dfrac{Q_c}{T_c}$ (2$^{\text{nd}}$ principe) (cas réversible)

$$e = \frac{-Q_c}{W} = \frac{-Q_c}{-Q_F - Q_c} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_c}} = \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_c}}$$

$$\boxed{e_{carnot} = \frac{T_c}{T_c - T_F}}$$

* $\boxed{e_{réel} = 5{,}6 < e_{carnot} = 6{,1}}$ OK !

OK car il y a des <u>irréversibilités</u> dans le cas réel

b) $e = 5{,}6 = \dfrac{|P_{th\,chaud}|}{P_{i_{comp}}}$

$$\Rightarrow P_{i_{comp}} = \frac{7000}{5{,}6} = 1{,}3 \cdot 10^3\ \text{W}$$

$$P_{élec} = \frac{P_{i_{comp}}}{\eta} = \frac{1{,}3\cdot 10^3}{0{,}75} = 1{,}7\cdot 10^3\ \text{W}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{élec} = 1{,}7\ \text{kW}}$$

c) $P_{élec} = \dfrac{P_{i_{comp}}}{\eta} = \dfrac{1}{\eta}\,\dfrac{P_{th\,moyenne}}{e}$

$= \dfrac{1{,}6}{0{,}75 \times 5{,}6} \Rightarrow P_{élec} = 0{,}38\ \text{kW}$

$E_{élec} = P_{élec} \times \underbrace{t}_{6\text{ mois}} = 0{,}38 \times \dfrac{365}{2} \times 24$

$$\boxed{E_{élec} = 1{,}7\cdot 10^3\ \text{kW.h}}$$

d) gain $= (7000\ \text{kW.h} - 1{,}7\cdot 10^3\ \text{kW.h}) \times 0{,}15$ €/kWh

$\boxed{\text{gain} \simeq 800\ €}$ Ça vaut le coup d'y songer quand on construit une maison !

QUATRIEME PROBLEME : Moteur de Carnot (d'après banque PT)

I) Etude avec un gaz parfait :

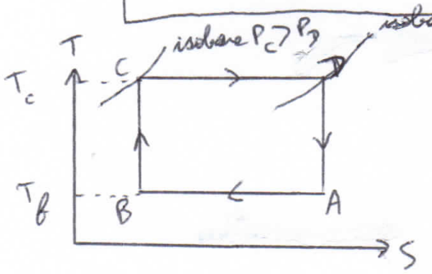
1) $B \to C$ et $D \to A \Rightarrow$ adiabatique, réversible, GP, $\gamma = c^{te}$

$\Rightarrow$ loi de Laplace $\Rightarrow PV^{\gamma} = c^{te}$ et $PV = nRT$

$\Rightarrow TV^{\gamma-1} = c^{te}$

$\Rightarrow T_B V_B^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{V_c = V_B \left(\frac{T_f}{T_c}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 8{,}61.10^{-3}\,L}$

De même, $\boxed{V_D = V_A \left(\frac{T_f}{T_c}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 8{,}61.10^{-2}\,L}$



2 isothermes
2 isentropiques
sens de parcours $\Rightarrow$ cycle moteur

2) $C \to D$, $\Delta U = 0$ (GP et $T = T_c = c^{te}$ cf 1ère loi de Joule)

$\Rightarrow 0 = \delta Q + \delta W \Rightarrow \delta Q = -\delta W \underset{\substack{\uparrow \\ \text{réversible} \\ \Rightarrow P_{ext} = P}}{=} PdV = \frac{nRT_c}{V}dV$

$\boxed{Q_{CD} = Q_c = nRT_c \ln \frac{V_D}{V_c} = 613\,J}$

3) cycle $\Rightarrow \Delta U = 0$ (U fonction d'état)

$\Rightarrow 0 = W + Q_c + Q_f \Rightarrow W = -Q_c - Q_f$

même calcul que précédemment $\Rightarrow Q_f = nRT_f \ln \frac{V_B}{V_A}$

$\Rightarrow Q_f = nRT_f \ln \frac{V_c}{V_D} = -\frac{T_f}{T_c} Q_c$

(on retrouve l'égalité de Clausius (réversible) $\Rightarrow \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$)

