Lycée Naval, Spé 2.
Physique des ondes.
01.2 - Ondes sonores dans les fluides.
03.1 - Interface entre deux milieux. Cas des ondes sonores.

Ondes sonores dans les fluides

L'expérience montre que les ondes sonores sont des vibrations longitudinales de faible amplitude du milieu matériel dans lequel elles se propagent à la célérité c_s sans dispersion. Dans ce chapitre, nous allons mettre en équation ces principaux résultats.

1 Mise en équations

1.1 Système d'équations

Localement, la présence d'une surpression met le fluide en mouvement engendrant une variation de la masse volumique ce qui modifie la pression et ainsi de suite. *A priori*, il faut donc prendre en compte 6 inconnues scalaires : $\vec{v}$, P, μ et T.

Pour résoudre ce problème, il faut considérer :

⋆ une équation mécanique : PFD appliqué à une tranche de fluide ;
⋆ une équation cinématique : équation de conservation de la masse ;
⋆ une équation thermodynamique : équation tenant compte des échanges thermiques ;
⋆ une équation d'état : $f(P,\mu,T)=0$ caractérisant le fluide.

Dans le cas général, ce système de 6 équations couplées et non linéaires est complexe à résoudre. Nous allons faire des hypothèses simplificatrices en accord avec l'expérience.

1.2 Hypothèses simplificatrices

→ L'expérience montre que la propagation des ondes sonores est caractérisée par un faible amortissement au sein du fluide.

⋆ On se place donc dans l'hypothèse du **fluide parfait** pour lequel l'évolution du fluide est supposée **isentropique**.

→ L'onde sonore correspond à une faible perturbation par rapport à l'équilibre.

⋆ Très généralement, la masse volumique $\mu(M,t)$, la pression $P(M,t)$ et le vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ au sein du fluide peuvent s'écrire :

$$\boxed{\mu(M,t)=\mu_0+\mu_1(M,t) \qquad P(M,t)=P_0+P_1(M,t) \qquad \vec{v}(M,t)=\vec{v}_1(M,t)}$$

μ_0 et P_0 désignant la masse volumique et la pression du fluide au repos.

L'**approximation acoustique** consiste à traiter le problème dans une approximation linéaire en supposant $\mu_1 \ll \mu_0$, $P_1 \ll P_0$, et $v_1 \ll c_s$.

1.3 Linéarisation des expressions

On simplifie les équations en ne conservant que les termes d'ordre 1 en μ_1, P_1, $\vec{v}_1$ et leurs dérivées.

Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\mu\vec{v})=0$$

C'est à dire, dans le cas d'un développement à l'ordre 1 :

$$0=\frac{\partial\left(\mu_0+\mu_1\right)}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\left[\mu_0+\mu_1\right]\vec{v}_1\right)=\frac{\partial \mu_1}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\mu_0\vec{v}_1\right)=\frac{\partial \mu_1}{\partial t}+\mu_0\mathrm{div}\left(\vec{v}_1\right)$$

$$\boxed{0=\frac{\partial \mu_1}{\partial t}+\mu_0\mathrm{div}\vec{v}_1}$$

Principe fondamental de la dynamique

En négligeant les effets de la pesanteur, on applique le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide de volume $d\tau$ soumise à la résultante des forces de pression :

$$\mu d\tau\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}P d\tau \quad\Rightarrow\quad \mu\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}P_1$$

avec $\mu\dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}=\mu_0\dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}+\mu_1\dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\simeq\mu_0\dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$ à l'ordre 1 ; par conséquent :

$$\boxed{\mu_0\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}P_1}$$

Remarque : expression de l'accélération.

