

# Transformation de Laplace :

*définition, propriétés, et exemples d'utilisation en physique*

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Définition, propriétés et principe de calcul</b>	<b>2</b>
1	Introduction	2
2	Intégrale de Laplace	2
2.1	Expression . . . . .	2
2.2	Existence de l'intégrale : abscisse de sommabilité . . . . .	3
2.3	Transformée de Laplace d'une fonction . . . . .	3
3	Propriétés fondamentales	3
3.1	Linéarité . . . . .	4
3.2	Convergence . . . . .	4
3.3	Changement d'échelle . . . . .	4
3.4	Théorème du retard . . . . .	4
3.5	T.L. d'une dérivée . . . . .	5
3.6	T.L. d'une intégrale (ou primitive) . . . . .	5
3.7	T.L. d'une fonction périodique (définie pour $t \geq 0$ ) . . . . .	6
3.8	Théorème de la valeur initiale - Théorème de la valeur finale . . . . .	7
3.8.1	Théorème de la valeur initiale . . . . .	7
3.8.2	Théorème de la valeur finale . . . . .	7
4	Exemples de calculs de T.L.	8
4.1	Fonction de Heaviside . . . . .	8
4.2	Impulsion de Dirac . . . . .	8
4.3	Fonction exponentielle . . . . .	9
4.4	Tableau récapitulatif de quelques T.L. . . . .	9
<b>II</b>	<b>Application de la T.L. en physique</b>	<b>10</b>
1	Principe	10
2	Exemple en analyse du signal : caractéristiques d'un circuit RLC à l'aide d'une impulsion de Dirac	12
3	Formalisme de Laplace en électricité	13
3.1	Fonction de transfert opérationnelle . . . . .	14
3.2	Impédance opérationnelle . . . . .	14
3.3	Exemples d'analyses du comportement d'un circuit . . . . .	15
3.3.1	Réponse indicielle (échelon) . . . . .	15
3.3.2	Réponse impulsionnelle (impulsion de Dirac) . . . . .	16

## Première partie

# Définition, propriétés et principe de calcul

## 1 Introduction

Lors des études menées sur les systèmes linéaires dans les deux premières années post-baccalauréat, il est réservé une place très importante, pour ne pas dire prépondérante, aux signaux périodiques, et dans une assez large majorité des cas, les signaux sont purement sinusoidaux. L'étude d'un système soumis à une contrainte harmonique (circuit RLC soumis à un signal sinusoidal, amortisseur soumis à un générateur de force sinusoidal, etc...) fournit en effet de précieux renseignements comme le coefficient d'amortissement, la pulsation de résonance etc... L'analyse du comportement d'un tel système est souvent présenté à l'aide d'un spectre de réponse en fréquence (Diagramme de Bode en électronique, courbe de résonance en mécanique). L'outil communément utilisé est alors la Transformation de Fourier (Transformée de Fourier Rapide sur un ordinateur (TFR)), qui constitue une extension du concept de développement en série de Fourier, mais cette fois pour un signal de durée finie<sup>1</sup>.

Cependant, il n'est pas rare de rencontrer des systèmes soumis à des contraintes non périodiques comme des impulsions de courte durée (impulsion de Dirac), ou des fonctions de type "échelon" (fonction de Heaviside); l'utilisation de la TF est alors inappropriée. L'outil adapté à l'analyse des signaux quelconques est l'intégrale de Laplace, appelée sous certaines conditions d'existence **Transformée de Laplace**.

Ce document propose une présentation rapide des propriétés de la Transformation de Laplace, et expose quelques applications dans le domaine de l'électrocinétique, les résultats étant facilement transposables à tout autre domaine de la physique régi par des équations différentielles similaires.

La dernière partie illustre la puissance de la transformée de Laplace à l'aide de multiples exemples pris en électrocinétique, et dont le traitement classique est bien plus délicat sans cet outil.

La démarche entreprise à travers ces quelques pages ne prétend aucunement à une présentation complète de cet outil mathématique, mais il m'a semblé qu'en exposant d'une part la définition de la transformée de Laplace ainsi que ses principales propriétés, et d'autre part quelques exemples en électrocinétique, le lecteur pourrait imaginer toutes les applications possibles dès lors que le phénomène étudié est régi par une équation différentielle linéaire.

