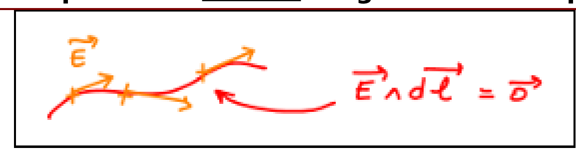
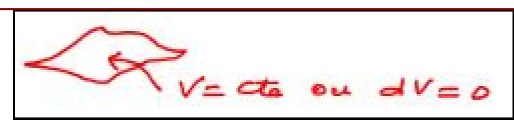
Lois locales du champ électrique en régime stationnaire

Topographie du champ et du potentiel électrique

Une ligne de champ est une courbe tangente au champ électrique.

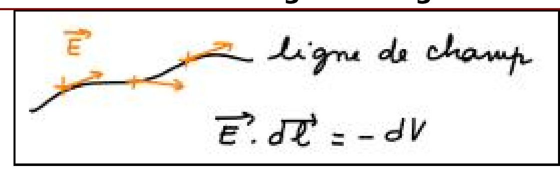


Une équipotentielle est une surface contenant l'ensemble des points au même potentiel électrique.



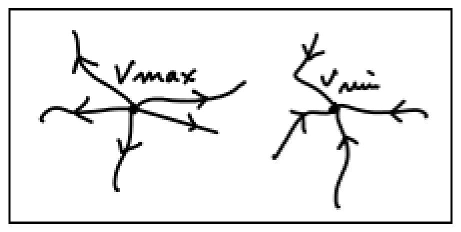
Propriétés

Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ.

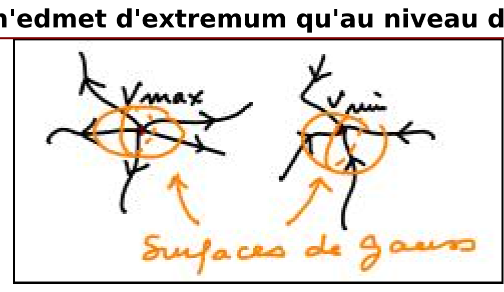


Les lignes de champ peuvent converger (vers un minimum de potentiel) ou diverger (depuis un maximum de potentiel).

$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$



Le potentiel n'edmet d'extremum qu'au niveau des charges.



Les lignes de champ sont othogonales aux surfaces équipotentielles.

$\mathrm{d}V = 0 = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ donc $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{\ell}$

Équation de Maxwell-Gauss

$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$

Elle permet de retrouver le **théorème de Gauss**.

$\iiint_V \mathrm{div}\vec{E} \cdot \mathrm{d}V = \frac{\iiint_V \rho \, \mathrm{d}V}{\epsilon_0}$ soit avec le théorème de GO $\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0}$

Cette équation est valable strictement dans le vide.

Équation de Poisson

$\mathrm{div}\vec{E} = \mathrm{div}(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V) = -\Delta V$ soit $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$

Opérateur laplacien

Δ

Équation de Maxwell-Faraday

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Elle permet de retrouver la **loi de Faraday**.

$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ soit avec le théorème de Stockes $\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$

C'est une équation << stucturelle >>, valable dans tout milieu.

En régime stationnaire

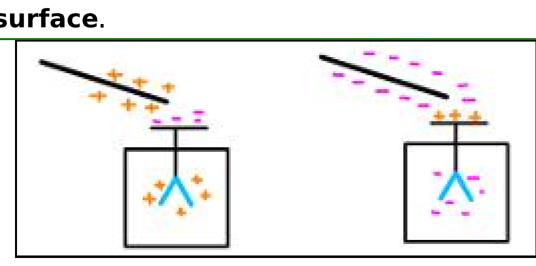
$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0}}$

On retouve **l'existence d'un potentiel** associé au champ électrique.

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V) = \vec{0}$ soit $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$

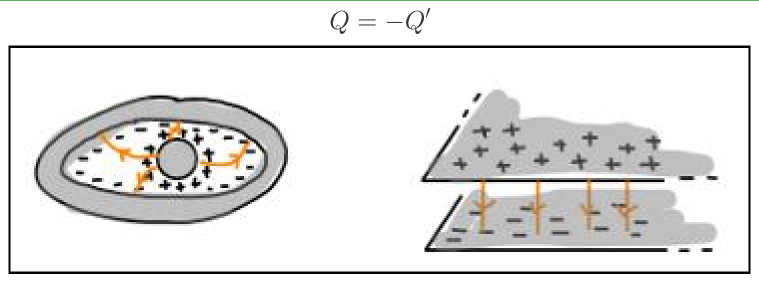
Le condensateur

L'électrisation par influence modifie uniquement la répartition de la charge d'un conducteur isolé **sur sa surface**.



deux conducteur sont dits **en influence totale** si toute ligne de champ sortant de l'un ne peut aller que sur l'autre.