Pour $v_1(x,t)$, $dv_1=\dfrac{\partial v_1}{\partial t}dt+\dfrac{\partial v_1}{\partial x}dx$, donc $\dfrac{dv_1}{dt}=\dfrac{\partial v_1}{\partial t}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial v_1}{\partial t}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x}v_1$

Approximer $\dfrac{dv_1}{dt}$ par $\dfrac{\partial v_1}{\partial t}$ revient à négliger le terme d'ordre 2 : $\dfrac{\partial v_1}{\partial x}v_1$. Plus précisément en considérant une onde de la forme $v_1(x,t)=U\cos\left(\omega t-kx\right)$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} \sim \omega U \quad \text{et} \quad v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \sim kU^2$$

$kU^2 \ll \omega U$ impose $\frac{2\pi}{\lambda}U^2 \ll \frac{2\pi}{T}U$ soit $U \ll \frac{\lambda}{T} = c_s$.

L'approximation acoustique revient à supposer que la vitesse locale d'une tranche de fluide est très faible devant la célérité du son dans le milieu.

Équation thermodynamique

L'évolution du fluide est supposée adiabatique et réversible c'est à dire isentropique. On introduit donc le coefficient de compressibilité isentropique qui relie les variations de pression et de masse volumique pour une transformation isentropique :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S$$

C'est à dire, pour une perturbation de faible amplitude :

$$\chi_S \simeq \frac{1}{\mu} \times \frac{\Delta\mu}{\Delta P} = \frac{1}{\mu} \times \frac{\mu_1}{P_1} \quad \text{donc} \quad \mu_1 = \chi_s \mu P_1 \quad \text{à l'ordre 1 :} \quad \boxed{\mu_1 = \chi_s \mu_0 P_1}$$

1.4 Équations couplées et linéarisées

→ On considère pour simplifier une situation unidimensionnelle :

$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \quad , \quad P(x,t) = P_0 + P_1(x,t) \quad , \quad \vec{v} = v_1(x,t)\vec{u}_x$$

→ On peut alors éliminer la fluctuation de masse volumique μ_1 pour obtenir un système de deux équations couplées et linéaires portant sur la vitesse v_1 et la surpression P_1 :

$$\boxed{\chi_S \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}}$$

1.5 Équation de propagation

Cas cartésien unidimensionnel

Pour découpler ces équations, on dérive la première équation par rapport au temps et le principe fondamental de la dynamique par rapport à la variable d'espace x :

$$\boxed{\chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}}$$

On aboutit à l'**équation de d'Alembert unidimensionnelle** :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}}$$

Généralisation à 3 dimensions

On admet la généralisation à 3 dimensions :

$$\boxed{\Delta P_1 - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}}$$

qui constitue **l'équation de d'Alembert** avec Δ l'opérateur laplacien.

1.6 Célérité du son

Au sein d'un gaz parfait

Commençons par évaluer le coefficient χ_S sachant que, pour la transformation isentropique d'un gaz parfait :

$$P\mu^{-\gamma} = cste \quad \text{donc} \quad \frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\mu}{\mu} = 0$$

$$\chi_S = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{d\mu}{dP}\right)_0 = \frac{1}{\gamma P_0}$$

Ce qui donne pour la vitesse du son (avec M la masse molaire du gaz) :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{\chi_S \mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} \quad \text{donc} \quad \boxed{c_s = \sqrt{\gamma\frac{RT_0}{M}}}$$

Ainsi dans l'air, à 298 K, $\boxed{c_{s,air} = 346 \text{ m.s}^{-1}}$.

Remarque : la célérité ne semble pas dépendre de la pression ; cependant si la pression est trop faible, le modèle du fluide continu ne s'applique plus et si la pression devient trop forte, c'est l'équation du GP qui n'est plus réaliste.

Au sein d'un liquide

Les liquides sont plus denses $\mu_{liq} \simeq 10^3$ kg.m^{-3} mais beaucoup moins compressibles que les gaz $\chi_{liq.} \simeq 10^{-10}$ Pa^{-1}, typiquement :

$$c_{s,liq} = \sqrt{10^7} \simeq 3 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Par exemple dans l'eau : $\boxed{c_{s,eau} = 1,5 \text{ km/s}}$.

2 Aspects énergétiques

On cherche à exprimer le bilan énergétique associé à la propagation de l'onde acoustique.

