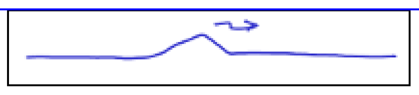
Équation de d'Alembert

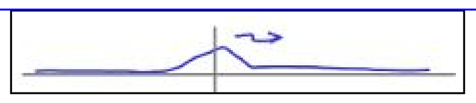
Onde progressive

Une **onde progressive** est le phénomène de propagation d'une perturbation dans l'espace.



Il y a propagation d'énergie, mais pas de matière.

Onde transversale : onde dont la perturbation est orthogonale à la direction de propagation.



Onde longitudinale : onde dont la perturbation est colinéaire à la direction de propagation.

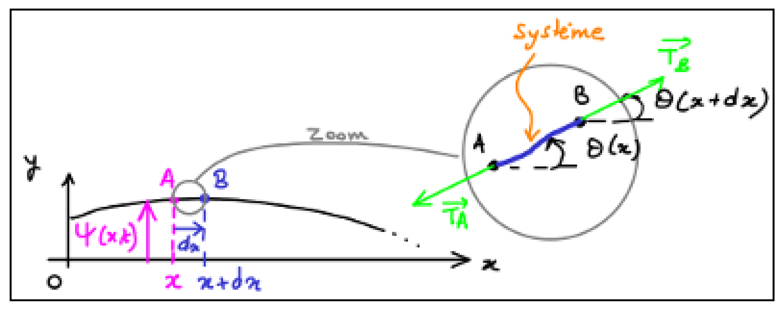
Équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\Delta\psi}$$

Équation de propagation des ondes dans une corde

Application du PFD

$$\mathrm{d}m \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -T_A\cos\theta(x) \\ -T_A\sin\theta(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_B\cos\theta(x+\mathrm{d}x) \\ T_B\sin\theta(x+\mathrm{d}x) \end{vmatrix}$$



Projection selon Ox

$$\text{À l'ordre 1 : } \cos\theta \simeq 1 \text{ soit } \boxed{T_A \simeq T_B \simeq T}$$

Tension de la corde

T

Projection selon Oy

$$\text{À l'ordre 1 : } \sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \frac{\partial\psi}{\partial x} \text{ et } \mathrm{d}m = \mu\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}\psi^2} \simeq \mu\mathrm{d}x$$

$$\mu\mathrm{d}x\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x+\mathrm{d}x) - T\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x) = T\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

Masse linéïque

μ

Équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

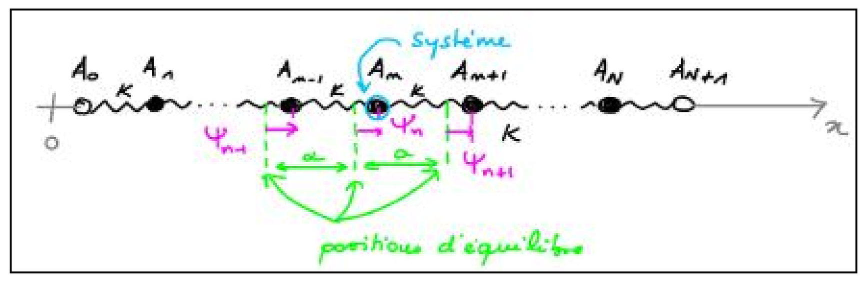
Célérité

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Équation de propagation des ondes dans une tige

Application du PFD

$$-K\,(\psi_n - \psi_{n-1}) + K\,(\psi_{n+1} - \psi_n) = m\,\ddot{\psi}_n$$



Approximation des milieux continus

$$\psi_n \leftrightarrow \psi(x,t)$$
$$a \leftrightarrow \mathrm{d}x$$

FTY

$$\psi_{n+1} - \psi_n \leftrightarrow \psi(x+\mathrm{d}x) - \psi(x) \simeq \mathrm{d}x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}x^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$
$$\psi_{n-1} - \psi_n \leftrightarrow \psi(x-\mathrm{d}x) - \psi(x) \simeq -\mathrm{d}x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}x^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

Pulsation propre

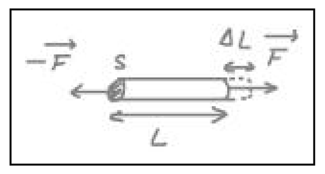
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Célérité

$$\boxed{v = \omega_0\,a}$$

Module d'Young E

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$



Lien avec le module d'Young

$$E = \frac{K}{a} \text{ soit } \boxed{v = \sqrt{\frac{\mu}{E}}}$$

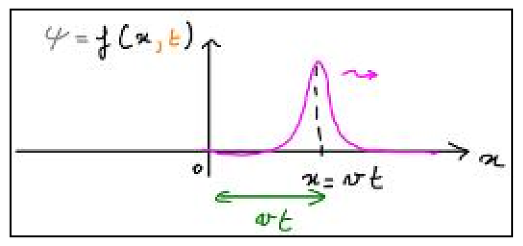
Solutions

Solution en onde progressive

$$\boxed{\psi = f(x - vt) + g(x + vt)}$$

Onde se propageant vers les x croissants

$$f(x - vt)$$



Onde se propageant vers les x décroissants

$$g(x + vt)$$

Onde progressive **harmonique** se propageant vers les x croissants

$$\boxed{\psi = A\cos(\omega t - kx + \varphi)}$$

Pulsation

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

Nombre d'onde

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma}$$

Représentation complexe

$$\boxed{\underline{\psi} = A\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{A}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}}$$

