Ondes électromagnétiques dans le vide

Modélisation de la propagation d'une OEM

On considère un milieu assimilable au vide sans charges ni courants

$\vec{j} = \vec{0}$ (pas de courants)

$\rho = 0$ (pas de charges)

$\mu \simeq \mu_0$ et $\epsilon \simeq \epsilon_0$ (milieu assimilé au vide)

Équations de Maxwell

$$\mathrm{M.T} \ : \ \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{M.F} \ : \ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{M.G} \ : \ \mathrm{div}\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{M.A} \ : \ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Équation de propagation

Champ électrique

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \text{ avec } \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}$$

Champ magnétique

$$\boxed{\Delta\vec{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Ce sont des équations de d'Alembert.

C'est la célérité de la lumière

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \ \mathrm{m.s^{-1}} = c}$$

Solution en **OPPH**

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_z) \end{vmatrix}$$

Notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = \begin{vmatrix} E_{0x}\,\mathrm{e}^{j\varphi_x} \\ E_{0y}\,\mathrm{e}^{j\varphi_y} \\ E_{0z}\,\mathrm{e}^{j\varphi_z} \end{vmatrix} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = \underline{\vec{E}_0}\,\mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

Mêmes notations pour le champ magnétique

Notation complexe des opérateurs

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \to -j\vec{k}\wedge$$

$$\mathrm{div} \to -j\vec{k}\cdot$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} \to -j\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$$

Notation complexe des équations de Maxwell

$$\mathrm{M.T} \ : \ \vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$$

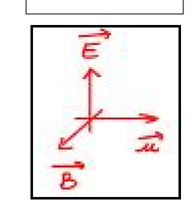
$$\mathrm{M.F} \ : \ \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$$

$$\mathrm{M.G} \ : \ \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$$

$$\mathrm{M.A} \ : \ \vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2}\,\underline{\vec{E}}$$

Relation de transversalité

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}}$$

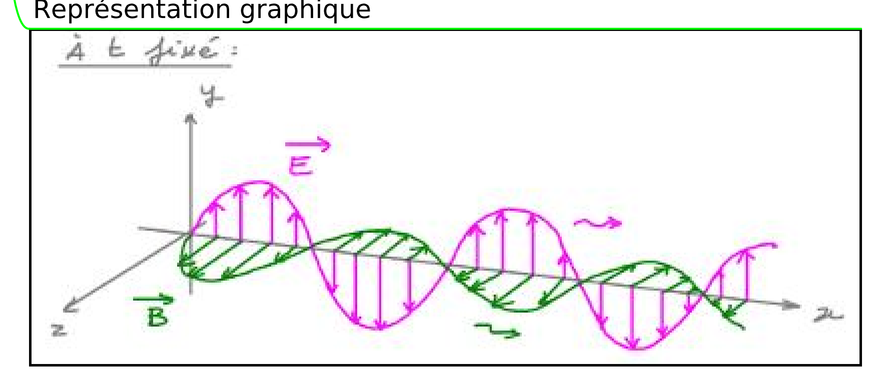


Rapport E/B

$$\frac{||\vec{E}||}{||\vec{B}||} = c$$

Généralisation aux **OPP**

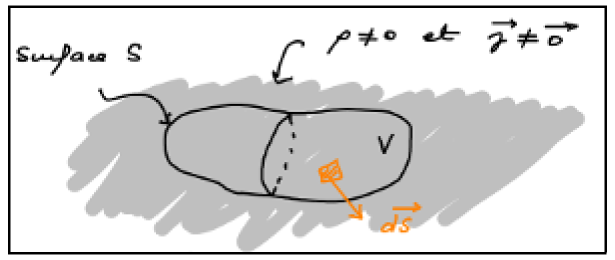
Représentation graphique



Aspects énergétiques

Équation locale de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = -p_V$$



Puissance rayonnée à travers une surface

$$\boxed{p_{\mathrm{ray}} = \iint_S \vec{\Pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}}$$

Équation de Poynting

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \mathrm{div}\left(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = -\vec{j}\cdot\vec{E}}$$

Vecteur de Poynting ou vecteur densité de courant énergétique

$$\boxed{\vec{\Pi} = \vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}}$$

Densité volumique d'énergie électromagnétique

$$\boxed{w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Puissance volumique <u>cédée</u> aux charges du milieu

$$\boxed{p_V = \vec{j}\cdot\vec{E}}$$

Pour une OPP, le vecteur de Poynting défini <u>le sens de propagation de l'énergie</u>.

$$\vec{\Pi} = \epsilon_0\, c\, E^2\, \vec{u}$$

Intensité

$$\boxed{I = <||\vec{\Pi}||>}$$

Flux de photons traversant une surface

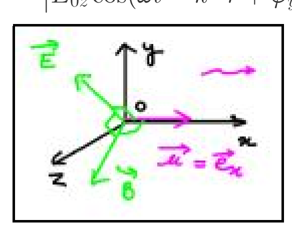
$$\frac{\delta N}{\mathrm{d}t} = \frac{p_{\mathrm{ray}}}{hf}$$

Polarisation d'une OPPH

Polarisation : direction du champ électrique

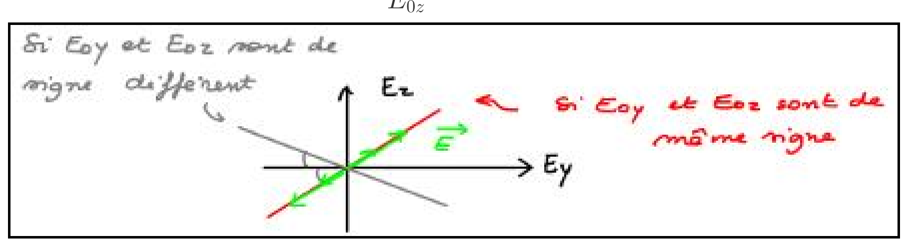
Polarisation **rectiligne**

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_y) \end{vmatrix}$$



On a alors

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0z}}\,E_z = Cte\cdot E_z$$



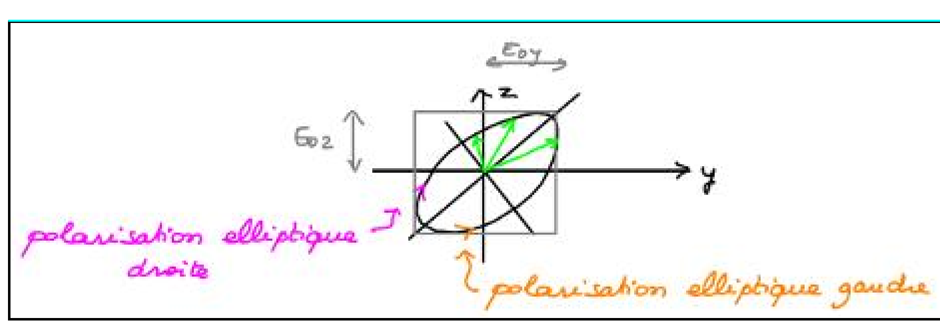
Écriture simplifiée

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\,\mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

Écriture simplifiée

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

Polarisation **elliptique**



Polarisation **circulaire**