2.1 Équation bilan

On commence par multiplier l'équation dérivée de la conservation de la masse par la surpression P_1 et le principe fondamental de la dynamique par la vitesse :

$$\chi_S \frac{\partial P_1}{\partial t} P_1 = -\frac{\partial v_1}{\partial x} P_1 \quad \text{et} \quad \mu_0 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

On somme membre à membre les deux équations pour en déduire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\chi_S P_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}(P_1 v_1) = 0$$

On peut généraliser à trois dimensions en introduisant l'opérateur divergence.

Le bilan énergétique local associé à l'onde sonore s'écrit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}\overrightarrow{\Pi} = 0$$

avec $e = \frac{1}{2}\chi_S P_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2$ et $\overrightarrow{\Pi} = P_1 \vec{v}_1$.

2.2 Interprétation

⋆ Le terme $e_c = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2$ représente évidemment la **densité volumique d'énergie cinétique** de l'onde sonore.

⋆ Il semble raisonnable d'associer le terme $e_p = \frac{1}{2}\chi_S P_1^2$ à la **densité volumique d'énergie potentielle** de l'onde sonore. Ce terme représente l'énergie stockée localement par le fluide qui se dilate et se comprime (cf. énergie potentielle élastique d'un ressort dont la longueur varie par rapport à sa valeur au repos).

⋆ La somme $e = e_c + e_p$ est la **densité volumique d'énergie** de l'onde sonore.

⋆ Le terme $P_1\vec{v}_1$, homogène à une puissance par unité de surface, est l'analogue du vecteur de Poynting en électromagnétisme ou du vecteur courant de matière pour l'équation de conservation de la masse ; c'est le **vecteur densité de courant d'énergie acoustique** associé à l'onde sonore.

⋆ Le fait d'avoir négligé les phénomènes d'amortissement explique l'absence de second membre. Pour ce modèle, l'énergie acoustique d'un système isolé doit se conserver.

⋆ On peut exprimer le résultat sous forme intégrale en considérant un volume V limité par une surface fermée Σ orientée vers l'extérieur :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{d}\iiint_V e(P,t)dv_p = \iiint_V \frac{\partial e}{\partial t}dv_p = -\iiint_V (\operatorname{div}\vec{\Pi})dv_p = -\oiint_\Sigma \vec{\Pi}.d\vec{S}$$

La diminution de l'énergie acoustique dans le volume s'explique par l'énergie rayonnée à travers la surface.

2.3 Intensité acoustique, niveau sonore

L'**intensité acoustique I** est la moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting acoustique et s'exprime en W.m^{-2} :

$$\boxed{I = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle}$$

L'oreille étant un détecteur logarithmique, on définit le **niveau sonore**, qui désigne l'intensité sonore en décibel :

$$\boxed{I_{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{avec} \quad I_0 = 10^{-12}\ \text{W.m}^{-2}}$$

Quelques ordres de grandeur :

source	pièce calme	conversation	avion
intensité (dB)	20	60	120

Le minimum d'audition de l'oreille humaine est d'environ 0 à 10 dB. Le seuil de douleur est atteint vers 120 dB.
L'oreille est capable d'entendre des sons de fréquence compris entre 20 Hz et 20 kHz. Au-delà, on parle d'ultrasons.

3 Structure des ondes planes progressives harmoniques

On s'intéresse à des solutions de l'équation de d'Alembert sous forme d'ondes planes progressives harmoniques **OPPH**.

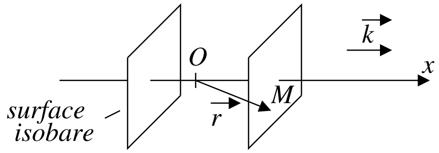
3.1 Notion d'onde plane

On considère une onde progressive harmonique qui se propage dans une certaine direction de l'espace que l'on peut toujours choisir comme étant l'axe Ox.