Vitesse de phase

$$\phi = \omega t - kx + \varphi \text{ ne varie pas si } \mathrm{d}\phi = \omega\mathrm{d}t - k\mathrm{d}x = 0 \text{ soit } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = v_\phi$$

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k}}$$

Relation de dispersion

$$\psi = A\cos(\omega t - kx + \varphi) \text{ sera solution de } \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \text{ si } k^2\psi = \frac{1}{v^2}\omega^2$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

Solution en onde stationnaire

$$\boxed{\psi = F(x)\cdot G(x)}$$

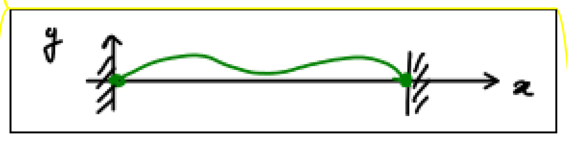
Forme de la solution dans un milieu régi par l'équation de d'Alembert

$$\psi = F(x)\cdot G(x) \text{ sera solution de } \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \text{ si :}$$

$$\boxed{\psi = A\cos(kx + \varphi_x)\cdot\cos(\omega t + \varphi_t)}$$

Exemples

Corde de Guitare



Conditions aux limites

$$\psi(0,t) = 0 \text{ et } \psi(L,t) = 0$$

Solution en onde stationnaire

$$\psi(x,t) = -A\ \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{v}{L}t + \varphi_t\right)$$

On obtient un ensemble discret de solutions appelées **modes propres** de vibration.

$$\psi_n(x,t) = -A_n\ \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{v}{L}t + \varphi_{tn}\right)$$

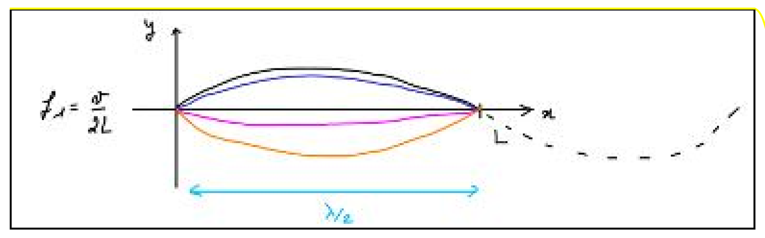
Le mouvement général peut s'écrire comme une superposition de ces modes propres.