Enfin, l'aspect très systématique de son application dans la résolution des équations différentielles<sup>2</sup> permet d'envisager des méthodes algorithmiques telles que celles employées par les logiciels de calcul formel.

## 2 Intégrale de Laplace

### 2.1 Expression

On appelle **Intégrale de Laplace** la fonction de la variable  $p$  définie par :

1. cf cours MPP «Transformation de Fourier»
2. cf exemples d'applications

$$I(p) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1)$$

où  $f(t)$  est une fonction nulle pour  $t < 0$ , et dans laquelle  $p$  est, à priori, un nombre complexe ( $p = \alpha + i\beta$ ).

## 2.2 Existence de l'intégrale : abscisse de sommabilité

Supposons que l'intégrale de Laplace existe pour  $p_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ , c'est à dire que  $f(t) e^{-p_0 t}$  est sommable. En posant  $p = \alpha + i\beta$  alors :

$$\text{si } \alpha > \alpha_0 \text{ alors : } |f(t) e^{-\alpha t}| < |f(t) e^{-\alpha_0 t}|$$

Cette dernière inégalité entraîne la sommabilité de  $f(t) e^{-pt}$  puisque l'intégrale majorante existe, donc :

**Si l'intégrale de Laplace existe pour  $p_0$ , alors elle existe pour  $p$  avec  $Re(p) > Re(p_0)$ .**

**Définition 2.2.1** On appelle *abscisse de sommabilité*  $a$  la plus petite valeur de  $Re(p)$  pour laquelle l'intégrale de Laplace est sommable.

## 2.3 Transformée de Laplace d'une fonction

On appelle Transformée de Laplace (**T.L.**) de la fonction  $f(t)$ , la fonction  $\mathbf{F}(p)$  de la variable complexe  $p$  définie pour  $Re(p) > a$  par l'intégrale de Laplace :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2)$$

Remarque : la fonction  $f(t)$  s'appelle l'originale de  $\mathbf{F}(p)$ .

## 3 Propriétés fondamentales

Cette partie ne s'entourant pas de la rigueur nécessaire et inhérente à tout cours de mathématiques valable, elle ne doit donc pas être reconnue comme tel. Le lecteur trouvera en revanche une série de propriétés intéressantes (et non exhaustives) permettant l'exploitation de la **T.L.** pour la résolution des problèmes de physique (et de chimie dans une moindre mesure).

### 3.1 Linéarité

En raison des propriétés des intégrales, la transformation de Laplace est linéaire, c'est à dire : si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux complexes quelconques :

$$\mathfrak{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathfrak{L}(f) + \mu \mathfrak{L}(g) \quad (3)$$

Pour les «physiciens», on pourra mémoriser cette propriété par la phrase suivante :

*La sommation sur les fonctions du temps multipliées par des nombres se traduit par la sommation de leurs transformées de Laplace associées, multipliées par ces mêmes nombres.*

### 3.2 Convergence

*La transformée de Laplace  $F(p)$  d'une fonction  $f(t)$  tend vers 0 quand  $\Re(p)$  tend vers l'infini.*

**Remarque :** cette propriété se démontre immédiatement en introduisant un réel  $\alpha_0$  supérieur à l'abscisse de sommabilité  $a$  (et en posant naturellement  $p = \alpha + i\beta$ ).

### 3.3 Changement d'échelle

On appelle théorème du changement d'échelle la propriété suivante :

Si  $c$  est une constante positive, alors :

$$\mathfrak{L}[f(ct)] = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right) \quad (4)$$

**Démonstration :**

$$\mathfrak{L}[f(ct)] = \int_{0^-}^{\infty} f(ct) e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t') e^{-p \frac{t'}{c}} \frac{dt'}{c} = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right)$$

(en posant le changement de variable  $t' = ct$ )

### 3.4 Théorème du retard

Cette propriété (dont l'appellation est jugée «impropre» par les mathématiciens) est la suivante :

Pour toute fonction  $f(t)$  nulle pour  $t < 0$  et avec  $t_0 > 0$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-pt_0} F(p)} \quad (5)$$