L'onde est qualifiée d'onde plane si, à un instant donné, la grandeur vibratoire est la même en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

Ainsi, la surpression associée à une OPPH se propageant selon les x croissants s'écrit :

$$\underline{P}_1(x,t) = \underline{P}_1^{\circ} \exp\left(i\left[\omega t - kx\right]\right)$$



Comme $kx = k\vec{u}_x.x\vec{u}_x = k\vec{u}_x.\left(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z\right) = \vec{k}.\vec{r}$, il est possible d'écrire une expression plus générale qui ne spécifie pas le système de coordonnées utilisé :

$$\underline{P}_1(\vec{r},t) = \underline{P}_1^{\circ} \exp\left(i\left[\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right]\right) \quad \text{et} \quad \underline{\vec{v}}_1(\vec{r},t) = \underline{\vec{v}}_1^{\circ} \exp\left(i\left[\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right]\right)$$

3.2 Opérations de dérivation pour une OPPH

Dans le cas d'une OPPH, et **uniquement pour une OPPH**, on a :

$$\frac{\partial \underline{P}_1}{\partial t} = i\omega \underline{P}_1 \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\underline{P}_1 = -i\vec{k}\underline{P}_1$$

$$\text{div}\underline{\vec{v}}_1 = -i\vec{k}.\underline{\vec{v}}_1 \qquad \Delta\underline{P}_1 = -k^2\underline{P}_1$$

3.3 Relation de dispersion

On reporte l'expression de la surpression dans l'équation de d'Alembert :

$$-k^2\underline{P}_1 + \frac{\omega^2}{c_s^2}\underline{P}_1 = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}}$$

On retrouve la relation de dispersion caractéristique de l'équation de d'Alembert pour une onde plane progressive et harmonique.

3.4 Caractère longitudinal de l'onde sonore

À l'aide du principe fondamental de la dynamique linéarisé, on obtient :

$$\mu_0\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}P_1 \quad \Rightarrow \quad i\omega\underline{\vec{v}}_1 = \frac{-1}{\mu_0}(-ik\vec{u}_x)\underline{P}_1 \quad \text{donc} \quad \underline{\vec{v}}_1 = \frac{\underline{P}_1}{\mu_0 c_s}\vec{u}_x$$

Le vecteur vitesse est parallèle à la direction de propagation, **l'onde sonore est longitudinale**.

3.5 Impédance acoustique

Très généralement, l'impédance est le rapport de l'excitation sur la réponse. Pour une onde sonore, on définit l'impédance acoustique par :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{P}_1}{\underline{v}_1} \quad \text{ou} \quad \underline{Z} = \frac{\underline{P}_1}{S\underline{v}_1}}$$

Sv_1 représente le débit volumique à travers une section S. Pour la suite, on privilégie la première définition.

Pour une OPPH se propageant dans le sens des x croissants, on a obtenu :

$$\underline{\vec{v}}_1 = \frac{\underline{P}_1}{\mu_0 c_s}\vec{u}_x = \underline{v}_1\vec{u}_x \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{Z} = \mu_0 c_s}$$

Cette grandeur réelle est caractéristique du milieu de propagation.

Attention que dans le cas d'une onde plane se propageant dans le sens des x décroissants $\underline{Z} = -\mu_0 c_s$.

3.6 Aspects énergétiques d'une OPPH

Remarque : les grandeurs énergétiques étant des grandeurs quadratiques, il est indispensable de travailler avec les grandeurs réelles.

Considérons une OPPH se propageant dans le sens des x croissants ; l'expression de l'impédance acoustique assure, pour les grandeurs réelles :

$$P_1(x,t) = \mu_0 c_s v_1(x,t)$$

On en déduit : $e_p = \frac{1}{2}\chi_S P_1^2 = \frac{1}{2}\chi_S\mu_0^2 c_s^2 v_1^2 = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 = e_c = \frac{e}{2}$.

Cette égalité est associée à l'équipartition de l'énergie que l'on retrouvera pour l'OPPH en électromagnétisme.

