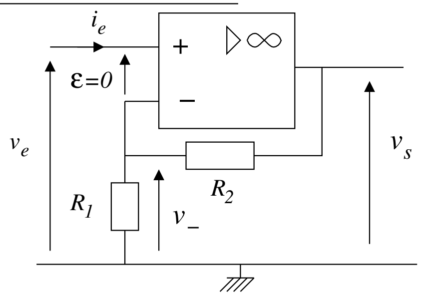
Lycée Naval, Spé 2.

TD02 : Oscillateurs (correction)

Elec045. Choix d'une chaîne retour (*).

1. Montage amplificateur non inverseur :



Dans le cas d'un amplificateur idéal fonctionnant en régime linéaire $v_+ = v_-$, en appliquant la formule du pont diviseur de tension, on en déduit :

$$v_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

2. La condition d'oscillations sinusoïdales s'écrit $\underline{H}(j\omega_0) \times \underline{K}(j\omega_0) = 1$. La transmittance de la chaîne directe étant réelle, celle de la chaîne retour doit l'être aussi. D'après le diagramme de Bode pour la phase :

$$\varphi(\underline{K}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_0 = 4,0 \text{ kHz}}$$

Pour cette fréquence, $|\underline{K}|_{dB}(f_0) \approx -15$ dB ; la chaîne directe doit posséder un gain qui compense cet affaiblissement, c'est à dire :

$$20 \log \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = 10^{3/4} - 1 \quad \text{donc} \quad R_2 \approx 4,6\ R_1$$

On peut donc retenir pour les résistances $\boxed{R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega}$ et $\boxed{R_2 = 4,6 \text{ k}\Omega}$, le mieux étant de choisir une résistance variable pour R_2 entre 0 et 10 kΩ pour ajuster précisément la condition d'oscillations.

Elec047. Oscillateur à résistance négative (**).

1. La loi d'additivité des tensions s'écrit : $\boxed{v = R_1 i + v_s}$ $(i_+ = 0)$.
Pour l'ALI idéal en régime linéaire, $v_+ = v_-$, la formule du pont diviseur de tension donne :

$$\boxed{v = \frac{R_3}{R_3 + R_2} v_s}$$

2. On élimine v_s du système d'équations :

$$v = R_1 i + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) v \quad \Rightarrow \quad 0 = R_1 i + \frac{R_2}{R_3} v \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{R_3 R_1}{R_2} \times i$$

La caractéristique du dipôle fait apparaître une **relation linéaire** entre la tension et l'intensité, le dipôle se comporte donc bien comme un conducteur ohmique de résistance $-R'$ avec $\boxed{R' = R_3 R_1 / R_2}$.

3. La loi d'additivité des tensions s'écrit : $v_c + u_1 = v$:
→ caractéristique de la résistance négative : $v = -R'i$
→ caractéristique de la bobine (convention générateur) : $u_1 = -ri - L\dfrac{di}{di}$

$$v_c - ri - L\frac{di}{dt} = -R'i \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} - r\frac{di}{dt} - L\frac{d^2 i}{dt^2} = -R'\frac{di}{dt}$$

Enfin $i = -C\dfrac{dv_c}{dt}$ (convention générateur), on en déduit :

$$-\frac{i}{C} - r\frac{di}{dt} - L\frac{d^2 i}{dt^2} = -R'\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L\frac{d^2 i}{dt^2} + (r - R')\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0}$$

4. Pour obtenir des oscillations harmoniques, le terme associé à la dérivée première doit être nulle : $\boxed{R' = r}$.
En pratique, il faut imposer R' légèrement supérieur à r pour lancer les oscillations.

L'amplitude des oscillations est limitée par la saturation en sortie de l'ALI.

Elec051. Oscillateur de Hartley (**)

Étude du filtre

1. **Étude des cas limites** :
→ basse fréquence : la bobine se comporte comme un fil, $u_s \to 0$;
→ haute fréquence : le condensateur se comporte comme un fil, $v_A \to 0$, donc $u_s = v_A/2 \to 0$ (pont diviseur de tension)
Ces résultats sont compatibles avec l'hypothèse d'un **filtre passe-bande**.

2. Commençons par déterminer le module de la fonction de transfert :

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(u - \dfrac{1}{u}\right)^2}} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

G est maximal pour $u = 1$, avec $G_{max} = 1/2$ donc :
$G_{dB}^{max} = -20 \log(2) = -6,02$ dB en accord avec la valeur du graphe.

