

TD04. Phénomènes de transport.

Conduction électrique, diffusion thermique et de particules

PhTr009. Modèle de Drude (*).

- On applique la deuxième loi de Newton à un électron dont on suppose qu'il n'est soumis qu'à la force électrique et à la force de frottement fluide.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{-e\vec{E}}{m}$$

- En régime permanent, la solution de l'équation vaut : $\vec{v} = \frac{-e\tau}{m}\vec{E}$.

On en déduit le vecteur densité de courant électrique :

$$\vec{j} = n \times (-e) \times \vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} \quad \text{donc} \quad \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

- L'excitation étant sinusoïdale, on cherche une réponse sinusoïdale de la forme $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \cos(\omega t + \varphi)$; en appliquant la représentation complexe à l'équation du mouvement on en déduit :

$$im\omega\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} \Leftrightarrow \underline{\vec{v}} = \frac{-e\tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$$

C'est à dire pour le vecteur densité de courant électrique :

$$\underline{\vec{j}} = n \times (-e) \times \vec{v} \Rightarrow \underline{\vec{j}} = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$$

On en déduit $\omega_c = 1/\tau$. Cette conductivité complexe est de type « **filtre passe-bas du premier ordre** ».

Du fait de l'inertie des électrons au sein de la structure, les porteurs de charge ne peuvent plus suivre les oscillations de l'excitation électrique pour des fréquences grandes devant la **pulsation de coupure** ω_c .

Les mouvements sont donc atténus et le caractère complexe de la conductivité électrique traduit la présence d'un retard du vecteur courant vis à vis de l'excitation électrique.

PhTr039. Résistance d'un conducteur ohmique sphérique (**)

On considère un élément infinitésimal compris entre deux sphères infiniment voisines situées en r et $r + dr$; pour cet élément, on peut appliquer la formule du tronçon rectiligne avec une section $S = 4\pi r^2$ et une longueur dr :

$$\delta R_{elec} = \frac{dr}{\gamma 4\pi r^2}$$

Les différentes coquilles sphériques sont toutes parcourues par le même courant électrique et sont donc en série, on obtient la résistance électrique totale par simple intégration :

$$R_{elec} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\gamma 4\pi r^2} \Rightarrow R_{elec} = \frac{1}{4\pi\gamma} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

PhTr018. Double vitrage (*)

- Résistances thermiques :

$$\rightarrow \text{pour le verre} : R_v = \frac{e}{\lambda_v S}; \rightarrow \text{pour l'air} : R_a = \frac{e}{\lambda_a S}.$$

- Dans le cas du double vitrage, les résistances sont associées en série, on en déduit :

$$R_{dv} = 2R_v + R_a = R_v \left(2 + \frac{R_a}{R_v} \right) \quad \text{donc} \quad R_{dv} = R_v \left(2 + \frac{\lambda_v}{\lambda_a} \right)$$

- On constate que $R_{dv} \approx 10^2 R_v$. En emprisonnant une couche d'air, on augmente considérablement la résistance thermique de la vitre ce qui diminue d'autant les pertes thermiques et la nécessité de chauffage pour compenser ces pertes.

PhTr012. Chauffage d'une maison (**)

- Les résistances sont en parallèle, la résistance équivalente vaut :

$$R_{eq} = \frac{R_{th1}R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}} = 1,67 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Par définition de la résistance thermique, le flux thermique sortant vaut $\Phi = \frac{T_i - T_e}{R_{eq}}$. Pour maintenir l'intérieur de la maison à $T = T_i$, un apport thermique équivalent doit compenser les pertes thermiques :

$$P_{eq} = \frac{T_i - T_e}{R_{eq}} = \frac{10}{1,67 \times 10^{-3}} \Rightarrow P_{eq} = 6,0 \text{ kW}$$