Pour le vecteur courant d'énergie : $\vec{\Pi} = P_1\vec{v}_1 = \mu_0 c_s v_1^2\vec{u}_x = (\mu_0 v_1^2)c_s\vec{u}_x = ec_s\vec{u}_x$

Cette dernière relation restant vraie en moyenne dans le temps $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \langle e\rangle\, c_s\vec{u}_x$

Quelques ordres de grandeur

Considérons un niveau sonore élevé $I_{dB} = 100$ dB à une fréquence $\nu = 1,0$ kHz. Ce niveau sonore est associé à une intensité $I = 10^{-2}$ W.m^{-2}.

Comme $I = \mu_0 c_s \left\langle v_1^2\right\rangle = \frac{1}{2}\mu_0 c_s v_1^{\circ 2} = \frac{1}{2}\frac{P_1^{\circ 2}}{\mu_0 c_s}$, on en déduit (avec $c_s = 340$ m/s et $\mu_0 = 1,28$ kg.m^{-3}) :

$$v_1^\circ = 6,8\times 10^{-3}\ \text{m.s}^{-1} \ll c_s \quad \text{et} \quad P_1^\circ = 2,9\ \text{Pa} \ll P_0$$

L'amplitude ξ° du déplacement d'une tranche de fluide vaut : $v_1^\circ = 2\pi\nu\xi^\circ$, soit :

$$\xi^\circ = 1,1\ \mu\text{m} \ll \lambda = \frac{c_s}{\nu} = 0,34\ \text{m}$$

De même pour l'amplitude de la variation de masse volumique :

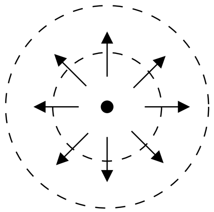
$$\mu_1^\circ = \mu_0\chi_S P_1^\circ = \frac{P_1^\circ}{c_s^2} \quad \text{donc} \quad \mu_1^\circ = 2,5\times 10^{-5}\ \text{kg.m}^{-3} \ll \mu_0$$

Ces résultats confirment *a posteriori* les conditions de l'approximation acoustique. La surpression, la fluctuation de masse volumique et la vitesse locale d'une tranche de fluide sont très petites devant la pression au repos, la masse volumique au repos, et la célérité du son dans l'air.
On note enfin que **l'approximation acoustique est une approximation de grande longueur d'onde**.

4 Onde sonore sphérique

4.1 Présentation

On considère une sphère pulsante située à l'origine du système de coordonnées, de rayon a qui émet une onde sonore de manière isotrope à la pulsation ω.



4.2 Champ de pression et champ des vitesses

L'émission isotrope incite à chercher un champ de surpression $P_1 = P_1(r,t)$ avec r la distance à l'origine.

La surpression est solution de l'équation de d'Alembert à 3 dimensions :

$$\Delta P_1 - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

Pour une fonction de la seule variable r, $\Delta P_1 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rP_1)}{\partial r^2}$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rP_1)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2(rP_1)}{\partial r^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2(rP_1)}{\partial t^2} = 0$$

La fonction $r \to rP_1(r,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert à une dimension, nécessairement :

$$rP_1(r,t) = f\left(t - \frac{r}{c_s}\right) + g\left(t + \frac{r}{c_s}\right) \quad \Rightarrow \quad P_1(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c_s}\right) + \frac{1}{r}g\left(t + \frac{r}{c_s}\right)$$

En l'absence d'onde retour, on ne conserve que le premier terme :

$$P_1(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c_s}\right)$$

La sphère émettant une onde oscillante, le milieu répond à la même pulsation, c'est à dire en notation complexe :

$$\boxed{\underline{P}_1(r,t) = \frac{\underline{A}}{r}e^{i(\omega t - kr)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c_s}}$$

Pour déterminer le champ des vitesses, on utilise le principe fondamental de la dynamique :

$$\mu_0\frac{\partial\underline{\vec{v}}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{P}_1 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 i\omega\underline{\vec{v}}_1 = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)\underline{A}e^{i(\omega t - kr)}\vec{u}_r$$