À haute fréquence, $G \sim_\infty \dfrac{1}{2Qu}$, donc $G_{dB} \approx -20 \log(2Q) - 20 \log(u)$

C'est à dire une pente de -20 dB/dec.

<u>À basse fréquence</u>, $G \sim_0 \dfrac{u}{2Q}$, donc $G_{dB} \approx -20\log(2Q) + 20\log(u)$

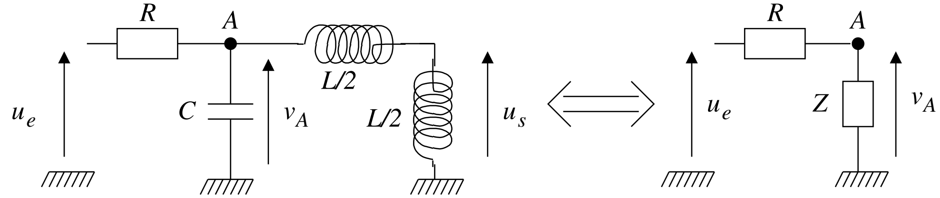
C'est à dire une pente de $+20$ dB/dec.

Les deux asymptotes se coupent pour $u = 1$, avec :
$G_{dB} = -20\log(2Q) = -12,04$, c'est à dire $\boxed{Q = 2}$.

<u>Étude de l'oscillateur</u>

1. La chaîne retour est un amplificateur avec pour fonction de transfert :
$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}'_s} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$
La fonction de transfert de la chaîne retour étant réelle, il doit en être de même de la chaîne directe pour vérifier la condition de Berkhausen.
La pulsation d'oscillation est donc nécessairement ω_0, le gain du filtre étant alors de $1/2$, il faut un gain de 2 sur la chaîne retour et donc un rapport $\boxed{R_2/R_1 = 1}$ (en pratique très légèrement supérieur pour assurer l'installation des oscillations).
2. Partant des fonctions de transfert, on obtient l'équation différentielle :
$$2\underline{u}_s\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = \underline{u}_e = \underline{u}'_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\underline{u}_s$$
On multiplie alors cette expression par $j\omega\omega_0$:
$$2\omega_0 \times j\omega\underline{u}_s - 2Q\omega^2\underline{u}_s + 2\omega_0^2 Q\underline{u}_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\omega_0 \times j\omega\underline{u}_s$$
On revient alors dans l'espace temporel pour obtenir l'équation différentielle :
$$\boxed{\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = 0}$$
On retrouve alors bien l'équation d'un oscillateur harmonique à la pulsation ω_0^2 pour $R_2 = R_1$, en pratique il faut R_2 légèrement supérieur à R_1 pour que le coefficient de la dérivée première soit négatif et le système instable.

<u>Fonction de transfert du filtre</u> :
On commence par appliquer la formule du pont diviseur de tension au niveau des impédances terminales :
$$\underline{u}_s = \frac{jL/2\omega}{jL/2\omega + jL/2\omega}\underline{v}_A = \frac{\underline{v}_A}{2}$$
On détermine ensuite l'impédance équivalente constituée des deux bobines et du condensateur en parallèle :



$$\underline{Z} = \frac{\dfrac{1}{jC\omega} \times jL\omega}{jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

On peut alors appliquer la formule du pont diviseur de tension sur le montage équivalent :
$$\underline{v}_A = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}}\underline{u}_e = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\underline{Z}}}\underline{u}_e \quad \Rightarrow \quad \underline{u}_s = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \dfrac{R\left(1 - LC\omega^2\right)}{jL\omega}}\underline{u}_e$$
$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + jRC\omega - j\dfrac{R}{L\omega}}$$
Avec $\dfrac{Q}{\omega_0} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \times \sqrt{LC} = RC$ et $Q\omega_0 = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \times \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{R}{L}$, ce qui correspond bien à la relation proposée dans l'énoncé.