- On applique le premier principe à la maison sur une durée dt :

$$dU = \delta Q \quad \text{avec} \quad dU = CdT$$

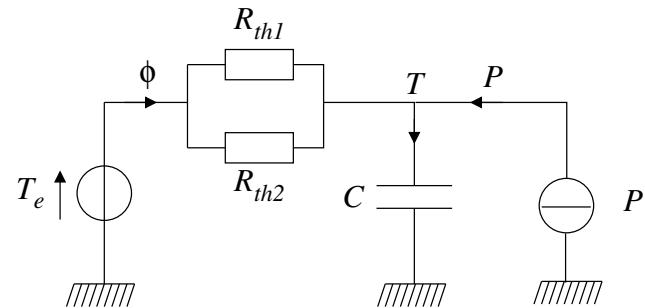
Pour les transferts thermiques, il faut tenir compte de l'apport de la source de chauffage et des pertes thermiques :

$$\rightarrow \text{apport} : \delta Q_1 = Pdt$$

\rightarrow pertes : $\delta Q_2 = -\frac{T - T_e}{R_{eq}} dt$ pour $T > T_e$, un transfert thermique est cédé par le système à l'extérieur.

$$CdT = Pdt - \frac{T - T_e}{R_{eq}} \quad \text{donc} \quad \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{eq}C} = \frac{P}{C} + \frac{T_e}{R_{eq}C}$$

3. La maison, à la température T , est assimilée à un "condensateur" de capacité thermique C , ce "condensateur" est relié via les résistances thermiques des murs et du toit à une source thermique (équivalent d'un générateur idéal de tension) à la température T_e . La puissance du système de chauffage à la dimension d'un flux thermique, il s'apparente à une source de courant susceptible de "charger le condensateur". On en déduit le schéma électrique équivalent :



On applique la loi des nœuds au niveau du condensateur :

$$C \frac{dT}{dt} = P + \Phi \quad \text{donc} \quad C \frac{dT}{dt} = P + \frac{T_e - T}{R_{eq}}$$

Ce qui redonne bien l'équation différentielle.

4. On souhaite que la nouvelle puissance $P' = P_{eq}/2$. La résistance thermique ajoutée est en série avec R_{th2} . On commence par écrire l'expression de la conductance thermique avant et après l'installation de la résistance R' :

$$\frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} = \frac{P_{eq}}{\Delta T} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2} + R'} = \frac{P'}{\Delta T} = \frac{P_{eq}}{2\Delta T}$$

On en déduit :

$$\frac{2}{R_{th2} + R'} + \frac{2}{R_{th1}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{R_{th2} + R'} = \frac{1}{R_{th2}} - \frac{1}{R_{th1}}$$

$$R' = \frac{R_{th2}(R_{th1} + R_{th2})}{R_{th1} - R_{th2}} \quad \Rightarrow \quad R' = 3,0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

PhTr003. Résistance thermique d'une gaine cylindrique (**).

1. Si on appelle Φ_0 le flux thermique sortant, et $\Delta T = T_1 - T_2$ l'écart de température entre l'intérieur et l'extérieur, la résistance thermique est définie par :

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi_0}$$

En régime permanent et en l'absence d'apports en volume, le flux thermique qui traverse un cylindre de longueur l à l'intérieur de la gaine est indépendant du rayon r du cylindre :

$$\Phi_0 = \Phi(r) = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(r) \times 2\pi rl = -\lambda \times \frac{dT}{dr} \times 2\pi rl$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé la loi de Fourier. Il reste à intégrer cette relation entre $r = R_1$ et $r = R_2$:

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 dT = -\frac{\Phi_0}{2\pi l \lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\Phi_0}{2\pi l \lambda} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\Leftrightarrow R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_0} = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Application numérique :

$$R_{th} = \frac{1,0}{2\pi \times 1,0 \times 1,0} \times \ln \left(\frac{25}{20} \right) \quad \Rightarrow \quad R_{th} = 3,6 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

