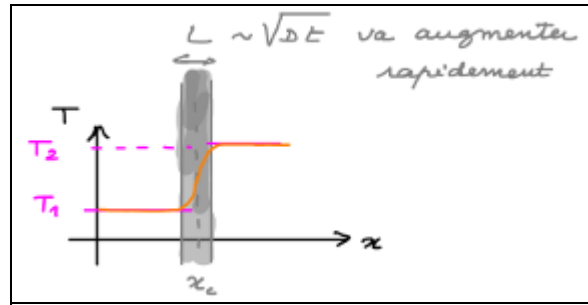


Le contact thermique parfait **entre deux solides** entraîne rapidement la **continuité de la température et du vecteur densité de courant thermique**.

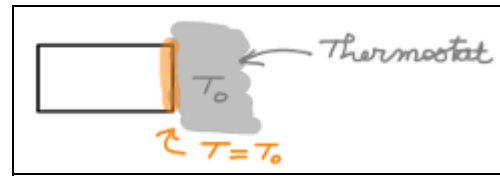
$$T(x_c^-) = T(x_c^+)$$

$$\vec{j}_Q(x_c^-) = \vec{j}_Q(x_c^+)$$



Le contact avec un **thermostat impose la température à l'interface**.

$$T(x_c) = T_0$$

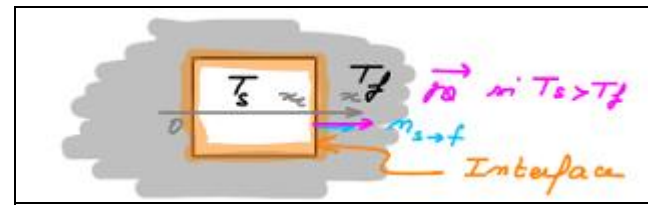


Ces lois sont aussi valables pour le contact d'un solide avec un fluide non brassé.

À l'interface entre un **solide et un fluide brassé**, la **température peut être discontinue**. Le **vecteur densité de courant thermique est continu** et donné par la relation de Newton ou **loi des échanges conducto-convectifs**.

$$T(x_c^-) \neq T(x_c^+)$$

$$\vec{j}_Q(x_c^-) = \vec{j}_Q(x_c^+) = h(T_s - T_f) \vec{n}_{s \rightarrow f}$$

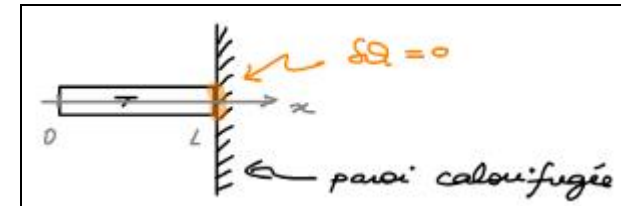


Le coefficient conducto-convectif augmente avec le brassage (mouvements du fluide).

$$h > 0$$

Contact avec une paroi calorifugée

$$\vec{j}_Q(x_c) = \vec{0}$$



Conditions aux limites

Diffusion thermique

Les différents modes de transfert thermique

Advection : transfert d'énergie par déplacement de matière (on parle de convection lorsque cela se produit sous l'effet d'un gradient)

Rayonnement : transfert d'énergie sans support matériel

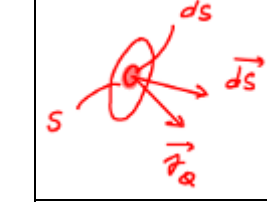
Diffusion (ou conduction) thermique : transfert d'énergie dans un milieu matériel sans déplacement de matière

Vecteur densité de courant thermique

$$\vec{j}_Q$$

Flux thermique à travers une surface orientée

$$\phi_Q = \frac{\delta Q}{dt} = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

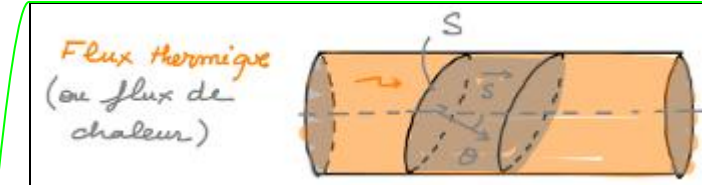


Homogène à une puissance

$\phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{S}$

Vecteur densité de courant uniforme

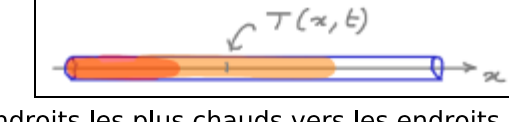
Flux thermique



Équilibre thermodynamique global : état dans lequel les propriétés macroscopiques du système n'évoluent plus dans le temps et sont uniformes dans toute partie homogène.