Elec100. Oscillateur quasi-sinusoïdal à multiplieur (**)

1. Les résistances d'entrée du multiplieur étant infinies, les entrées du multiplieur ne prélèvent aucun courant. La loi des mailles conduit à :
$$u_s = ri + L\frac{di}{dt} + Ri + u_c \quad \text{avec} \quad u_s = k \times Ri \times E \quad \text{et} \quad i = C\frac{du_c}{dt}$$
En dérivant l'équation différentielle, on en déduit :
$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{r + R - kRE}{L}\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \times i = 0}$$
Pour obtenir un oscillateur sinusoïdal, il faut impose $r + R - kRE = 0$, c'est à dire :
$$\boxed{E_{th} = \frac{r + R}{kR}}$$
Avec une fréquence d'oscillation : $\boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi} \times \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.
2. La tension de sortie sature à la tension de saturation du multiplieur $\boxed{u_{sm} = V_{sat} = 14,6\text{ V}}$.

En supposant le régime quasi-sinusoïdal à la pulsation ω_0, on applique un pont diviseur de tension (avec $jL\omega_0 + 1/(jC\omega_0) = 0$) :

$$\frac{\underline{u}_c}{\underline{u}_s} = \frac{1/(jC\omega_0)}{r + R + jL\omega_0 + 1/(jC\omega_0)} = \frac{1}{jC\omega_0(r+R)}$$

Ce qui impose :

$$\boxed{u_{cm} = \frac{1}{2\pi f_0 \times C \times (r+R)} u_{sm}}$$

Application numérique :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{0,100 \times 1,0 \times 10^{-6}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_0 = 5,0 \times 10^2 \text{ Hz}}$$

$$u_{cm} = \frac{14,6}{2\pi \times 503 \times 1,0 \times 10^{-6} \times 1,1 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{cm} = 4,2 \text{ V}}$$

Elec099. Circuit oscillant (**)

1. En considérant pour l'instant un régime forcé, on applique un pont diviseur de tension au niveau de l'entrée inverseuse :

$$\underline{V}_- = \frac{\underline{V}_s}{1 + jRC\omega}$$

Ce qui donne pour un régime temporel quelconque :

$$\boxed{V_- + RC\frac{dV_-}{dt} = V_s}$$

2. L'énoncé indique que le régime est périodique et que l'amplificateur fonctionne en régime de saturation.
La tension de sortie est donc nécessairement une tension créneau symétrique d'amplitude V_{sat}.

⋆ Supposons que $V_s = +V_{sat}$, l'équation devient :

$$V_- + RC\frac{dV_-}{dt} = V_{sat}$$

On reconnaît l'équation différentielle associée à la charge d'un condensateur dans un circuit RC sous la tension $+V_{sat}$. La tension V_- suit donc une évolution croissante qui correspond à une portion d'exponentielle.

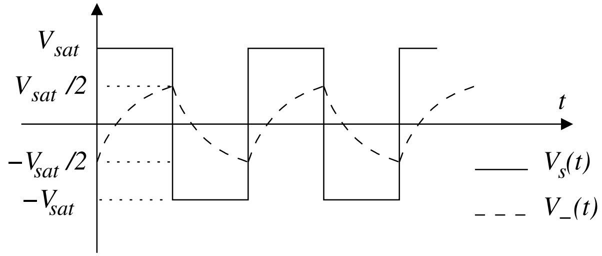
Comme $V_+ = \dfrac{V_{sat}}{2}$ (pont diviseur de tension), la tension de sortie bascule à $-V_{sat}$ lorsque V_- atteint $V_{sat}/2$.

⋆ La tension de sortie vaut alors : $V_s = -V_{sat}$ (et $V_+ = -V_{sat}/2$), donc :

$$V_- + RC\frac{dV_-}{dt} = -V_{sat}$$

Le condensateur se décharge selon une portion d'exponentielle jusqu'à atteindre la tension $-V_{sat}/2$.

En conclusion, la tension V_- est une tension périodique composée de portions d'exponentielles successivement croissante et décroissante.