2. Les résistances sont en série et s'ajoutent : $R_{th} = R_{th1} + R_{th2}$. Pour diviser les pertes par 10, il faut multiplier la résistance par 10 ce qui impose pour la nouvelle résistance $R_{th2} = 9R_{th1}$. C'est à dire en transposant la formule précédemment obtenue :

$$\frac{1}{2\pi \lambda' l} \ln \left(\frac{R_2 + e'}{R_2} \right) = \frac{9}{2\pi \lambda l} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln \left(\frac{R_2 + e'}{R_2} \right) = \frac{9\lambda'}{\lambda} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\text{C'est à dire : } e' = R_2 \left[e^{9 \frac{\lambda'}{\lambda} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} - 1 \right]$$

$$\text{A.N. : } e' = 25 \times [e^{9 \times 0,05 \times \ln(25/20)} - 1] \quad \Rightarrow \quad e' = 2,6 \text{ cm}.$$

PhTr002. Sphère radioactive (**).

1. On considère le système délimité par deux sphères de rayon r et $r + dr$. En régime permanent les apports (flux thermique en r et apports en volume) doivent compenser les pertes (flux thermique en $r + dr$), ce qui s'écrit :

$$\Phi(r)dt + p \times 4\pi r^2 dr dt = \Phi(r + dr)dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\Phi}{dr} = p \times 4\pi r^2$$

$$\text{En utilisant la loi de Fourier : } \Phi(r) = j(r) \times 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2$$

On en déduit :

$$\frac{d}{dr} \left(-\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2 \right) = p \times 4\pi r^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{dT}{dr} r^2 \right) = -\frac{pr^2}{\lambda}$$

2. Une première intégration conduit à :

$$r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{pr^3}{3\lambda} + A \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{pr}{3\lambda} + \frac{A}{r^2}$$

Une seconde intégration fournit alors :

$$T(r) = -\frac{pr^2}{6\lambda} - \frac{A}{r} + B$$

La température ne pouvant diverger à l'origine, la constante A est nécessairement nulle.

De plus, $T(r=a) = T_s = -\frac{pa^2}{6\lambda} + B$. On en déduit :

$$\forall r \in [0, a], \quad T(r) = T_s + \frac{pa^2}{6\lambda} - \frac{pr^2}{6\lambda}$$

3. Pour déterminer T_s , il faut utiliser la continuité du flux thermique à la surface de la sphère :

$$\Phi(r=a^-) = -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=a} \times 4\pi a^2 = h(T_s - T_e) \times 4\pi a^2$$

Avec $-\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=a} = -\lambda \times \left(-\frac{pr}{3\lambda} \right)_{r=a} = \frac{pa}{3}$, on en déduit :

$$\frac{pa}{3} = h(T_s - T_e) \Leftrightarrow T_s = T_e + \frac{pa}{3h}$$

On peut alors en déduire la température au centre de la sphère :

$$T(r=0) = T_e + \frac{pa}{3h} + \frac{pa^2}{6\lambda}$$

Sans surprise la température au centre est plus importante que dans l'air (réaction nucléaire au sein de la boule) et ceci d'autant plus que la puissance volumique est grande. *A contrario*, de meilleurs échanges à la surface (h plus grand), ou une meilleure diffusion au sein de la boule (λ plus grand) permettent de mieux évacuer l'énergie et de diminuer la température au centre.

4. Pour déterminer la puissance évacuée à la surface de la sphère, il est plus simple d'utiliser le transfert conducto-convectif à la surface et l'expression de la température T_s :

$$\begin{aligned} \Phi(r=a^+) &= 4\pi a^2 \varphi_s = 4\pi a^2 \times h(T_s - T_e) = 4\pi a^2 h \times \frac{pa}{3h} \\ &\Leftrightarrow \Phi(r=a^+) = \frac{4}{3}\pi a^3 \times p \end{aligned}$$

Cette puissance n'est en fait rien d'autre que la puissance fournie par les réactions radioactives au sein de la sphère, produit de la puissance volumique par le volume.