Si on se place dans la zone de rayonnement définie par $\dfrac{r}{\lambda} \gg 1$, alors :

$$\frac{r}{\lambda} \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad kr \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{r} \gg \frac{1}{r^2}$$

Et donc pour $\dfrac{r}{\lambda} \gg 1$, $\underline{\vec{v}}_1 \simeq \dfrac{1}{\mu_0 c_s}\dfrac{\underline{A}}{r}e^{i(\omega t - kr)}\vec{u}_r$, c'est à dire $\underline{\vec{v}}_1 \simeq \dfrac{\underline{P}_1}{\mu_0 c_s}\vec{u}_r$

Dans la zone de rayonnement, l'onde sphérique a localement la structure d'une onde plane.

4.3 Aspects énergétiques

On s'intéresse à la moyenne dans le temps de l'énergie rayonnée par l'onde :

$$\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \langle P_1\vec{v}_1\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\underline{P}_1^\star\underline{\vec{v}}_1\right) = \frac{1}{2\mu_0 c_s}\mathcal{R}e\left(\underline{P}_1^\star\underline{P}_1\right)\vec{u}_r = \frac{|\underline{A}|^2}{2\mu_0 c_s r^2}\vec{u}_r$$

L'énergie rayonnée en moyenne s'obtient en exprimant le flux du vecteur densité de courant d'énergie à travers une sphère de rayon r centrée sur l'origine :

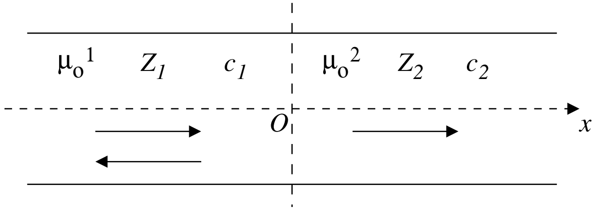
$$\oiint\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle.d\vec{S} = \frac{2\pi|\underline{A}|^2}{\mu_0 c_s} \quad \text{indépendant de } r$$

Le milieu n'étant pas absorbant, l'énergie qui traverse toute sphère de rayon r est la même. L'aire de la sphère augmentant comme r^2, la norme du vecteur de Poynting doit décroître comme $1/r^2$ et les amplitudes de la surpression et de la vitesse comme $1/r$. L'onde se dilue en se propageant dans un milieu à trois dimensions.

5 Réflexion et transmission des ondes sonores

5.1 Principe de l'étude

Soit deux milieux fluides séparés par une interface plane :



On s'intéresse au comportement de ce système en présence d'une onde plane progressive harmonique incidente se propageant perpendiculairement au dioptre qui sépare le milieu 1 (masse volumique au repos μ_o^1, vitesse du son c_1, impédance acoustique Z_1) du milieu 2 (μ_o^2, c_2, Z_2).

L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise d'expression générale :

$$\underline{P_i}(x,t) = \underline{P_i}^o \exp\left(i\omega t - ik_1 x\right) \quad \text{et} \quad \underline{v_i}(x,t) = \underline{v_i}^o \exp\left(i\omega t - ik_1 x\right)$$

$$\underline{P_r}(x,t) = \underline{P_r}^o \exp\left(i\omega t + ik_1 x\right) \quad \text{et} \quad \underline{v_r}(x,t) = \underline{v_r}^o \exp\left(i\omega t + ik_1 x\right)$$

$$\underline{P_t}(x,t) = \underline{P_t}^o \exp\left(i\omega t - ik_2 x\right) \quad \text{et} \quad \underline{v_t}(x,t) = \underline{v_t}^o \exp\left(i\omega t - ik_2 x\right)$$

5.2 Conditions aux limites

Pour déterminer les caractéristiques des ondes réfléchie et transmise, il faut préciser les conditions aux limites vérifiées par la vitesse et la surpression à l'interface.