3. Partons d'une situation initiale pour laquelle $V_-(t=0) = -V_{sat}/2$; lors de la phase de croissance :

$$V_-(t) = V_{sat} + Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

La condition initiale impose : $V_-(t) = V_{sat} - \dfrac{3V_{sat}}{2}e^{-t/\tau}$, et le basculement a lieu à l'instant t_1 tel que :

$$V_-(t_1) = \frac{V_{sat}}{2} = V_{sat} - \frac{3V_{sat}}{2}e^{-t_1/\tau} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \tau \ln(3)$$

La période du phénomène correspond à deux fois cette durée, c'est à dire :

$$\boxed{T = 2RC\ln(3)} \quad \Rightarrow \quad T = 2 \times 10^5 \times 10^{-6}\ln(3) \quad \boxed{T = 0,22 \text{ s}}$$

Elec067. Générateur de signaux carrés commandé en tension

1. Cherchons à établir une équation différentielle sur u_e dans le cas d'un fonction linéaire pour l'ALI supposé idéal. On commence par appliquer un pont diviseur de tension au niveau de l'entrée non inverseuse :

$$u_e = v_- = v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2}u_s$$

D'autre part :

$$i = C_0\frac{d}{dt}(u_e - s) \quad \text{avec} \quad s = k \times e \times u_e$$

On a enfin : $i = (u_s - u_e)/R$. En combinant ces différentes relations, on en déduit :

$$i = C_0\frac{d}{dt}(u_e - keu_e) \quad \text{et} \quad i = \frac{u_s - u_e}{R} = \frac{u_e}{R}\left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - 1\right] = \frac{R_1}{R_2} \times \frac{u_e}{R}$$

C'est à dire :

$$\frac{R_1}{RR_2}u_e = -C_0(ke-1)\frac{du_e}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{u_e + \frac{RR_2}{R_1}C_0(ke-1)\frac{du_e}{dt} = 0}$$

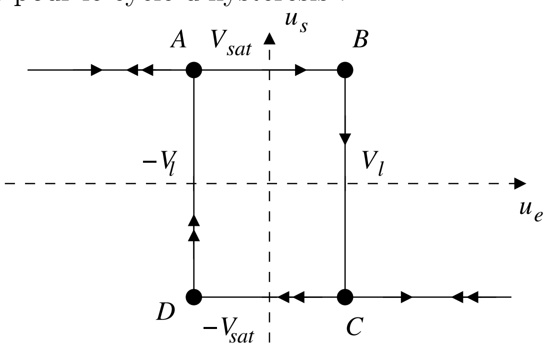
Pour $ke < 1$, les coefficients de l'équation différentielle sont de signe différent et le système est instable.

La solution diverge vers un régime de saturation, l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire est donc réfutée.

2. L'ALI fonctionne en régime de saturation, on est en présence d'un montage à hystérésis. On pose $V_l = \dfrac{R_2}{R_2+R_1}V_{sat}$. La formule du pont diviseur de tension appliquée à l'entrée non inverseuse conduit à :
$$v_+ = \frac{R_2}{R_2+R_1}u_s$$
— hypothèse $u_s = +V_{sat}$: $v_+ = V_l$, à condition que $v_+ > v_-$, c'est à dire $V_l > u_e$;
conclusion : $u_s = +V_{sat}$ tant que $u_e < V_l$

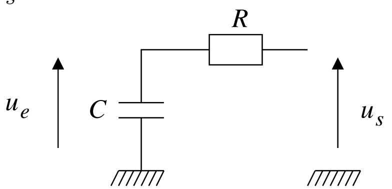
— hypothèse $u_s = -V_{sat}$: $v_+ = -V_l$, à condition que $v_+ < v_-$, c'est à dire $-V_l < u_e$;
conclusion : $u_s = -V_{sat}$ tant que $u_e > -V_l$

Ce qui donne pour le cycle d'hystérésis :



3. À la première question, on a obtenu la relation :
$$i = C_0(1-ke)\frac{du_e}{dt}$$
Cette relation en convention récepteur est bien équivalente à la présence d'un condensateur de capacité $\boxed{C = C_0(1-ke)}$ à condition que $\boxed{ke_{max} < 1}$.

4. La partie supérieure du montage se ramène à un circuit équivalent RC soumis à une tension u_s :



Le système va parcourir le cycle $ABCD$.