**Démonstration :**

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(u) e^{-p(u+t_0)} du = e^{-pt_0} F(p)$$

### 3.5 T.L. d'une dérivée

La transformée de Laplace des dérivées successives d'une fonction f s'obtient par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= p F(p) - f(0^-) \\ \mathcal{L}[f''(t)] &= p^2 F(p) - p f(0^-) - f'(0^-) \\ \mathcal{L}[f^{(3)}(t)] &= p^3 F(p) - p^2 f(0^-) - p f'(0^-) - f''(0^-) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^-) - p^{n-2} f'(0^-) - p^{n-3} f''(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-) = p^n F(p)} \quad (6)$$

**Démonstration :**

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = [f(t) e^{-pt}]_0^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} f(t) p e^{-pt} dt$$

ce qui donne sans peine :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0^-) + p \mathcal{L}[f(t)] = p F(p) \quad \text{compte tenu de } f(0^-) = 0$$

Ce résultat se généralise bien entendu aux dérivées successives (sous réserve de continuité des dérivées en 0). On pourra d'ailleurs mener le calcul à titre d'entraînement (mathématique uniquement!).

### 3.6 T.L. d'une intégrale (ou primitive)

Comme pour la T.L. d'une fonction dérivée, la technique de calcul de la T.L. d'une intégrale s'avère extrêmement utile en physique. On retiendra que :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t \geq 0} f(u) du\right] = \frac{F(P)}{P}} \quad (7)$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \int_{0^-}^{t \geq 0} f(u) du \right] &= \int_{0^-}^{\infty} \left[ \int_{0^-}^t f(u) du \right] e^{-pt} dt \\ &= \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \int_{0^-}^t f(u) du \right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} f(t) \frac{e^{-pt}}{p} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) \frac{e^{-pt}}{p} dt \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathcal{L} \left[ \int_{0^-}^{t \geq 0} f(u) du \right] = \frac{F(p)}{p}$$

Ce résultat se généralise bien entendu aux intégrales successives (sous réserve de continuité).

### 3.7 T.L. d'une fonction périodique (définie pour $t \geq 0$ )

Considérons la fonction périodique définie pour  $t \geq 0$  dont la représentation, donnée en fig. 1, est obtenue par reproduction périodique du signal  $\phi_0(t)$  lui-même défini entre 0 et  $T$  :

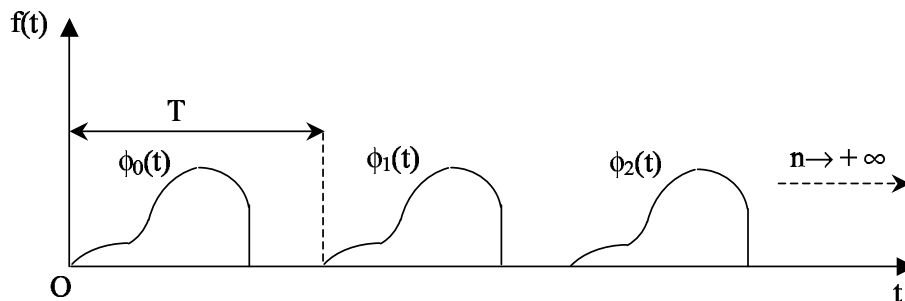


Figure 1 : Signal périodique quelconque

La fonction  $f(t)$  s'écrit simplement comme la somme des  $\phi_i(t)$  :

$$f(t) = \phi_0(t) + \phi_1(t) + \dots + \phi_n(t) = \sum_{i=0}^n \phi_i(t)$$

Si l'on appelle  $\Phi_i(p)$  les transformées de Laplace respectives des fonctions  $\phi_i(t)$ , alors on a alors par linéarité de la T.L. :

$$F(p) = \Phi_0(p) + \Phi_1(p) + \Phi_2(p) + \dots + \Phi_n(p) = \sum_{i=0}^n \Phi_i(p)$$

or, en remarquant que :

$$\phi_i(t) = \phi_0(t - iT) \quad \text{pour } i > 0$$

alors le théorème du retard permet d'écrire :

$$\Phi_i(p) = \Phi_0(p) e^{-i p T}$$

ce qui conduit à :

$$F(p) = \Phi_0(p) \sum_{i=0}^n e^{-i p T} = \Phi_0(p) [1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots + e^{-npT}]$$