Continuité de la vitesse

Les fluides ne se mélangent pas, au niveau de l'interface, les fluides ont donc même vitesse. En notant ξ la position de l'interface à l'instant t :

$$v_1(\xi,t) = v_2(\xi,t)$$

De part l'approximation acoustique $\xi \ll \lambda$, on peut considérer que la position de l'interface reste quasiment confondue avec l'origine :

$$\boxed{v_1(0,t) = v_2(0,t)}$$

Continuité de la pression

On applique la relation fondamentale de la dynamique à une tranche de fluide de largeur 2ε au voisinage de l'interface :

$$m\vec{a} = \left[P_0 + P_1(-\varepsilon,t)\right] S\vec{u}_x - \left[P_0 + P_2(\varepsilon,t)\right] S\vec{u}_x$$

À la limite où $\varepsilon \to 0$, la masse tend vers zéro, ce qui assure l'égalité des pressions :

$$\boxed{P_1(0,t) = P_2(0,t)}$$

5.3 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

Par application des relations de passage, on obtient :

$$\underline{P_i}^\circ + \underline{P_r}^\circ = \underline{P_t}^\circ \quad \text{et} \quad \underline{v_i}^\circ + \underline{v_r}^\circ = \underline{v_t}^\circ$$

À l'aide des impédances acoustiques, on élimine les pressions :

$$Z_1\left(\underline{v_i}^\circ - \underline{v_r}^\circ\right) = Z_2\underline{v_t}^\circ \quad \text{et} \quad \underline{v_i}^\circ + \underline{v_r}^\circ = \underline{v_t}^\circ$$

Ce qui donne pour les coefficients en réflexion et en transmission pour la vitesse :

$$\boxed{t_{12}(v) = \frac{\underline{v_t}^o}{\underline{v_i}^o} = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{r_{12}(v) = \frac{\underline{v_r}^o}{\underline{v_i}^o} = \frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}}$$

En utilisant à nouveau les impédances acoustiques, on détermine les coefficients en réflexion et en transmission pour la surpression :

$$\frac{\underline{P_t}^o}{\underline{P_i}^o} = \frac{Z_2\underline{v_t}^o}{Z_1\underline{v_i}^o} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{P_r}^o}{\underline{P_i}^o} = \frac{-Z_1\underline{v_r}^o}{Z_1\underline{v_i}^o}$$

$$\boxed{t_{12}(P) = \frac{\underline{P_t}^o}{\underline{P_i}^o} = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{r_{12}(P) = \frac{\underline{P_r}^o}{\underline{P_i}^o} = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}}$$

On constate que les coefficients de transmission sont des réels positifs, les grandeurs incidentes et transmises sont en phase. Les coefficients de réflexion sont opposés.

5.4 Coefficients de réflexion et de transmission en énergie

Le coefficient de réflexion (de transmission) en énergie représente le rapport entre la puissance moyenne réfléchie (transmise) et la puissance moyenne incidente. Il faut donc considérer la moyenne des vecteurs densité de courant d'énergie :

$\star$ $\left\langle \|\vec{\Pi}_i\| \right\rangle = \mu_0^1 c_1 \left\langle v_i^2 \right\rangle = \dfrac{\mu_0^1 c_1}{2}|\underline{v_i}^o|^2 = \dfrac{Z_1}{2}|\underline{v_i}^o|^2$

$\star \left\langle \|\overrightarrow{\Pi}_r\| \right\rangle = \dfrac{Z_1}{2}|\underline{v_r}^o|^2$ et $\left\langle \|\overrightarrow{\Pi}_t\| \right\rangle = \dfrac{Z_2}{2}|\underline{v_t}^o|^2$