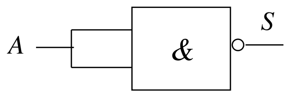
Partons du point A pour lequel $u_e = -V_l$ et $u_s = +V_{sat}$. L'équation différentielle vérifiée par u_e est l'équation classique d'un montage RC série :
$$\frac{du_e}{dt} + \frac{u_e}{\tau} = \frac{V_{sat}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$
La solution de cette équation est de la forme :
$$u_s(t) = V_{sat} + Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad u_e(0) = -V_l = V_{sat} + A$$
C'est à dire : $u_e(t) = V_{sat} - (V_l + V_{sat})\, e^{-t/\tau}$. Cette charge se poursuit non pas jusqu'à $+V_{sat}$ mais jusqu'à V_l (point B du cycle), c'est à dire au bout d'une durée t_1 telle que :
$$V_l = V_{sat} - (V_l + V_{sat})\, e^{-t_1/\tau} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \tau \ln\left(\frac{V_l + V_{sat}}{V_{sat} - V_l}\right)$$
Le système bascule au point C et on observe une décharge exponentielle de même durée jusqu'au point D du cycle, ce qui donne pour la période du signal :
$$T = 2RC \ln\left(\frac{V_l + V_{sat}}{V_{sat} - V_l}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2RC \times \ln\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)}$$

Application numérique :

e (V)	0	9	-9
T (ms)	1,1	0,11	2,1

Elec049. Oscillateurs à porte logique (***)

1. Réalisation de l'inverseur logique :

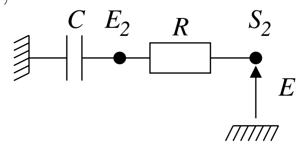


A	S
0	*1*
1	*0*

Pour $A = 0$, $A_1 = A_2 = 0$, $\Rightarrow S = 1$; Pour $A = 1$, $A_1 = A_2 = 1$, $\Rightarrow S = 0$.
On réalise ainsi la fonction inverseur logique.

2. Phase d'initialisation

(a) La sortie S_1 est dans l'état bas, $v_{s1} = 0$; le courant issu du condensateur s'écoule dans la résistance R (résistance d'entrée infinie de la porte) ; l'extrémité de la résistance est reliée à la sortie de la seconde porte dans l'état haut $v_{s2} = E$, c'est à dire :



(b) Le schéma est équivalent à celui d'un circuit RC série soumis à une tension E. La tension du condensateur vérifie :
$$\tau\frac{du_c}{dt}+u_c=E \quad \text{avec} \quad u_c(0)=0$$
Compte tenu de la condition initiale, la solution est :
$$\boxed{u_c(t)=E\left(1-e^{t/\tau}\right)}$$

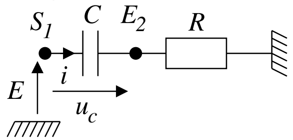
(c) Durant cette phase : $u_c(t)=v_{e2}(t)-v_{s1}=v_{e2}(t)$.
Cette première phase prend fin pour $\boxed{u_c=V_b}$ associé au basculement de la porte 2.

3. <u>Première phase : décharge du condensateur</u>

(a) Le basculement de la porte 2 entraîne $\boxed{v_{s2}=0}$, donc $\boxed{v_{e1}=0}$, ce qui entraîne le basculement de la porte 1 et $\boxed{v_{s1}=E}$. En l'absence de nouveau basculement ces trois valeurs sont imposées.

En revanche v_{e2} n'est pas fixée et doit seulement vérifier $v_{e2}\geq V_b$. La tension aux bornes du condensateur étant continue, $u_c(0^+)=u_c(0^-)=V_b$; or $v_{e2}=v_{s1}+u_c$ donc $\boxed{v_{e2}(0^+)=E+V_b}$.

(b) Durant cette première phase $v_{s1}=E$ et $v_{s2}=0$, aucun courant n'entrant dans la porte, le montage équivalent est :



(c) La loi d'additivité des tensions donne : $E=-u_c+Ri$ avec $i=-C\dfrac{du_c}{dt}$ (convention générateur) :
$$\tau\frac{du_c}{dt}+u_c=-E \quad \text{avec} \quad u_c(0^+)=V_b$$
La solution est de la forme : $u_c(t)=-E+Ae^{-t/\tau}$ avec, compte tenu de la condition initiale, $V_b=-E+A$, donc :
$$\boxed{u_c(t)=-E+(E+V_b)e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad v_{e2}(t)=(E+V_b)e^{-t/\tau}}$$
L'expression de v_{e2} est obtenue sachant que $v_{e2}(t)=u_c(t)+v_{s1}=u_c(t)+E$.

