TD04. Phénomènes de transport.

Conduction électrique, diffusion thermique et de particules

Conduction électrique

PhTr009. Modèle de Drude (*).

On modélise le cuivre par un réseau cristallin constitué d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction se déplacent.
On appelle n le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume et on suppose que chaque élément cuivre libère un électron de conduction. On note e la charge élémentaire.
Les collisions des électrons sur les ions du réseau et entre les électrons eux-mêmes sont modélisées par une force de frottement fluide $\vec{f_v} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$.
On applique au cuivre un champ électrique extérieur $\vec{E} = E\vec{u}_z$.

1. Appliquer la deuxième loi de Newton à un électron et déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de l'électron.
2. On se place en régime permanent. Montrer que l'on retrouve la loi d'Ohm locale et exprimer la conductivité électrique γ_0 en fonction de e, m, τ et n la densité particulaire.
3. On suppose maintenant que le champ électrique varie sinusoïdalement dans le temps : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$.
   Montrer que l'on peut définir une conductivité électrique complexe de la forme :
   $$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$
   avec ω_c à exprimer en fonction des données.
   Donner sa signification physique.

Réponses : 1 : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{-e\vec{E}}{m}$; 2 : $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$; 3 : $\omega_c = 1/\tau$

PhTr039. Résistance d'un conducteur ohmique sphérique (**)

On considère un conducteur ohmique, de conductivité électrique γ, de forme sphérique limité par deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2.
On impose une différence de potentiel U entre les deux armatures, un courant purement radial apparaît.

On rappelle l'expression de la résistance d'un tronçon rectiligne de section S et de longueur L : $R = \frac{L}{\gamma S}$.

En utilisant cette expression et les lois d'association des résistances, déterminer la résistance de ce conducteur ohmique.

Réponse : $R = \frac{1}{4\pi\gamma}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$

Conduction thermique

PhTr018. Double vitrage (*)

Un double vitrage est constitué d'une couche d'air, d'épaisseur e et de conductivité thermique λ_a, comprises entre deux vitres en verre, d'épaisseur e, de surface S et de conductivité thermique $\lambda_v \approx 10^2\lambda_a$.

1. Donner l'expression de la résistance thermique R_v d'une vitre seule et R_a de la couche d'air seule.
2. En déduire la résistance R_{dv} du double vitrage.
3. Expliquer, à l'aide de ces résultats, l'intérêt du double vitrage.

Réponses : 1 : $R_v = \frac{e}{\lambda_v S}$, $R_a = \frac{e}{\lambda_a S}$; 2 : $R_{dv} = R_v\left(2 + \frac{\lambda_v}{\lambda_a}\right)$

PhTr012. Chauffage d'une maison (**)

On considère une maison assimilée à une unique pièce. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $R_{th1} = 10,0 \times 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $R_{th2} = 2,0 \times 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10°\mathrm{C}$. La pièce, de capacité thermique C, dispose d'une source de chauffage de puissance constante P.

1. <u>Cas stationnaire</u> : on souhaite maintenir constante la température de la maison à $T_i = 20°\mathrm{C}$. Calculer la puissance thermique P_{eq} à apporter à la maison pour maintenir constante sa température.
2. En se plaçant dans le cadre de l'ARQS et à l'aide d'un bilan énergétique, montrer que la température de la pièce vérifie l'équation différentielle :
   $$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{P}{C} + \frac{T_e}{\tau}$$
   avec τ dont on précisera l'expression.
3. Proposer le schéma électrique équivalent au système thermique étudié et retrouver alors l'équation différentielle.

4. Pour cette dernière question, on revient au cas stationnaire. On améliore l'isolation thermique en ajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique de ce matériau afin de réduire de moitié la puissance thermique P_{eq}.

PhTr003. Résistance thermique d'une gaine cylindrique (**).