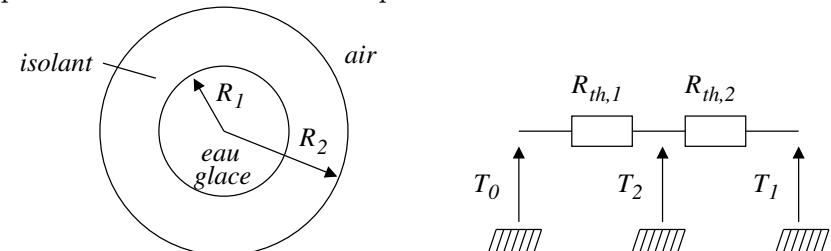
Ceci est logique : en régime permanent, l'énergie fournie doit être évacuée, sans cela le système s'échaufferait.

PhTr014. Fonte de la glace (***)

→ Présentation : tant que le mélange est diphasé, la température au sein de la sphère intérieure est bloquée à $T_0 = 273$ K ; le régime est stationnaire, la notion de résistance thermique est applicable.

Le système peut être vu comme l'association série de deux résistances thermiques en série, l'une $R_{th,1}$ associée à la coquille sphérique isolante, l'autre $R_{th,2}$ associée au transfert conducto-convectif à la surface de la sphère extérieure. Pour la suite, on pose $T_2 = T(R_2)$.

→ On peut alors définir le schéma équivalent suivant :



→ Démarche : une fois les résistances thermiques déterminées, on pourra en déduire le flux thermique entrant et donc, à l'aide d'un bilan thermique, la quantité de glace qui fond par unité de temps.

→ Détermination des résistances thermiques

Pour le transfert conducto-convectif à la surface de la sphère extérieure, la loi de Newton permet de faire apparaître aisément la notion de résistance thermique, rapport de la différence de température sur le flux thermique :

$$R_{th,2} = \frac{T_1 - T(R_2)}{\Phi} = \frac{T_1 - T(R_2)}{\varphi_s \times 4\pi R_2^2} = \frac{1}{h \times 4\pi R_2^2}$$

Pour déterminer la résistance thermique de la coquille sphérique, on procède de

la sorte :

- en régime permanent et en l'absence d'apports en volume, le flux thermique est le même à travers toute sphère centrée sur l'origine :

$$j_Q(r) \times 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2 = \Phi_0$$

- on intègre cette équation entre les deux extrémités de la coquille :

$$\int_{T(R_1)}^{T(R_2)} dT = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-\Phi_0}{4\pi\lambda} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \Delta T = T(R_2) - T(R_1) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$$

- on en déduit la résistance thermique :

$$R_{th,1} = \frac{T(R_1) - T(R_2)}{\Phi_0} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

La résistance thermique totale du dispositif est donc :

$$R_{th} = R_{th,1} + R_{th,2} = \frac{1}{h \times 4\pi R_2^2} + \frac{1}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

→ Flux entrant : connaissant la résistance thermique du dispositif, et les températures aux extrémités, on en déduit le flux entrant :

$$\Phi = \frac{T_1 - T_0}{R_{th}} = \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{h \times 4\pi R_2^2} + \frac{1}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]}$$

→ Bilan thermique : le flux d'énergie entrant contribue à faire fondre la glace ; pendant dt une énergie Φdt est fournie qui contribue à faire fondre une masse dm de glace telle que :

$$dm \times L_f = \Phi dt \quad \Rightarrow \quad m \times L_f = \Phi \times \tau$$

par intégration

Application numérique :

$$\Phi = \frac{298 - 273}{\frac{1}{6 \times 4\pi \times 0,10^2} + \frac{1}{4\pi \times 0,4} \left(\frac{1}{0,01} - \frac{1}{0,1} \right)} = 1,30 \text{ W}$$

$$\tau = \frac{1,0 \times 10^{-3} \times 335 \times 10^3}{1,30} \Rightarrow \tau \approx 2,6 \times 10^2 \text{ s}$$