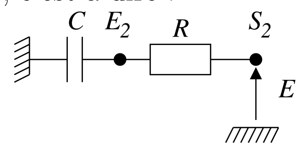
(d) Lors de cette phase, partant de $E+V_b$ le potentiel de E_2 diminue jusqu'à atteindre la valeur de basculement V_b, ce qui impose :
$$V_b=(E+V_b)e^{-t_1/\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_1=\tau\ln\left(\frac{E+V_b}{V_b}\right)}$$

4. <u>Seconde phase : charge du condensateur</u>

(a) Le basculement de la porte 2 entraîne $\boxed{v_{s2}=E}$, donc $\boxed{v_{e1}=E}$, ce qui entraîne le basculement de la porte 1 et $\boxed{v_{s1}=0}$. En l'absence de nouveau basculement ces trois valeurs sont imposées.

En revanche v_{e2} n'est pas fixée et doit seulement vérifier $v_{e2}<V_b$. La tension aux bornes du condensateur étant continue, $u_c(0^+)=u_c(0^-)=v_{e2}(0^-)-v_{s1}(0^-)=V_b-E$; or $v_{e2}(0^+)=v_{s1}(0^+)+u_c(0^+)$ donc $\boxed{v_{e2}(0^+)=V_b-E}$.

(b) La sortie S_1 est dans l'état bas, $v_{s1}=0$; le courant issu du condensateur s'écoule dans la résistance R (résistance d'entrée infinie de la porte) ; l'extrémité de la résistance est reliée à la sortie de la seconde porte dans l'état haut $v_{s2}=E$, c'est à dire :



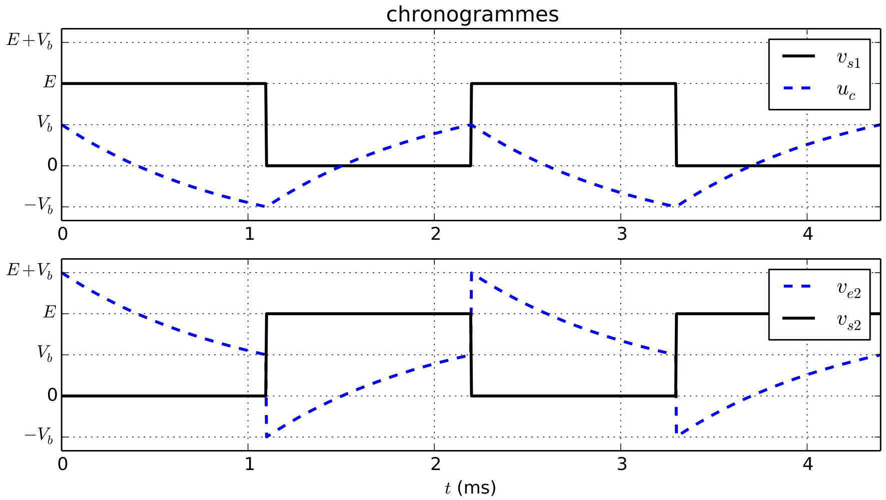
(c) Le montage est le montage classique de la charge d'un condensateur au sein d'un circuit RC :
$$\tau\frac{du_c}{dt}+u_c=E \quad \text{avec} \quad u_c(0^+)=V_b-E$$
En tenant compte de la condition initiale, on obtient :
$$\boxed{u_c(t)=E+(V_b-2E)e^{-t/\tau}}$$
De plus $v_{e2}(t)=u_c(t)$ car $v_{s1}=0$ durant cette phase.

(d) Le condensateur se charge jusqu'à ce que $v_{e2}=u_c=V_b$:
$$V_b=E+(V_b-2E)e^{-t_2/\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_2=\tau\ln\left(\frac{2E-V_b}{E-V_b}\right)}$$

5. Suite à ce basculement, le système se retrouve dans un état identique à celui de la première phase, le système va donc osciller avec une succession de charges et de décharges du condensateur entraînant le basculement des portes.

La période T est la somme des deux durées précédemment calculées :
$$T=t_1+t_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T=RC\ln\left(\frac{2E-V_B}{E-V_B}\times\frac{E+V_B}{V_B}\right)}$$

6. Avec $V_b=E/2$, $\tau=1,0$ ms, $t_1=t_2=\tau\ln 3$:


chronogrammes
$E+V_b$
E
V_b
0
$-V_b$
v_{s1}
u_c
v_{e2}
v_{s2}
0
1
2
3
4
t (ms)