$\Rightarrow \boxed{W = -Q_c\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) = -383\,J}$

4) rendement : $\boxed{\rho = \frac{-W}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0{,}625}$

II) Etude avec un gaz de Van der Waals :

1) * 1er principe : $dU = \delta Q + \underset{-P_{ext}dV}{\delta W} \underset{\substack{\uparrow \\ U\ f^{\circ}\ d'état}}{=} \delta Q_{rév} + \underset{\substack{\uparrow \\ -PdV}}{\delta W_{rév}}$

$\Rightarrow dU = n\underset{\substack{\uparrow \\ C_v \text{ est molaire (normalement noté } C_{v_m}\text{ !)}}}{C_v} dT + (l - P)dV$

* 2nd principe : $dS = \frac{\delta Q}{T_e} + \delta S_{in} \underset{\substack{\uparrow \\ S\ f^{\circ}\ d'état}}{=} \frac{\delta Q_{rév}}{T}$

$\Rightarrow dS = \frac{nC_v}{T}dT + \frac{l}{T}dV \Rightarrow \frac{l}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$

* $dF = -SdT - PdV$ (identité thermodynamique)

($F = U - TS$ et $dU = TdS - PdV \Rightarrow dF = -SdT - PdV$)

$\Rightarrow \left.\frac{\partial(-S)}{\partial V}\right)_T = \left.\frac{\partial(-P)}{\partial T}\right)_V$ (dérivées croisées)

$\Rightarrow \frac{l}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Rightarrow l = T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

or $P = \frac{nRT}{V - nb} - a\frac{n^2}{V^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V - nb}$

$\Rightarrow \boxed{l = \frac{nRT}{V - nb} = P + a\frac{n^2}{V^2}}$

2) $dU = nC_v dT + (l - P)dV$

$\Rightarrow \boxed{dU = nC_v dT + a\frac{n^2}{V^2}dV}$

$\Rightarrow \left.\frac{\partial(nC_v)}{\partial V}\right)_T = \left.\frac{\partial\left(a\frac{n^2}{V^2}\right)}{\partial T}\right)_V = 0$

$\Rightarrow C_v(\cancel{V}, T)$

à la limite des grands volumes, $C_v = \frac{5}{2}R$ $\Big) \Rightarrow \boxed{C_v = \frac{5}{2}R}$

$\Rightarrow$ m̂ C_v que pour un GP diatomique

3) $dU = \frac{5}{2}nR\,dT + a\frac{n^2}{V^2}dV$

$\Rightarrow \boxed{U(T,V) = \frac{5}{2}nRT - \frac{an^2}{V} + c^{te}}$

4) $dS = \frac{5}{2}nR\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V - nb}$

$\Rightarrow \boxed{S(T,V) = \frac{5}{2}nR\ln\frac{T}{T_0} + nR\ln\frac{V - nb}{V_0 - nb} + S(T_0, V_0)}$

5) $B \to C$ et $D \to A$: adiabatique réversible $\Rightarrow S = c^{te}$

$S_B = S_C \Rightarrow \underbrace{\frac{5}{2}\ln T_f + \ln(V_B - nb) = \frac{5}{2}\ln T_c + \ln(V_c - nb)}_{\Rightarrow V_c}$

$S_D = S_A \Rightarrow \underbrace{\frac{5}{2}\ln T_c + \ln(V_D - nb) = \frac{5}{2}\ln T_f + \ln(V_A - nb)}_{\Rightarrow V_D}$

6) $\delta Q = TdS$ (réversible) (2nd principe)

$\Rightarrow \delta Q = \frac{5}{2}nR\,dT + nRT\frac{dV}{V - nb}$

isotherme T_c $\Rightarrow dT = 0$

$$\Rightarrow \boxed{Q_c = nRT_c \ln \frac{V_D - nb}{V_C - nb} = 616\ \text{J}}$$