On reconnaît entre crochets, la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $e^{-pT}$ , donc :

$$F(p) = \Phi_0(p) \frac{1 - e^{-npT}}{1 - e^{-pT}}$$

Dans le cas où la fonction  $f(t)$  est périodique (pour  $t > 0$ ), le résultat précédent prend une forme souvent très utile en analyse du signal :

$$\boxed{F(p) = \frac{\Phi_0(p)}{1 - e^{-pT}}} \quad (8)$$

### 3.8 Théorème de la valeur initiale - Théorème de la valeur finale

#### 3.8.1 Théorème de la valeur initiale

Si, lorsque  $t$  tend vers 0,  $f(t)$  possède une limite inférieure notée  $f(0^+)$ , alors  $f(0^+)$  est aussi la limite de  $pF(p)$  quand  $p$  tend vers  $+\infty$ ,

ce qui se résume sous forme mathématique par :

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p) = \lim_{t > 0 \rightarrow 0} f(t) = f(0^+)} \quad (9)$$

#### 3.8.2 Théorème de la valeur finale

Si, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $f(t)$  possède une limite supérieure, alors elle est aussi la limite de  $pF(p)$  quand  $p$  tend vers 0,

ce qui se résume sous forme mathématique par :

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +0} p F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)} \quad (10)$$

Ce théorème présente un intérêt majeur lors de l'analyse du comportement des systèmes après qu'ils ont subi une contrainte. Il permet notamment de prévoir le comportement de la réponse du système lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

**Remarque :** les démonstrations de ces deux théorèmes, bien qu'intéressantes sont assez fastidieuses, et ne présentent guère d'intérêt dans l'optique de ce cours; elles ne seront donc pas données. On pourra néanmoins trouver celles-ci dans des ouvrages de mathématiques appliqués<sup>3</sup>.

## 4 Exemples de calculs de T.L.

### 4.1 Fonction de Heaviside

On appelle fonction de Heaviside ou «échelon», la fonction suivante représentée en figure 2.

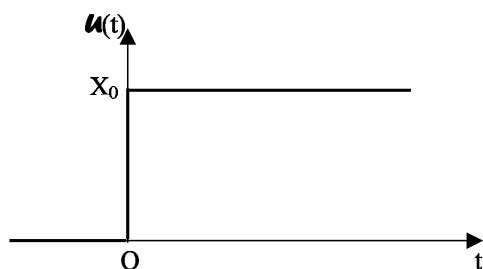


Figure 2 : Fonction "échelon"

Calcul de la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [u(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} u(t) e^{-pt} dt = \int_{0^+}^{\infty} u(t) e^{-pt} dt \\ &= -X_0 \cdot \left[ \frac{e^{-pt}}{p} \right]_{0^+}^{+\infty} \\ &= \frac{X_0}{p} \end{aligned} \tag{11}$$

### 4.2 Impulsion de Dirac

On appelle impulsion de Dirac, généralement notée  $\delta(t)$  un «pic» dont la largeur tend vers 0. Cette définition, bien que très commode, est incorrecte du point de vue mathématique, l'impulsion de Dirac étant définie dans le cadre d'étude des distributions (on parle alors de distribution de Dirac). L'approche rigoureuse de ce concept n'étant abordée qu'en second cycle, elle sera intégralement passée sous silence dans ce cours.

La «fonction» de Dirac, qui est en fait une limite, est représentée en figure 3 (telle que l'utilise les physiciens). **Attention :** on notera que  $t_0 \rightarrow 0$  et que  $A \cdot t_0 = I$  (produit unitaire).