On considère une longueur l de gaine cylindrique, de section circulaire, d'épaisseur $R_2 - R_1 = e$, de conductivité thermique λ, entourant un matériau de température T_1.
La température de l'air extérieur est $T_2 < T_1$. On se place en régime permanent.

1. Définir et exprimer la résistance thermique de la longueur l de gaine. Application numérique : $l = 1,0$ m, $\lambda = 1,0\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, $R_1 = 20$ cm, $R_2 = 25$ cm.
2. On améliore l'isolation du matériau en rajoutant une gaine supplémentaire d'épaisseur e', de conductivité thermique $\lambda' = 0,050\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Quelle doit être la valeur de e' pour que les pertes thermiques soient divisées par 10 ?

Réponses : 1 -$R_{th} = \dfrac{\ln\left[\dfrac{R_2}{R_1}\right]}{2\pi\lambda l}$; 2 - $e' = R_2\left[e^{9\frac{\lambda'}{\lambda}\ln\left[\frac{R_2}{R_1}\right]} - 1\right] = 2,6$ cm

PhTr002. Sphère radioactive (**).

Une sphère radioactive de rayon a produit en son sein une puissance volumique uniforme et permanente p. On étudie la conduction thermique dans l'hypothèse où la symétrie sphérique est respectée : la température $T(M)$ dans la sphère ne dépend que de la distance r du point M au centre de la sphère. La sphère est en contact avec l'air de température constante T_e .
Les échanges thermiques par convection à la surface de la sphère sont donnés par la loi de Newton, avec un coefficient d'échange noté h, c'est à dire que le flux sortant surfacique au niveau de la surface extérieure s'exprime selon $\varphi_s = h(T_s - T_e)$, avec T_s la température à la surface de la sphère.
On note λ la conductivité thermique de la sphère.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$.
2. Déterminer $T(r)$ en fonction de r et de T_s .
3. Exprimer T_s en fonction de T_e. En déduire la température au centre de la sphère et commenter.
4. Déterminer la puissance évacuée à la surface de la sphère et proposer une vérification.

Réponses : 1 : $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{dT}{dr}r^2\right) = -\dfrac{pr^2}{\lambda}$; 2 : $T(r) = T_s + \dfrac{pa^2}{6\lambda} - \dfrac{pr^2}{6\lambda}$;
3 : $T_s = T_e + \dfrac{pa}{3h}$; $T(r=0) = T_e + \dfrac{pa}{3h} + \dfrac{pa^2}{6\lambda}$; 4 : $\Phi(r = a^+) = \dfrac{4}{3}\pi a^3 \times p$

PhTr014. Fonte de la glace (***)

On considère deux coquilles sphériques d'épaisseur négligeable de rayons respectifs $R_1 = 1,0$ cm et $R_2 = 10$ cm. Au sein de la sphère interne se trouve un mélange eau-glace à la température $T_0 = 273$ K. Entre les deux coquilles se trouve un mélange de conductivité thermique $\lambda = 0,40\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Le milieu extérieur est à la température $T_1 = 298$ K. Les échanges thermiques entre la coquille externe et l'extérieur sont caractérisés par un coefficient de fuite $h = 6,0\ \mathrm{W.m^{-2} \cdot K^{-1}}$, tel que le flux entrant surfacique sur la surface extérieure s'écrit $\varphi_s = h\left[T_1 - T(R_2)\right]$.

Déterminer la durée au bout de laquelle la masse m de glace initialement présente a totalement disparu.
Données : $m = 1,0$ g et enthalpie massique de fusion de la glace :
$L_f = 335\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Indication : on pourra commencer par déterminer la résistance équivalente de l'ensemble du dispositif.