PhTr015. Diffusion en géométrie sphérique, régime stationnaire (**)

- À l'extérieur de la sphère, le régime est permanent et il n'y a pas de création de particules en volume ; le flux de particules qui traverse une sphère de rayon r doit donc être le même que le flux de particules qui traverse une sphère de rayon $r + dr$, ce flux est donc indépendant de r ce qui s'écrit :

$$\Phi(r) = j_Q(r) \times 4\pi r^2 = \Phi_0$$

Les particules associées à ce flux sont produites dans la sphère de rayon R_0 ; par unité de temps $q_0 \times \frac{4}{3}\pi R_0^3$ sont produites et le même nombre doit traverser une sphère de rayon r en dehors de la sphère, sinon les particules s'accumulerait or le régime est permanent, en conséquence :

$$j_Q(r) \times 4\pi r^2 = \Phi_0 = q_0 \times \frac{4}{3}\pi R_0^3$$

Et donc :

$$\boxed{\text{pour } r > R_0, \quad j_Q(r) = \frac{q_0 R_0^3}{3r^2}}$$

À l'intérieur de la sphère, on réalise un bilan de particules sur une durée dt , entre deux sphères de rayon r et $r + dr$:

- nombre de particules qui entrent pendant dt : $\Phi(r)dt$
- nombre de particules qui sortent pendant dt : $\Phi(r + dr)dt$
- nombre de particules créées dans le volume pendant dt : $q_0 \times 4\pi r^2 dr dt$

En régime permanent, la conservation du nombre de particules entre les deux sphères impose :

$$\Phi(r)dt + q_0 \times 4\pi r^2 dr dt = \Phi(r + dr)dt$$

$$-\frac{d\Phi(r)}{dr} \times dr = -q_0 4\pi r^2 dr \Rightarrow \frac{d}{dr} (j_Q(r)4\pi r^2) dr = q_0 4\pi r^2 dr$$

$$\text{On obtient donc : } \frac{d}{dr} (j_Q(r)r^2) = q_0 r^2$$

L'intégration de l'équation différentielle conduit à :

$$r^2 j_Q(r) = \frac{q_0 r^3}{3} + A \Rightarrow j_Q(r) = \frac{q_0 r}{3} + \frac{A}{r^2}$$

Le vecteur courant ne pouvant diverger à l'origine, la constante A est nécessairement nulle.

$$\boxed{\text{pour } r < R_0, \quad j_Q(r) = \frac{q_0 r}{3}}$$

On remarque que le vecteur courant est continu pour $r = R_0$.

- Il reste à utiliser la loi de Fick pour déterminer la répartition des particules :

→ Pour $r > R_0$:

$$-D \frac{dn}{dr} = \frac{q_0 R_0^3}{3r^2} \Rightarrow \frac{dn}{dr} = -\frac{q_0 R_0^3}{3Dr^2}$$

On intègre cette équation compte tenu que $n \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$:

$$\boxed{\text{pour } r > R_0, \quad n(r) = \frac{q_0 R_0^3}{3Dr}}$$

→ Pour $r < R_0$:

$$-D \frac{dn}{dr} = \frac{q_0 r}{3} \Rightarrow \frac{dn}{dr} = -\frac{q_0 r}{3D}$$

On intègre cette équation :

$$n(r) = -\frac{q_0 r^2}{6D} + cste$$

On détermine la constante en utilisant la continuité de la densité particulaire pour $r = R_0$:

$$\frac{q_0 R_0^3}{3DR_0} = -\frac{q_0 R_0^2}{6D} + cste \quad \text{donc} \quad cste = \frac{q_0 R_0^2}{2D}$$

$$\boxed{\text{pour } r < R_0, n(r) = \frac{q_0}{2D} \left(R_0^2 - \frac{r^2}{3} \right)}$$