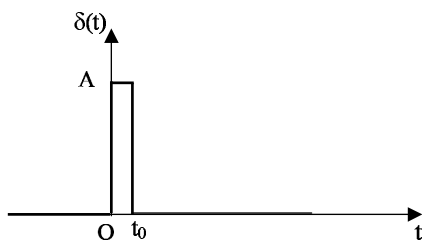


Figure 3 : Impulsion de Dirac

3. «L'outil mathématique pour la physique» p142 Roger PETIT (5ième édition) DUNOD



**Calcul de la transformée de Laplace :**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_{0^+}^{t_0} A e^{-pt} dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} A \left[ \frac{1 - e^{-pt_0}}{p} \right] \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} At_0 \frac{1 - e^{-pt_0}}{pt_0} = At_0 = I \end{aligned} \quad (12)$$

### 4.3 Fonction exponentielle

La transformée de Laplace de cette fonction présente un intérêt majeur dans le traitement du signal, et les divers exemples présentés en fin de ce cours ne contrediront pas ceci. Soit la fonction :

$$f(t) = f(t) = e^{p_0 t} \quad \text{pour } t \geq 0$$

**Calcul de la transformée de Laplace :**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{p_0 t} e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p_0 - p} \cdot \left[ e^{(p_0 - p)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{p - p_0} \quad \text{sous réserve que } \Re(p) > \Re(p_0)!!! \end{aligned} \quad (13)$$

### 4.4 Tableau récapitulatif de quelques T.L.

Le tableau suivant présente une liste de quelques fonctions, ainsi que leurs transformées de Laplace respectives. Ces fonctions ont été choisies en raison de leur importance en physique. Le lecteur pourra, à titre d'exercice, reprendre les démonstrations des résultats.

TABLE 1: *Tableau des transformées de Laplace des principales fonctions*

Fonctions $f(t)$	T.L. $F(p)$	Remarques
1	$\frac{1}{p}$	$f = 1$ sur $\mathfrak{R}^+$ et 0 ailleurs
$e^{at}$	$\frac{1}{p-a}$	très utilisé en traitement du signal (cf exemples)
$t$	$\frac{1}{p^2}$	
suite en page suivante		

TABLE 1: *suite*

suite du tableau		
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	utile si second membre d'une équation différentielle
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	utile si second membre d'une équation différentielle
$e^{at} \cdot \sin(bt)$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$	
$e^{at} \cdot \cos(bt)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	
$sh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	
$ch(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	
$\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{p \sin \phi + \omega \cos \phi}{p^2+a^2}$	utile si second membre d'une équation différentielle
$\cos(\omega t + \phi)$	$\frac{p \cos \phi - \omega \sin \phi}{p^2+a^2}$	utile si second membre d'une équation différentielle
$e^{at} sh(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$	
$e^{at} ch(\omega t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$	
Fin du tableau		

## Deuxième partie

# Application de la T.L. en physique

## 1 Principe

Les équations différentielles linéaires jouant un rôle très important dans tous les secteurs de la physique, les outils de résolution de celles-ci sont incontournables. Dans les cas les plus simples ces équations sont d'ordre deux, et ne présentent en général pas de difficultés majeures tant que l'expression du second membre reste une fonction classique ; en revanche, lorsque le second membre est une impulsion de Dirac, ou lorsque l'équation est d'ordre supérieur, le traitement est beaucoup plus délicat, et l'utilisation de la transformation de Laplace devient incontournable.

Afin de mieux démontrer la puissance technique de cet outil, et de montrer la grande généralités des calculs, on propose de traiter le cas d'une équation différentielle linéaires d'ordre  $n$  à coefficients constants.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e \quad (14)$$

**La méthode de résolution s'articule en trois étapes :**

- ◆ Dans un premier temps, on établit la transformée de Laplace de l'équation. On appellera  $S(p)$  la T.L. du signal  $s(t)$  et  $E(p)$  celle de  $e(t)$ . Le calcul donne :

$$\begin{aligned} a_n \left[ p^n S(p) - p^{n-1} s(0-) - \dots - \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}}(0-) \right] + \\ a_{n-1} \left[ p^{n-1} S(p) - p^{n-2} s(0-) - \dots - \frac{d^{n-2} s}{dt^{n-2}}(0-) \right] + \dots \\ = b_m \left[ p^m E(p) - p^{m-1} e(0-) - \dots - \frac{d^{m-1} s}{dt^{m-1}}(0-) \right] + \\ b_{m-1} \left[ p^{m-1} E(p) - p^{m-2} e(0-) - \dots - \frac{d^{m-2} e}{dt^{m-2}}(0-) \right] + \dots \end{aligned}$$

On constate que les termes calculés en  $0-$  compliquent assez largement la tâche. Factorisons les deux membres afin de simplifier l'écriture :

$$S(p) [a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0] = E(p) [b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0] + C_0(p)$$

expression dans laquelle  $C_0(p)$  est un polynôme en  $p$ , dépendant de l'ensemble des conditions initiales sur les fonctions  $e(t)$  et  $s(t)$ .