Équilibre thermodynamique local : état dans lequel chaque élément de volume de taille mésoscopique du système peut être individuellement considéré en état d'équilibre thermodynamique.

On peut donc définir localement des grandeurs qui d'ordinaire ne sont définissables que globalement.



La diffusion thermique se fait des endroits les plus chauds vers les endroits les plus froids.

Loi de Fourier

$$\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$$

Conductivité thermique

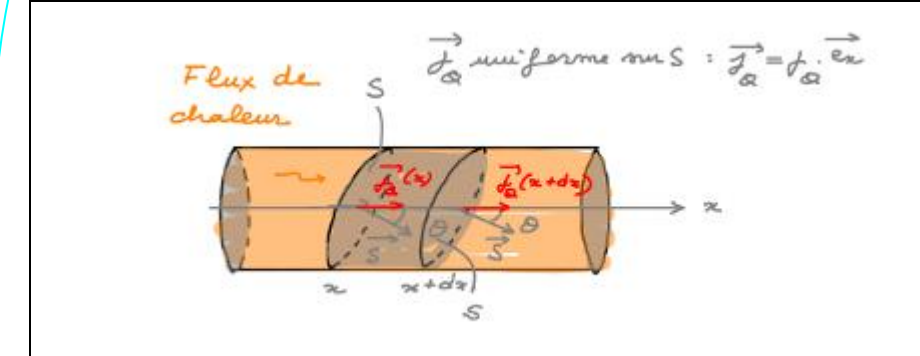
$$\lambda$$

Unité

$$W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$$

Bilan d'énergie interne

$$U(t+dt) - U(t) = \delta Q + p_{\text{autres}} dt = \phi_{Q, \text{entrant}} dt - \phi_{Q, \text{sortant}} dt + p_{\text{autres}} dt$$



Bilan d'énergie interne sur un volume élémentaire

$$\frac{dU}{dt} = \phi_{Q, \text{entrant}} - \phi_{Q, \text{sortant}} + p_{\text{autres}}$$

Équation locale de conservation de l'énergie interne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = p_{\text{autres}}$$

Énergie interne volumique

$$u$$

Puissance volumique d'autres sources que la conduction thermique

$$p_{\text{autres}}$$

En régime stationnaire

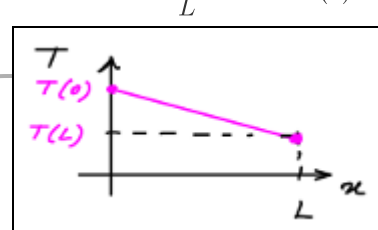
$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ soit } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Intégration

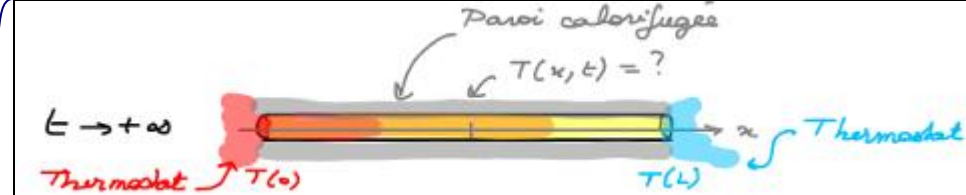
$$\frac{\partial T}{\partial x} = Cte$$

Profil de température

$$T = -\frac{T(0) - T(L)}{L} x + T(0)$$



Barre calorifugée en contact avec deux thermostats



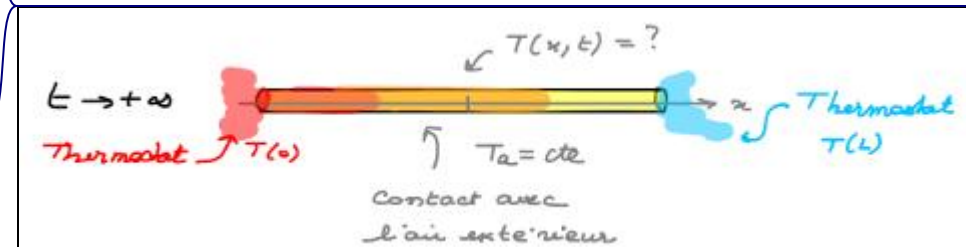
Bilan d'énergie interne sur un volume élémentaire

$$\frac{dU}{dt} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} S dx = j_Q(x) S - j_Q(x+dx) S - \int_{S_{\text{int}}} h(T(x) - T_a) \vec{n}_{\text{ext}} dS_{\text{int}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{\lambda R} T = -\frac{2h}{\lambda R} T_a$$