Réponse : $\tau \approx 2,6 \times 10^2$ s

Diffusion de particules

PhTr015. Diffusion en géométrie sphérique, régime stationnaire (**)

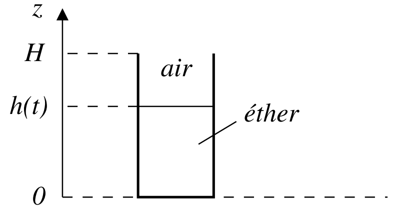
Des particules diffusent dans un milieu infini avec un coefficient D ; ces particules sont créées dans une boule de centre O et de rayon R_0 à raison de q_0 particules par unité de temps et de volume.
Le régime est stationnaire.
On suppose que le phénomène de diffusion est aussi à symétrie sphérique : tous les champs sont indépendants des coordonnées θ et φ, et tous les champs vectoriels sont dirigés radialement. On note donc $n(r,t)$ le nombre de particules par unité de volume au point M distant de r du point O.

1. Déterminer le vecteur densité de courant de particules pour $r > R_0$ puis pour $r < R_0$.
2. En déduire l'expression de $n(r)$ pour tout r (on considérera que $n(r) \to 0$ lorsque $r \to +\infty$).

Réponses : 1 : pour $r > R_0,\ j_Q(r) = \dfrac{q_0 R_0^3}{3r^2}$; pour $r < R_0,\ j_Q(r) = \dfrac{q_0 r}{3}$;
2 : pour $r > R_0,\ n(r) = \dfrac{q_0 R_0^3}{3Dr}$; pour $r < R_0,\ n(r) = \dfrac{q_0}{2D}\left(R_0^2 - \dfrac{r^2}{3}\right)$

PhTr007. Évaporation de l'éther (***).

Un bécher cylindrique contient de l'éther liquide. À l'instant initial, l'éther remplit une hauteur $h_0 = 5,0$ cm dans un bécher de hauteur $H = 10$ cm.



À l'interface $h(t)$, la pression partielle d'éther est égale à la pression de vapeur saturante à la température ambiante $T_0 = 293$ K et à la sortie du bécher, la pression partielle de l'éther est négligeable (l'éther est évacué par les mouvements de l'air) ; les vapeurs d'éther sont assimilées à un gaz parfait.

On suppose que la durée de diffusion de l'éther dans l'air est très inférieure à la durée caractéristique de l'évaporation de l'éther, on pourra donc considérer le régime quasi-permanent.

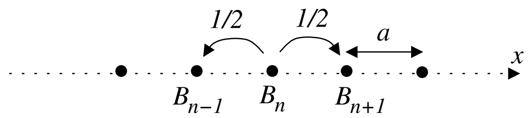
1. Dans ces conditions, montrer que la densité particulaire $n(z)$ d'éther entre l'interface $z = h(t)$ et l'extrémité $z = H$ vérifie :
$$n(z) = \frac{n_1 \times (z - H)}{h(t) - H} \quad \text{avec} \quad n_1 = \frac{P_s}{k_B T}$$
2. En déduire le flux Φ d'éther à l'interface, en notant S la section du bécher.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'éther $h(t)$ et l'intégrer.
4. En déduire la durée τ nécessaire à l'évaporation de l'éther.
5. Vérifier l'hypothèse faite du régime quasi-permanent.

Données :
Masse molaire de l'éther $M = 74,1$ g $\cdot$ mol^{-1} ;
masse volumique de l'éther : $\mu = 626$ kg $\cdot$ m^{-3} ;
coefficient de diffusion de l'éther dans l'air : $D = 1,5 \times 10^{-5}$ m$^2 \cdot$ s^{-1} ;
pression de vapeur saturante de l'éther à 293 K : $P_s = 0,58$ bar ;
$k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}.