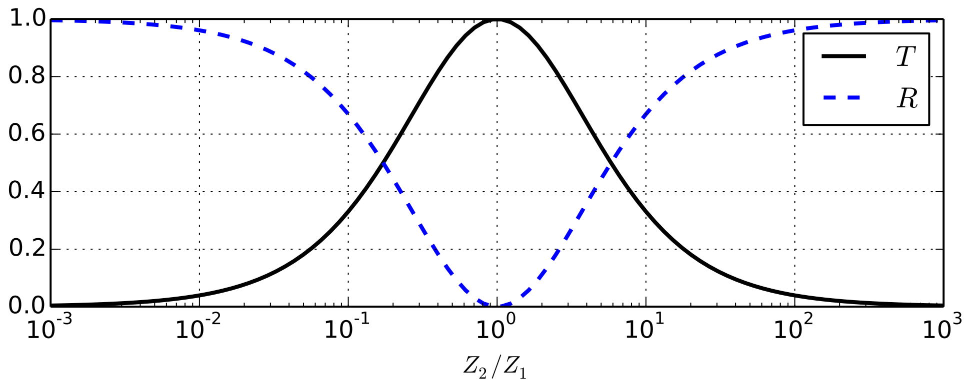
C'est à dire pour les coefficients en énergie :

$$R = \frac{\left\langle \|\overrightarrow{\Pi}_r\| \right\rangle}{\left\langle \|\overrightarrow{\Pi}_i\| \right\rangle} = |r_{12}(v)|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{\left\langle \|\overrightarrow{\Pi}_t\| \right\rangle}{\left\langle \|\overrightarrow{\Pi}_i\| \right\rangle} = \frac{Z_2}{Z_1}|t_{12}(v)|^2$$

$$\boxed{R = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}}$$

$\star$ La relation $R + T = 1$ assure la conservation de l'énergie à l'interface.

$\star$ Pour des milieux d'impédances acoustiques semblables, la transmission sera efficace. On parle alors d'**adaptation d'impédance**.
Dans le cas contraire l'onde sera essentiellement réfléchie (exemple de l'interface air-eau).



Pour l'air $Z_{air} = 440$ kg.m^{-2}.s^{-1}, pour l'eau $Z_{eau} = 1,4 \times 10^6$ kg.m^{-2}.s^{-1}.
Pour l'interface air-eau $T = 1,3 \times 10^{-3}$, on n'entend donc pas les bruits aériens quand on plonge la tête sous l'eau.

Capacités exigibles :

$\rightarrow$ Approximation acoustique

Classer les ondes sonores par domaines fréquentiels.
Justifier les hypothèses de l'approximation acoustique par des ordres de grandeur.
En comparant l'amplitude du déplacement à la longueur d'onde, montrer que l'accélération de la particule de fluide s'écrit $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ lorsque $v \ll c$.
Écrire les trois équations locales linéarisées.
Déterminer l'équation de propagation de la surpression dans une situation unidirectionnelle en coordonnées cartésiennes.
Utiliser sa généralisation admise à trois dimensions avec l'opérateur laplacien.
Exprimer la célérité en fonction de la température pour un gaz parfait.
Citer les ordres de grandeur de la célérité pour l'air et pour l'eau.

$\rightarrow$ Aspects énergétiques

Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde.
Définir l'intensité acoustique en W.m^{-2} et le niveau sonore en décibels. Citer quelques ordres de grandeur (minimum d'audition, seuil de douleur, conversation).

$\rightarrow$ Ondes planes progressives harmoniques

En relation avec la diffraction, discuter la validité du modèle de l'onde plane en comparant la dimension latérale à la longueur d'onde. Décrire le caractère longitudinal de l'onde sonore. Établir et utiliser l'impédance acoustique.
Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.

$\rightarrow$ Onde sonore sphérique

Commenter l'expression de la surpression $P(r,t) \sim \dfrac{1}{r}\cos(\omega t - kr)$ générée par une sphère pulsante.

$\rightarrow$ Effet Doppler

Mettre en œuvre une détection hétérodyne pour mesurer une vitesse par décalage Doppler.

$\rightarrow$ Interface entre deux milieux

Expliciter des conditions aux limites à une interface. Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en amplitude de surpression, en amplitude de vitesse ou en puissance. Relier l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.
Approche documentaire : décrire la mise en œuvre des ondes ultra-sonores pour l'échographie médicale.