PhTr007. Évaporation de l'éther (***)

- En régime permanent et en l'absence d'apports en volume, le flux de particules est le même en tout point de la colonne d'air. La section étant invariante, il en est de même du vecteur courant, ce qui s'écrit, en supposant la loi de Fick vérifiée :

$$-D \frac{dn}{dz} = cste \Rightarrow n(z) = Az + B$$

On détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites : $n(h) = n_1$ et $n(H) = 0$, ce qui conduit au système d'équations :

$$0 = AH + B \quad \text{et} \quad n_1 = Ah(t) + B$$

On en déduit : $B = -AH$ et $A = n_1/(h(t) - H)$, c'est à dire :

$$\forall z \in [h(t), H], \boxed{n(z) = n_1 \times \frac{z - H}{h(t) - H}}$$

En $z = h(t)$, la loi des gaz parfaits conduit à :

$$P_{sat} = \frac{\delta n_{mol} RT}{dV} = \frac{\delta N RT}{N_a dV} = \frac{\delta N}{dV} \times \frac{R}{N_a} T = n_1 k_B T$$

- Connaissant $n(z)$ la densité particulaire, on peut en déduire le flux de particules à l'aide du vecteur courant :

$$\Phi = -D \frac{dn}{dz} \times S = -D \times \frac{n_1}{h(t) - H} \times S \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{Dn_1 S}{H - h(t)}}$$

- On trouve l'équation sur $h(t)$ en effectuant un bilan de particules sur l'éther liquide encore présent.

À l'instant t , il y a $N(t)$ particules d'éther liquide, et $N(t+dt)$ à l'instant $t+dt$, la variation étant due au flux d'évaporation, ce qui s'écrit :

$$N(t+dt) = N(t) - \Phi(t)dt \Rightarrow dN = N(t+dt) - N(t) = -\frac{Dn_1 S}{H - h(t)} dt$$

On obtient le nombre de particules sous forme liquide à l'instant t , en divisant la masse de liquide par la masse d'une particule :

$$N(t) = \frac{\mu \times S \times h(t)}{M/N_a} \Rightarrow dN = \frac{\mu S N_a}{M} dh$$

En égalisant les deux dernières expressions, on obtient l'équation différentielle portant sur $h(t)$:

$$\frac{\mu S N_a}{M} dh = -\frac{Dn_1 S}{H - h(t)} dt \Leftrightarrow [H - h(t)] dh = -\frac{Dn_1 M}{\mu N_a} dt$$

On intègre alors cette équation entre l'instant initial et un instant quelconque :

$$\int_{h_0}^{h(t)} [H - h] dh = -\frac{Dn_1 M}{\mu N_a} \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{H(h(t) - h_0) - \frac{h^2(t)}{2} + \frac{h_0^2}{2} = -\frac{Dn_1 M}{\mu N_a} t}$$

- Une fois la totalité de l'éther évaporée, $h(\tau) = 0$, l'équation précédemment obtenue conduit à :

$$-h_0 H + \frac{h_0^2}{2} = -\frac{Dn_1 M}{\mu N_a} \tau \Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{\mu N_a h_0}{Dn_1 M} \left(H - \frac{h_0}{2} \right)}$$

Application numérique :

$$\tau = \frac{626 \times 6,02 \times 10^{23} \times 5,0 \times 10^{-2} \times (0,10 - 0,025)}{1,5 \times 10^{-5} \times (0,58 \times 10^5 / (1,38 \times 10^{-23} \times 293)) \times 74,1 \times 10^{-3}}$$

$$\tau = 8,86 \times 10^4 \text{ s, soit } \boxed{\tau \approx 1 \text{ jour}}.$$

- À l'aide du coefficient de diffusion et d'une analyse dimensionnelle, on peut définir un temps caractéristique associé à la diffusion de l'éther sur une hauteur typique H :

$$D = \frac{H^2}{\tau_{diff.}} \Leftrightarrow \tau_{diff.} = \frac{H^2}{D} = \frac{0,10^2}{1,5 \times 10^{-5}} = 6,7 \times 10^2 \text{ s}$$

Le temps de mise à l'équilibre par diffusion de l'ordre de 10 minutes est court vis à vis du temps d'évolution du système de l'ordre d'une journée. L'hypothèse de l'état quasi-stationnaire est bien validée.