On peut alors isoler la T.L. de  $s(t)$  en écrivant :

$$S(p) = \frac{[b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0] E(p) + C_0(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (15)$$

**remarque :** on notera qu'il apparaît au dénominateur un polynôme en  $p$  dont les coefficients sont ceux du premier membre de l'équation différentielle.

- ◆ Dans une seconde étape, on simplifie l'écriture de  $S(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ , par une méthode simple et très puissante :  
 Si l'on appelle  $p_0, p_1, \dots, p_n$  les racines du polynôme  $D(p)$  (dénominateur de  $S(p)$ ), alors  $S(p)$  peut s'écrire<sup>4</sup> :

$$S(p) = \frac{A N(p)}{(p - p_0)(p - p_1) \dots (p - p_n)} \quad (16)$$

que l'on peut immédiatement décomposer en éléments simples :

---

4. ces racines s'appellent les «pôles» de  $S(p)$

$$S(p) = \frac{A_0}{p - p_0} + \frac{A_1}{p - p_1} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} \quad (17)$$

Le calcul des coefficients ne pose pas de problème en général, et peut être réalisé par la méthode classique de multiplication des deux membres par  $(p - p_i)$  lorsque l'on recherche  $A_i$ .

- ◆ Enfin, la dernière étape consiste à déterminer l'originale  $s(t)$  (signal de sortie) ; or nous avons montré en 3.3 qu'une T.L. du type  $\frac{1}{p - p_i}$  possède une originale  $e^{-p_i t}$ .

Finalement, l'originale  $s(t)$  du signal de sortie est donc la suivante :

$$s(t) = A_0 e^{p_0 t} + A_1 e^{p_1 t} + \dots + A_n e^{p_n t} \quad (18)$$

**Résumons nous :**

Le calcul du signal  $s(t)$  nécessite la détermination des coefficients  $A_i$  et des pôles  $p_i$  de la T.L.  $S(p)$  de  $s(t)$ .

## 2 Exemple en analyse du signal : caractéristiques d'un circuit RLC à l'aide d'une impulsion de Dirac

On propose ici de présenter une technique de détermination des caractéristiques d'un circuit RLC à l'aide d'une impulsion de Dirac. Cette technique de réponse impulsionnelle est couramment utilisée pour la recherche des caractéristiques de divers appareils (haut-parleurs haut de gamme en particulier).

Soit un circuit RLC série dont on recherche la réponse à une impulsion de Dirac aux bornes de la capacité. La réponse  $u_c(t)$  est régie par l'équation différentielle suivante<sup>5</sup> :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 \delta(t) \quad \text{avec : } \begin{cases} m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \text{les conditions initiales sont « nulles »} \end{cases}$$

- ◆ Dans une première étape, on calcule la T.L. de l'équation :

$$U_c(p) [p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2] = \omega_0^2 \cdot I$$

---

5. cf. cours d'électrocinétique de 1<sup>er</sup> cycle

◆ On isole ensuite  $S(p)$  :

$$U_c(p) = \frac{\omega_0^2 \cdot I}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

◆ On calcule enfin les pôles de la T.L.  $U_c(p)$  qui dépendent de la valeur du coefficient d'amortissement réduit  $m$  ainsi que les coefficients  $A_i$  :

1. → si  $m > 1$  alors les pôles sont réels et valent respectivement :

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \end{cases}$$

Les coefficients de décomposition en éléments simples  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\omega_0^2 I}{p_1 - p_2} = \frac{\omega_0^2 I}{2\sqrt{m^2 - 1}} \\ A_2 = \frac{\omega_0^2 I}{p_2 - p_1} = -\frac{\omega_0^2 I}{2\sqrt{m^2 - 1}} \end{cases}$$