7) $Q_f = nRT_f \ln \frac{V_B - nb}{V_A - nb} = -231\ \text{J}$ (même calcul)

cycle $\Rightarrow \Delta U = 0 = W + Q_f + Q_c$

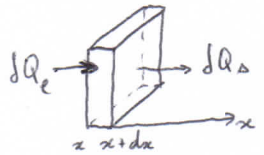
$$\Rightarrow \boxed{W = -Q_f - Q_c = -385\ \text{J}}$$

8) $\boxed{\rho = \frac{-W}{Q_c} = 0{,}625}$

Le rendement est identique pour ce gaz de Van der Waals et pour un GP : c'est le rendement maximal théorique donné par le thm de Carnot, qui est indépendant de la nature du fluide décrivant le cycle.

III) Etude d'un transfert thermique :

1)



$\vec{j_Q}$: densité de flux de chaleur

$\delta^2 Q_e = \vec{j_Q}(x) \cdot \vec{dS}\, dt$ chaleur qui entre en x pdt dt à travers la surface $\vec{dS}$

$\delta Q_e = j_Q(x)\, \Sigma\, dt$

$\delta Q_s = j_Q(x+dx)\, \Sigma\, dt$ chaleur qui sort en $x+dx$ pdt dt à travers Σ

chaleur reçue par l'élément de volume Σdx pendant dt :

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = \left[j_Q(x) - j_Q(x+dx) \right] \Sigma\, dt$$

or $\vec{j_Q} = -\lambda \, \vec{\text{grad}}\, T$ (loi de Fourier)

$= -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u_x}$ $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dx} \text{ car régime permanent} \right)$

$$\delta Q = \lambda \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx} \right)_x \right] \Sigma\, dt$$

$$\delta Q = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} \Sigma\, dx\, dt = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} d\tau\, dt$$

on est en régime permanent : $dH = dm\, c \overset{0}{\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}} dt$

$= \delta Q$ $(P = c^{te})$

$\Rightarrow \delta Q = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = 0}$$

$\left(\mu c \underset{\text{permanent}}{\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}} = \lambda \Delta T \right)$

2) $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T = Ax + B$ or $T(0) = T_0$ et $T(d) = T_1$ (conditions aux limites)

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{x}{d}}$$

3) transfert thermique par unité de tps et de surface : $\| \vec{j_Q} \|$

$\left(\delta^2 Q = \vec{j_Q} \cdot \vec{dS} \cdot dt \right)$ or $\vec{j_Q} = -\lambda \, \vec{\text{grad}}\, T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u_x}$

$\Rightarrow \phi = \| \vec{j_Q} \| = \boxed{\lambda (T_0 - T_1) \frac{1}{d} = \phi}$ si $T_0 > T_1$

4) $Q = \phi \Sigma t \Rightarrow t = \frac{Q}{\phi \Sigma} \Rightarrow t = \frac{Q d}{\lambda (T_0 - T_1) \Sigma}$

$\boxed{t = \frac{Q}{g (T_0 - T_1)}}$ si $T_0 > T_1$ avec $g = \frac{\lambda \Sigma}{d}$ la conductance thermique

* $T_0 \to T_1 \Rightarrow t \to \infty$, c'est normal.

5) $$\delta S_{\text{échange}} = \underset{\text{en } x=0}{\frac{\phi \Sigma\, dt}{T_0}} + \underset{\text{en } x=d}{\frac{-\phi \Sigma\, dt}{T_1}}$$

or $dS = 0$ (régime permanent) et $dS = \delta S_{\text{échange}} + \delta S_{\text{créée}}$

$$\Rightarrow \delta S_{\text{créée}} = \phi \Sigma\, dt \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) = \lambda (T_0 - T_1) \frac{1}{d} \Sigma\, dt \frac{T_0 - T_1}{T_0 T_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta S_{\text{créée}}}{dt} = g \frac{(T_0 - T_1)^2}{T_0 T_1}}$$

$\frac{\delta S_{\text{créée}}}{dt}$, donc l'irréversibilité, augmente bien avec l'écart de température entre les 2 sources.