PhTr029. Marche au hasard et diffusion dans les solides (**)

- L'atome sautant de case en case, si l'atome est en x_n à l'instant $t + \tau$, il devait nécessairement être en x_{n-1} ou en x_{n+1} à l'instant t ; partant de x_{n-1} ou de x_{n+1} , il a une chance sur deux de sauter du bon côté, donc :

$$\boxed{p(x_n, t + \tau) = \frac{1}{2} \times p(x_{n-1}, t) + \frac{1}{2} \times p(x_{n+1}, t)}$$

2. En passant à la limite continue, la relation précédente s'écrit :

$$p(x, t + \tau) = \frac{1}{2} [p(x - a, t) + p(x + a, t)]$$

On effectue alors les développements limités indiqués :

$$\star p(x, t + \tau) \simeq p(x, t) + \tau \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\star p(x + a, t) \simeq p(x, t) + a \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\star p(x - a, t) \simeq p(x, t) - a \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

En reportant dans l'équation liant les probabilités, on en déduit que les termes en $p(x, t)$ et en $\frac{\partial p}{\partial x}$ disparaissent pour donner :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a^2}{2\tau} \times \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

On obtient une équation de diffusion avec $D = \frac{a^2}{2\tau}$.

PhTr090. Fonte d'un glaçon (***)

- Si on néglige la capacité thermique du liquide, il ne peut accumuler d'énergie thermique, en conséquence le flux d'énergie qui traverse une sphère de rayon r est le même que celui qui traverse la sphère de rayon $r + dr$. Si on appelle Φ_0 ce flux et en utilisant la loi de Fourier au sein du fluide pour lequel on néglige les phénomènes de convection :

$$\Phi_0 = \Phi(r) = 4\pi r^2 \times -\lambda \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{\Phi_0}{4\pi r^2}$$

Ce qui donne par intégration :

$$\forall r > R(t), \quad T(r, t) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda r} + A$$

Les conditions aux limites imposent $T \rightarrow T_0$ quand $r \rightarrow +\infty$ et $T(r = R^+(t)) = T_f$; ces deux conditions permettent d'en déduire les constantes Φ_0 et A , ce qui donne finalement :

$$\forall r > R(t), \quad T(r, t) = \frac{R(t)}{r} [T_f - T_0] + T_0$$

- La différence de température entre le glaçon et l'eau entraîne un flux thermique du liquide vers le glaçon. Cette énergie reçue par le glaçon le fait fondre. On évalue le flux thermique en $r = R^+(t)$ grâce à l'expression de la

température dans l'eau précédemment obtenue.

Pendant une durée dt , la masse du glaçon varie de $dm < 0$ telle que :

$$dm \times l_f = \Phi \times dt = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2 dt = -\lambda \times 4\pi r^2 \times \left(-\frac{[T_f - T_0] R(t)}{r^2} \right) dt$$

$$dm \times l_f = \lambda \times 4\pi R(t) [T_f - T_0] dt$$

La perte de masse dm est associée à une couche sphérique d'aire $4\pi R^2(t)$ et d'épaisseur dR qui disparaît donc :

$$\rho_s \times 4\pi R^2(t) dR \times l_f = \lambda \times 4\pi R(t) [T_f - T_0] dt \Leftrightarrow R(t) dR = \frac{\lambda(T_f - T_0)}{\rho_s \times l_f} dt$$