Le calcul de l'originale est immédiat :

$$u_c(t) = \frac{\omega_0^2 I}{\sqrt{m^2 - 1}} e^{-m\omega_0 t} \sinh \left[ \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} t \right]$$

2. → si  $m < 1$  les pôles sont complexes :

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - m^2} \end{cases}$$

Les coefficients de décomposition en éléments simples  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\omega_0^2 I}{p_1 - p_2} = \frac{\omega_0^2 I}{2j\sqrt{1 - m^2}} \\ A_2 = \frac{\omega_0^2 I}{p_2 - p_1} = -\frac{\omega_0^2 I}{2j\sqrt{1 - m^2}} \end{cases}$$

Encore une fois, le retour à l'originale est instantané :

$$u_c(t) = \frac{\omega_0^2 I}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin \left[ \omega_0 \sqrt{1 - m^2} t \right]$$

### 3 Formalisme de Laplace en électricité

Bien que la transformation de Laplace soit un outil polyvalent, dont le champ d'application s'étend à tous les domaines de la physique faisant appel aux équations différentielles, son usage est malgré tout plus fréquent dans le domaine de l'électronique où sa souplesse est pleinement appréciable. Les paragraphes qui suivent expose «le formalisme de Laplace» dont le principe rejoint en quelque sorte celui du formalisme complexe, couramment utilisé dans l'analyse des systèmes en régime sinusoïdal.

### 3.1 Fonction de transfert opérationnelle

Lors du traitement des systèmes en régime harmonique (et par linéarité, en régime périodique quelconque), on exploite en général le formalisme complexe, et la notion de fonction de transfert complexe qui fournit une grande souplesse dans les calculs des amplitudes et des phases, évitant ainsi le recours aux calculs trigonométriques souvent fastidieux et sources d'erreurs.

Le formalisme de Laplace permet, sous certaines conditions de calculer très facilement la **fonction de transfert opérationnelle** :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

#### Règles d'application :

Si les **conditions initiales du problème sont toutes nulles** alors :

- ◇ La dérivation se traduit en formalisme de Laplace par une multiplication par  $p$ .
- ◇ L'intégration se traduit en formalisme de Laplace par une multiplication par  $\frac{1}{p}$ .

Pour l'équation différentielle linéaire «générique» écrite en 4.1, les conditions précédentes reviennent à écrire que  $C_0(p) = 0$ , donc :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

### 3.2 Impédance opérationnelle

Compte tenu de ce qui précède, il est intéressant de voir ce que deviennent les lois fondamentales sur les dipôles R, L, et C en formalisme de Laplace :

- ◇ Conducteur ohmique :  $u_R = Ri(t) \longrightarrow U_R = R I_R(p)$
- ◇ Bobine :  $u_L = L \frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow U_L(p) = Lp I_L(p)$
- ◇ Condensateur :  $u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) \cdot dt \longrightarrow U_C(p) = \frac{1}{CP} I_C(p)$

A l'aide des relations précédentes et par analogie avec la loi d'Ohm intégrale, on peut définir **les impédances opérationnelles** des dipôles RLC :

Impédance d'un conducteur ohmique	$Z_R = R$
Impédance d'une bobine	$Z_L = Lp$
Impédance d'un condensateur	$Z_C = \frac{1}{Cp}$

*Les lois de Kirchoff en électrocinétique (loi des mailles et loi des noeuds) peuvent donc être utilisées avec les grandeurs de Laplace associées.*

### 3.3 Exemples d'analyses du comportement d'un circuit

#### 3.3.1 Réponse indicielle (échelon)

L'évaluation de la réponse indicielle d'un circuit est un procédé courant. Bien que le traitement de l'équation différentielle soit tout à fait possible par les méthodes classiques, le passage en espace de Laplace fournit un confort indiscutable par son aspect systématique.

On se propose ici de déterminer la réponse indicielle d'un circuit appelé "correcteur à avance de phase" et représenté en figure 4. Ce dispositif est notamment utilisé dans certains dispositifs tels les asservissements.