IV) Etude de la puissance d'une machine thermique

1) cf III)4) $\boxed{t_1 = \frac{Q_1}{g (T_1 - T_f)}}$ et $\boxed{t_2 = \frac{Q_2}{g (T_c - T_2)}}$

car Q_1 et $Q_2 > 0$ (cf définition)

2) * cycle $\Rightarrow \underset{S \text{ fonction d'état}}{\Delta S = 0} = S_{\text{éch}} + \underset{0 \text{ (réversible)}}{S_{\text{créée}}}$

$\Rightarrow S_{\text{échange}} = 0 = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$ ($+Q_2$ car reçue par fluide, $-Q_1$ car Q_1 cédée par fluide)

$\Rightarrow \boxed{\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0}$ (égalité de Clausius dans le cas réversible)

* Les transformations décrites par le fluide sont réversibles, mais les transferts thermiques entre les sources et le fluide ne le sont pas.

* cycle $\Rightarrow \Delta U = 0 \underset{1^{\text{er}} \text{ principe}}{=} Q_2 - Q_1 - W_m$ ($W_m > 0$, travail fourni sur un cycle)

rendement $\rho = \dfrac{W_m}{Q_2}$

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2$$

$$Q_2 - Q_1 - W_m = 0 = Q_2\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) - W_m$$

rendement $\boxed{\rho = 1 - \dfrac{T_1}{T_2}}$

3) $\boxed{Q_2 = \dfrac{W_m}{1 - \dfrac{T_1}{T_2}}}$ et $\boxed{Q_1 = \dfrac{T_1}{T_2} Q_2 = \dfrac{W_m}{\dfrac{T_2}{T_1} - 1}}$

4) $t_0 = t_1 + t_2 = \dfrac{Q_1}{g(T_1 - T_f)} + \dfrac{Q_2}{g(T_c - T_2)}$

$$\Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{W_m}{g(T_2 - T_1)}\left(\frac{T_1}{T_1 - T_f} + \frac{T_2}{T_c - T_2}\right)}$$

5) $\boxed{P = \dfrac{W_m}{t_0} = \dfrac{g(T_2 - T_1)}{\dfrac{T_1}{T_1 - T_f} + \dfrac{T_2}{T_c - T_2}}}$

6) $\dfrac{1}{P} = ?$

$x = \dfrac{T_2}{T_1}$ et $\theta = T_2 - T_1 \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \dfrac{\theta}{x-1} \\ T_2 = \dfrac{x\theta}{x-1} \end{cases}$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{g\theta}\left(\frac{1}{1 - \frac{(x-1)T_f}{\theta}} + \frac{1}{\frac{T_c(x-1)}{x\theta} - 1}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{P} = \frac{1}{g}\left[\frac{1}{\theta - T_f(x-1)} + \frac{1}{T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \theta}\right]}$$

7) A T_c et T_f données, $\dfrac{1}{P}$ est une fonction de x et de θ avec

$$1 < x < \frac{T_c}{T_f} \quad \text{et} \quad 0 < \theta < T_c - T_f$$

La recherche du minimum de la fonction $\dfrac{1}{P}$ (P_{max}) conduit à l'ensemble des deux conditions nécessaires :

$$\left(\frac{1}{P}\right)'_\theta = \left(\frac{1}{P}\right)'_x = 0 \quad \text{avec} \quad \left(\frac{1}{P}\right)'_\theta = \left.\frac{\partial\left(\frac{1}{P}\right)}{\partial\theta}\right|_x$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{1}{P}\right)'_x = \left.\frac{\partial\left(\frac{1}{P}\right)}{\partial x}\right|_\theta$$