- Ceci conduit par intégration à : $R^2(t) - R_0^2 = \frac{2\lambda(T_f - T_0)}{\rho_s \times l_f} \times t$ et finalement :

$$R(t)^2 = R_0^2 - \frac{2\lambda(T_0 - T_f)}{\rho_s \times l_f} \times t$$

La fonte complète du glaçon correspond à $R(t_f) = 0$, c'est à dire :

$$t_f = \frac{R_0^2 \rho_s l_f}{2\lambda(T_0 - T_f)}$$

Avec un glaçon de 1,0 cm de rayon, et une température de 15°C, une application numérique conduit à :

$$t_f = \frac{1 \times 10^{-4} \times 0,92 \times 10^3 \times 333 \times 10^3}{0,6 \times 15} \approx 1702 \text{ s} \Rightarrow t_f \approx 1/2 \text{ h}$$

La durée apparaît quelque peu surestimée, les phénomènes de convection dans l'eau n'ont pas été pris en compte et augmentent dans une situation réelle les échanges thermiques.

PhTr087. Survie dans un igloo (**)

En régime permanent, la puissance thermique P dégagée par l'individu doit compenser les pertes dues au flux sortant Φ_0 , soit $P = \Phi_0$.

Il faut maintenant évaluer le flux sortant ou ce qui revient au même la résistance thermique de l'igloo.

Au sein de la neige compactée, l'absence d'apports en volume et le régime permanent assurent que le flux est indépendant de la distance à l'axe :

$$\Phi(r + dr) = \Phi(r) = \Phi_0$$

Le vecteur courant thermique est purement radial au sein de la neige compactée, le flux s'obtient en intégrant sur la **demi-sphère** :

$$\Phi_0 = \iint_{\Sigma} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} j_Q(r) dS = j_Q(r) \iint_{\Sigma} dS = j_Q(r) \times 2\pi r^2$$

L'application de la loi de Fourier conduit à :

$$-\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r^2 = \Phi_0 \Leftrightarrow dT = \frac{-\Phi_0}{2\pi\lambda r^2} dr$$

On intègre alors sur l'épaisseur de la neige compactée :

$$\int_{T_{int}}^{T_{ext}} dT = \int_R^{R+e} \frac{-\Phi_0}{2\pi\lambda} \times \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T_{ext} - T_{int} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \left[\frac{1}{R+e} - \frac{1}{R} \right]$$

Sachant que $\Phi_0 = P$, on en déduit finalement :

$$\frac{2\pi\lambda(T_{ext} - T_{int})}{P} = \frac{1}{R+e} - \frac{1}{R}$$

Il reste alors à isoler l'épaisseur e , avec $\Delta T = T_{int} - T_{ext}$:

$$\frac{1}{R+e} = \frac{1}{R} + \frac{2\pi\lambda \times (-\Delta T)}{P} \Leftrightarrow e = \boxed{\frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{2\pi\lambda\Delta T}{P}} - R}$$

Application numérique :

$$e = \frac{1}{\frac{1}{1,0} - \frac{2\pi \times 0,05 \times 20}{50}} - 1 \Rightarrow \boxed{e \approx 14 \text{ cm}}$$

Remarque : l'épaisseur étant relativement faible vis à vis du rayon, on peut approcher l'expression de la résistance thermique par un modèle à une dimension : $R_{th} = \frac{e}{\lambda \times 2\pi R^2}$, ce qui donne la formule simplifiée pour l'égalité du flux thermique sortant et de la puissance fournie :

$$P = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \Delta T \times \frac{\lambda \times 2\pi R^2}{e} \Leftrightarrow e = \frac{\Delta T \times 2\pi R^2 \times \lambda}{P} \approx 13 \text{ cm}$$

On constate que ce calcul approché donne un résultat très proche du calcul complet et qu'il représente donc une bonne alternative.