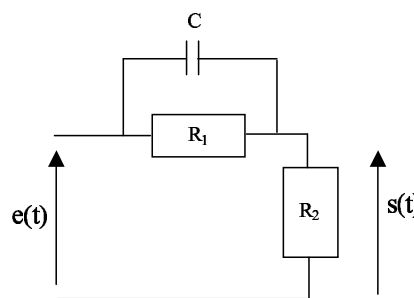


Figure 4 : Correcteur à avance de phase

Si l'on appelle  $Z_1$  l'impédance opérationnelle de l'ensemble  $(R_1 // C)$ , on a :

$$\frac{1}{Z_2(p)} = Cp + \frac{1}{R_1} = \frac{1 + R_1 Cp}{R_1} \quad \text{d'où l'on tire : } Z_2(p) = \frac{R_1}{1 + R_1 Cp}$$

Le calcul de la fonction de transfert opérationnelle ne pose aucun problème en utilisant la relation du diviseur de tension :

$$T(p) = \frac{R_2}{Z_1 + R_2} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{1 + R_1 Cp} + R_2} = \frac{R_2 (1 + R_1 Cp)}{(R_1 + R_2) + R_1 R_2 Cp}$$

La transformée  $S(p)$  est donc :

$$S(p) = \frac{R_2 (1 + R_1 Cp)}{(R_1 + R_2) + R_1 R_2 Cp} E(p)$$

Le circuit précédent est soumis à un échelon de tension d'amplitude  $E_0$  ; on cherchera ici à montrer l'apport évident du formalisme de Laplace en comparaison des techniques classiques. Compte tenu de  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ , l'expression de  $S(p)$  devient :

$$S(p) = E_0 \frac{R_2 (1 + R_1 C p)}{p (R_1 + R_2 + R_1 R_2 C p)}$$

qui devient lorsque l'on réécrit le dénominateur sous la forme requise (cf. équ.17) :

$$S(p) = \frac{E_0}{R_1 C} \frac{(1 + R_1 C p)}{p \left( p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \right)}$$

On cherchera à écrire  $S(p)$  sous la forme :

$$S(p) = \frac{E_0}{R_1 C} \left[ \frac{A_0}{(p - p_0)} + \frac{A_1}{p - p_1} \right]$$

La détermination des pôles donnent :

$$\begin{cases} p_0 = -0 \\ p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \end{cases}$$

et celle des coefficients  $A_i$  :

$$\begin{cases} A_0 = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \\ A_1 = \frac{R_1^2 C}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

d'où l'on déduit facilement :

$$S(p) = \frac{E_0}{R_1 + R_2} \left[ \frac{R_2}{p} + \frac{R_1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} \right]$$

L'obtention de l'originale est alors immédiate :

$$s(t) = \frac{E_0 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{E_0 R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

### 3.3.2 Réponse impulsionnelle (impulsion de Dirac)

Le cas de la réponse impulsionnelle est plus intéressant ! Reprenons le circuit de la figure 4 que nous soumettons cette fois à une impulsion de Dirac "d'amplitude"  $E_0$  ( $E(p) = E_0$ ). Le formalisme classique ne permettant pas une résolution simple du problème, on a recours à la transformée de Laplace qui démontre alors toute sa souplesse et sa puissance.

La transformée de Laplace du signal de sortie est :



$$S(p) = \frac{E_0}{R_1 C} \frac{(1 + R_1 C p)}{\left(p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$S(p) = E_0 - \frac{E_0}{R_2 C} \cdot \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

qui donne l'originale suivante :

$$s(t) = E_0 \left[ \delta(t) - \frac{1}{R_2 C} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right]$$

**Remarque :** On note que  $E_0$  ne possède pas ici la dimension d'une tension. Compte tenu de la définition de "l'aire" d'une impulsion de Dirac (amplitude de  $\delta(t) \times \text{durée} = 1$  (sans dimension)),  $\delta(t)$  est homogène à l'inverse d'un temps, ce qui impose à  $E_0$  d'avoir la dimension d'une tension multipliée par un temps, pour assurer que  $s(t)$  possède bien la dimension d'une tension.