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x,t)$$

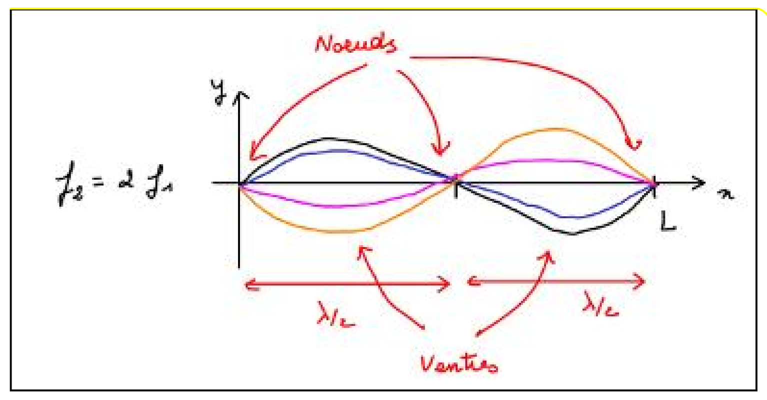
Caractéristiques de ces modes propres

$$\boxed{f_n = n\frac{v}{2L}} \text{ et alors } \boxed{L = n\frac{\lambda}{2}}$$

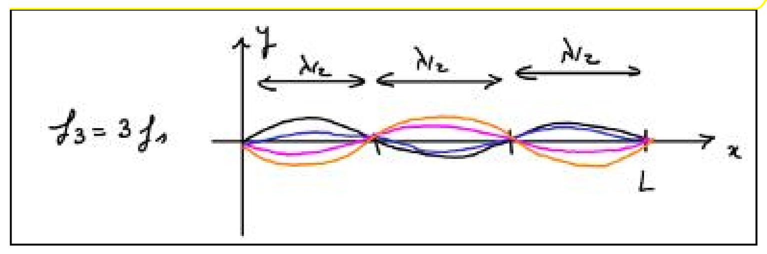
n=1



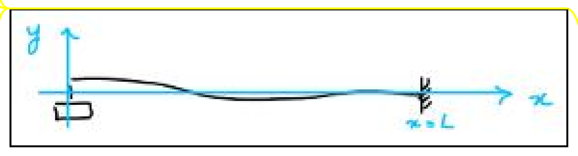
n=2



n=3



Corde de Melde



Conditions aux limites

$$\psi(0,t) = a\cos(\omega t) \text{ et } \psi(L,t) = 0$$

Solution en onde stationnaire

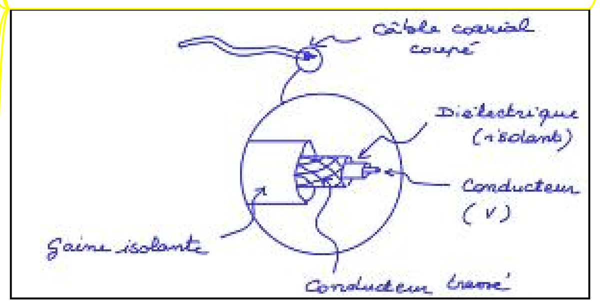
$$\psi(x,t) = -\frac{a}{\sin(kL)}\sin(k(x - L))\cos(\omega t)$$

Phénomène de résonance

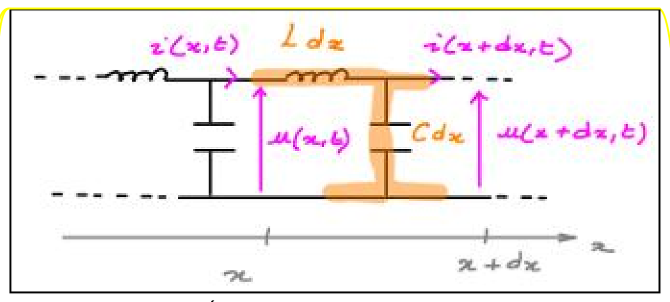
$$A \to +\infty \text{ si } \sin(kL) \to 0$$

$$\boxed{f_n \to n\frac{v}{2L}} \text{ et alors } \boxed{L \to n\frac{\lambda}{2}}$$

Câble coaxial



Modélisation



Inductance linéique

L

Capacité linéïque

L

Équations électriques

$$\text{LDM : } u(x+\mathrm{d}x,t) = u(x,t) - L\mathrm{d}x\frac{\partial i}{\partial t}$$
$$\text{LDN : } i(x+\mathrm{d}x,t) = i(x,t) - C\mathrm{d}x\frac{\partial u}{\partial t}$$

À l'ordre 1

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t}} \to \frac{\partial}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial t}$$
$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial u}{\partial t}} \to \frac{\partial}{\partial t} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial x}$$

Découplage

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$
$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}}$$

Célérité

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \simeq 1,8\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Relation de dispersion

$$\underline{u} = \underline{U}_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} \text{ est solution de } \frac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2} = v^2\ \frac{\partial^2\underline{u}}{\partial x^2} \text{ si :}$$

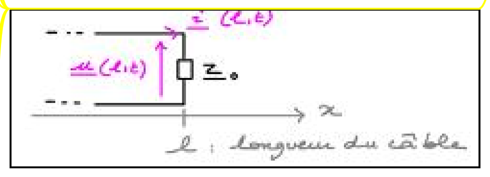
$$\boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

Impédance caractéristique

$$\underline{u} = \underline{U}_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} \text{ est lié à } \underline{i} = \underline{I}_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} \text{ par } \frac{\partial u}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} \text{ soit } -jk\underline{u} = -jL\omega\underline{i}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{L\omega}{k} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_c} \simeq 50\ \Omega$$

Coefficients de réflexion



Forme des ondes

$$\underline{u} = \underline{U}_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} + \underline{U'}_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t + kx)}$$
$$\underline{i} = \underline{I}_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} + \underline{I'}_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t + kx)}$$

Conditions aux limites

$$\underline{u}(\ell,t) = \underline{Z}_0\ \underline{i}(\ell,t)$$

Coefficients de réflexion en amplitude

$$\underline{r}_i = \frac{\underline{i}_r(\ell,t)}{\underline{i}_i(\ell,t)} = \frac{Z_c - \underline{Z}_0}{Z_c + \underline{Z}_0}$$
$$\underline{r}_u = \frac{\underline{u}_r(\ell,t)}{\underline{u}_i(\ell,t)} = -\underline{r}_i$$

L'onde incidente est entièrement réfléchie si :

$$\underline{Z}_0 = 0 \text{ (court-circuit) ou si } \underline{Z}_0 \to \infty \text{ (circuit ouvert) car alors } \boxed{\underline{r}_i = -\underline{r}_u = 1}$$

L'onde incidente est entièrement absorbée si :

$$\underline{Z}_0 = Z_c \text{ (adaptation d'impédance) car alors } \boxed{\underline{r}_i = -\underline{r}_u = 0}$$