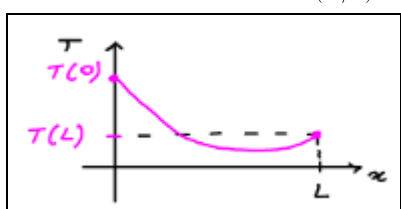
$$\text{puis on pose } \frac{1}{\ell^2} = \frac{2h}{\lambda R}$$

Barre en contact avec l'air et deux thermostats



Profil de température

$$T = T_a + (T(0) - T_a) \text{ch}(x/\ell) + \frac{(T(L) - T_a) - (T(0) - T_a) \text{ch}(L/\ell)}{\text{sh}(L/\ell)} \text{sh}(x/\ell)$$



Le flux thermique se conserve.

$$\frac{dU}{dt} = 0 \text{ et } p_{\text{autres}} = 0 \text{ soit } \phi_{Q, \text{entrant}} = \phi_{Q, \text{sortant}}$$

Expression du flux thermique

$$\phi_Q = j_Q S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = \frac{\lambda S}{L} (T(0) - T(L))$$

Analogie électrique

$$\phi_Q = \frac{T(0) - T(L)}{R_{th}} \equiv i = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

Résistance thermique

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

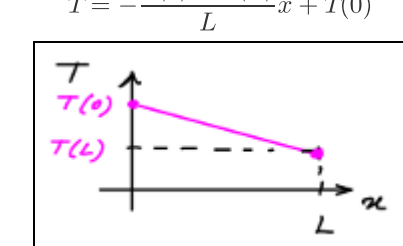
Lois d'association

$$\text{En série : } R_{th, \text{eq}} = \sum_i R_{th, i}$$

$$\text{En dérivation : } \frac{1}{R_{th, \text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_{th, i}}$$

Profil de température dans le cas unidirectionnel

$$T = -\frac{T(0) - T(L)}{L} x + T(0)$$

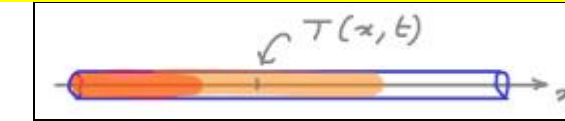


Cas particulier du régime stationnaire, sans therme source

Exemples

Équation de la diffusion thermique

Exemple d'une diffusion thermique unidirectionnelle



Bilan d'énergie interne sur un volume élémentaire

$$\frac{dU}{dt} = j_Q(x) S - j_Q(x+dx) S = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx$$

Loi de Fourier

$$j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Pour une phase condensée

$$\frac{dU}{dt} = C \frac{dT}{dt} = \mu S dx c \frac{T(x, t+dt) - T(x, t)}{dt}$$

Capacité thermique massique

$$c$$

Masse volumique

$$\mu$$

$$\frac{dU}{dt} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} S dx$$

Équation de la diffusion thermique

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Coefficient de diffusion thermique

$$D = \frac{\lambda}{\mu c}$$

Unité

$$m^2 \cdot s^{-1}$$

Généralisation, à trois dimensions

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T + \frac{p_{\text{autres}}}{\mu c}$$

Irreversibilité : Changer t en $-t$ dans l'équation de diffusion ne modifie pas celle-ci, le phénomène de diffusion est fondamentalement **irréversible**.

Ordre de grandeur du temps de diffusion

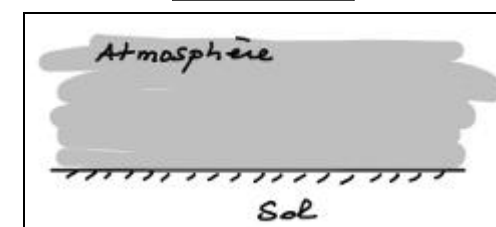
$$\tau \sim \frac{L^2}{D}$$

Ordre de grandeur de la distance de diffusion

$$L \sim \sqrt{D\tau}$$

Exemple de la diffusion thermique due aux variations journalière et/ou annuelles dans le sol, selon un axe Ox descendant (ondes thermiques)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$



Sur une profondeur de l'ordre de quelques épaisseurs de peau, l'amplitude de la variation de température devient négligeable.

Variation autour d'une valeur moyenne

$$\theta = T - T_m$$

Équation de la diffusion thermique

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Relation de dispersion

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}} (1 - j) \equiv \pm \frac{1 - j}{\delta}$$

Solution amortie

$$\theta = \theta_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \varphi)$$

Épaisseur de peau

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

Fluctuations journalières

$$\delta \sim 9 \text{ cm}$$

Fluctuations annuelles

$$\delta \sim 2 \text{ m}$$