$$\left(\frac{1}{P}\right)'_\theta = \frac{1}{g}\left[\frac{-1}{\left(\theta - T_f(x-1)\right)^2} + \frac{1}{\left(T_c\left(1-\frac{1}{x}\right) - \theta\right)^2}\right]$$

$$\left(\frac{1}{P}\right)'_\theta = 0 \Leftrightarrow -\left(T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \theta\right)^2 + \left(\theta - T_f(x-1)\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\theta T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 2\theta T_f(x-1) - T_c^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + T_f^2(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(2\theta - T_f(x-1) - T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)\left(T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) - T_f(x-1)\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{P}\right)'_\theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) - T_f(x-1) = 0 & (1) \\ \text{ou} \\ 2\theta - T_f(x-1) - T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow -T_f x^2 + x(T_c + T_f) - T_c = 0$$

$$\Delta = (T_c + T_f)^2 - 4T_f T_c = (T_c - T_f)^2$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-(T_c + T_f) - (T_c - T_f)}{-2T_f} = \dfrac{T_c}{T_f} \\ x = \dfrac{-(T_c + T_f) + (T_c - T_f)}{-2T_f} = 1 \end{cases}$$

or $1 < x < \dfrac{T_c}{T_f}$ ($x > 1$ car $T_2 > T_1$ sinon le moteur ne peut fonctionner) ($x < \dfrac{T_c}{T_f}$ car $T_2 < T_c$ et $T_1 > T_f$)

$\Rightarrow$ impossible

$$\Rightarrow (2) : 2\theta - T_f(x-1) - T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 = \frac{1}{2}T_f(x-1) + \frac{1}{2}T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

On calcule alors $\left(\frac{1}{P}\right)(x, \theta_0)$:

$$\left(\frac{1}{P}\right)(x, \theta_0) = \frac{4}{g\left[T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) - T_f(x-1)\right]}$$

$$\Rightarrow P(x, \theta_0) = \frac{1}{4}g\left[T_c\left(1 - \frac{1}{x}\right) - T_f(x-1)\right]$$

et on dérive enfin par rapport à x la fonction $P(x, \theta_0)$

$$\Rightarrow \frac{dP(x, \theta_0)}{dx} = \frac{g}{4}\left(\frac{T_c}{x^2} - T_f\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{on veut } P_{max}}}{=} 0 \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{T_c}{T_f}}$$

La dérivée étant négative sur le reste de l'intervalle, cette valeur correspond bien à un maximum pour la fonction $P(x, \theta_0)$.

$\Rightarrow$ La puissance est maximale pour $\left\{\theta = \theta_0 = \dfrac{T_c - T_f}{2},\ x = x_0 = \sqrt{\dfrac{T_c}{T_f}}\right\}$, la valeur maximale étant

$$P_{max} = P(x_0, \theta_0) = g\left(\frac{\sqrt{T_c} - \sqrt{T_f}}{2}\right)^2$$

rendement $\rho = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{x}$ (cf IV) 2))

si $x = \sqrt{\frac{T_c}{T_f}}$, $\boxed{\rho_0 = 1 - \sqrt{\frac{T_f}{T_c}}} < \rho_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

cf I) 4)

$\Rightarrow$ la puissance maximale s'obtient donc au détriment du rendement.

8)

	rendement expérimental ρ	P_{max} $\Rightarrow \rho_0 = 1 - \sqrt{\frac{T_f}{T_c}}$	Carnot $\rho_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$
West Thurrock	0,36	0,40	0,64
Candu	0,30	0,27	0,47
Cardello	0,16	0,18	0,33

* Le rendement expérimental est nécessairement inférieur au rendement thermodynamique théorique de Carnot (cas idéal) à cause des irréversibilités thermodynamiques, rendement mécanique ($\rho < \rho_c$)
* Si pour les centrales de West Thurrock et Cardello, la recherche de la puissance maximale a pu être privilégiée ($\rho_{exp} < \rho_0$), en revanche pour celle de Candu, les conditions d'un rendement plus élevé ont peut-être été choisies ($\rho > \rho_0$).