Réponses : 2 : $\Phi = \dfrac{Dn_1 S}{H - h(t)}$; 3 : $\dfrac{\mu S \mathcal{N}_a}{M} dh = -\dfrac{Dn_1 S}{H - h(t)} dt$;
$H(h(t) - h_0) - \dfrac{h^2(t)}{2} + \dfrac{h_0^2}{2} = -\dfrac{Dn_1 M}{\mu \mathcal{N}_a} t$; 4 : $\tau = \dfrac{\mu \mathcal{N}_a h_0}{Dn_1 M}\left(H - \dfrac{h_0}{2}\right) \approx 1$ jour

PhTr029. Marche au hasard et diffusion dans les solides (**)

Un atome A se déplace à la surface d'un cristal décrit par une chaîne unidirectionnelle infinie d'atomes B_n d'abscisse $x_n = na$. L'atome met une durée τ pour sauter d'un site B_n à un site voisin B_{n-1} avec une probabilité 1/2 ou B_{n+1} avec une probabilité 1/2.



1. Soit $p(x_n, t)$ la probabilité pour A d'être en x_n à l'instant t.
Exprimer $p(x_n, t + \tau)$ en fonction de $p(x_{n-1}, t)$ et de $p(x_{n+1}, t)$.
2. Comme a est très faible devant les dimensions macroscopiques, on admet qu'on peut définir une fonction continue $g(x, t)$ telle que, pour tout n, $g(x = x_n, t) = p(x_n, t)$.
On rappelle qu'à l'ordre deux en un infiniment petit ε, on a :
$$g(x + \varepsilon) \simeq g(x) + \varepsilon g'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} g''(x)$$
En remarquant que $x_{n-1} = x_n - a$ et $x_{n+1} = x_n + a$, montrer que $p(x, t)$ est solution d'une équation analogue à l'équation de la diffusion de particules et exprimer le coefficient de diffusion D en fonction des constantes a et τ.

Réponses : 1 : $p(x_n, t + \tau) = \dfrac{1}{2} \times p(x_{n-1}, t) + \dfrac{1}{2} \times p(x_{n+1}, t)$; 2 : $D = \dfrac{a^2}{2\tau}$.

Pour aller plus loin

PhTr090. Fonte d'un glaçon (***)

Un glaçon sphérique, de centre fixe O, de rayon initial R_0 est immergé dans de l'eau liquide et fond « lentement ».
On note respectivement $\lambda = 0,6$ W $\cdot$ m^{-1}.K^{-1} la conductivité thermique du liquide, $\rho_s = 0,92$ kg $\cdot$ L^{-1} la masse volumique du solide, c la capacité thermique massique du solide, et $l_f = 333 \times 10^3$ kJ $\cdot$ kg^{-1} l'enthalpie massique de fusion de la glace.
On suppose la conductivité thermique du solide infinie, ce qui lui permet d'avoir à chaque instant une température uniforme, et la capacité calorifique massique du liquide négligeable.

Au cours de la fusion, le glaçon reste sphérique (on note $R(t)$ son rayon à l'instant t) à la température de fusion T_f et, loin du solide, le liquide conserve une température constante $T_0 > T_f$. Il n'y a pas de convection.

1. Déterminer la température $T(r,t)$ dans le liquide en fonction de r et de $R(t)$.
2. Effectuer un bilan d'énergie pour le glaçon entre les instants t et $t+dt$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $R(t)$.
3. Déterminer $R(t)$ et exprimer la durée nécessaire t_f à la fusion complète du glaçon. Application numérique.

Réponses : 1 : $\forall\ r > R(t), \quad T(r,t) = \dfrac{R(t)}{r}[T_f - T_0] + T_0$; 2 : $R(t)dR = \dfrac{\lambda(T_f - T_0)}{\rho_s \times l_f}dt$; 3 : $t_f = \dfrac{R_0^2 \rho_s l_f}{2\lambda(T_0 - T_f)}$

PhTr087. Survie dans un igloo (**)

Déterminer l'épaisseur e de glace nécessaire pour que dans un igloo de rayon $R = 1,0$ m, un être humain puisse maintenir, par la puissance $P = 50$ W qu'il dégage, une température intérieure $T_i = 10°\text{C}$ alors que la température extérieure vaut $T_e = -10°\text{C}$.
La conductivité thermique de la glace vaut : $\lambda = 0,05\ \text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.