$Q = -Q'$

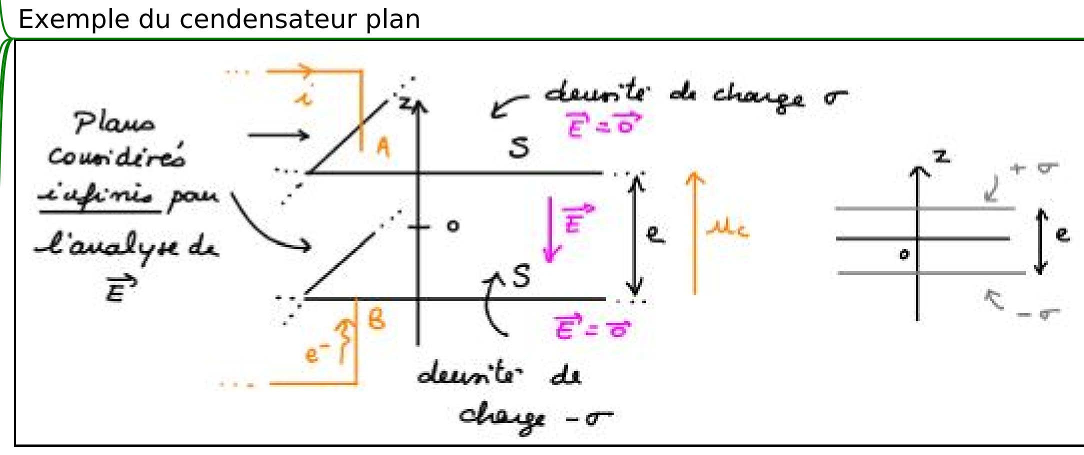


Un **condensateur** est un ensemble de **deux conducteurs en influence totale**.

Capacité

$\boxed{C = \frac{Q}{V - V'}}$

Exemple du cendensateur plan



$z>e/2$

$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_{-\sigma} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

$z<-e/2$

$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_{-\sigma} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

$-e/2<z<e/2$

$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_{-\sigma} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z}$

Capacité

$u_C = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = q\frac{e}{\epsilon_0 S}$

$\boxed{C = \frac{q}{u_C} = \frac{\epsilon_0 S}{e}}$

Rôle d'un isolant

$\boxed{C = \frac{\epsilon S}{e}}$

Permittivité diélectrique de l'isolant

$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

Permittivité diélectrique relative de l'isolant

ϵ_r

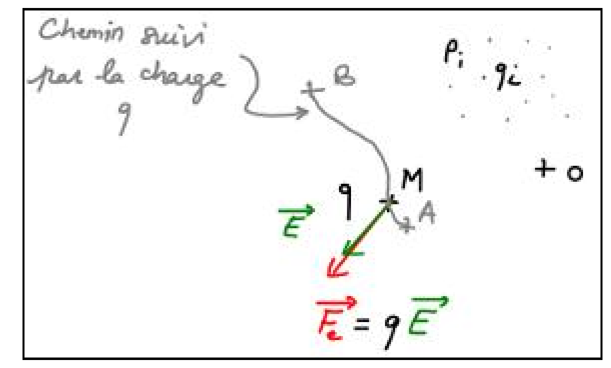
Densité volumique d'énergie électrique au sein d'un condensateur

$\boxed{w_E = \frac{\epsilon E^2}{2}}$ avec $W_E = \iiint_V w_E \, \mathrm{d}V$

Énergie potentielle électrique

Mise en évidence

$\delta W = \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{d}\left(q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M}\right) = -\mathrm{d}(qV) = -\mathrm{d}(\mathcal{E}_p)$



Potentiel électrique — Unité

V — V

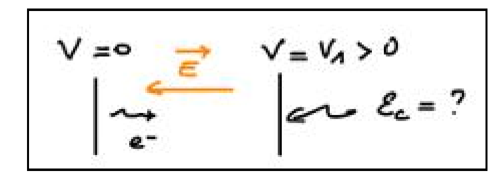
Énergie potentielle électrique

$\boxed{\mathcal{E}_p = qV}$

Associée à la force électrique

Exemple

$\mathcal{E}_m = Cte = 0 + 0 = \mathcal{E}_c + qV_1$ soit $\boxed{\mathcal{E}_c = -qV_1}$



Lien champ - potentiel

Relation intégrale

$\boxed{V = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}$

Entre deux points

$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$

Conséquance directe

$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$

Relation locale

$\boxed{\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{d}V}$ ou $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V}$

Relation intégrale

$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$

Conséquance directe

$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$

S'il n'existe pas de charges à l'infini

$V(\infty) = 0$

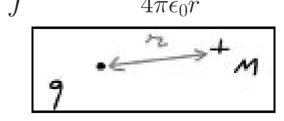
S'il existe des charges à l'infini

$V(\infty) \neq 0$

Exemples

Charge ponctuelle

$V = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + Cte = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

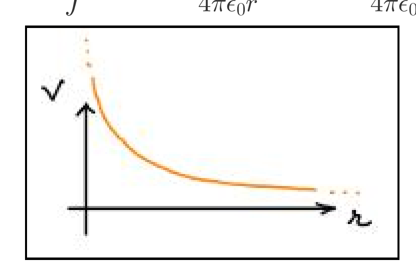


Champ électrique

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$

Potentiel électrique

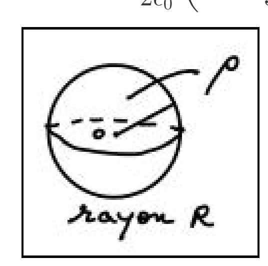
$V = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + Cte = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$



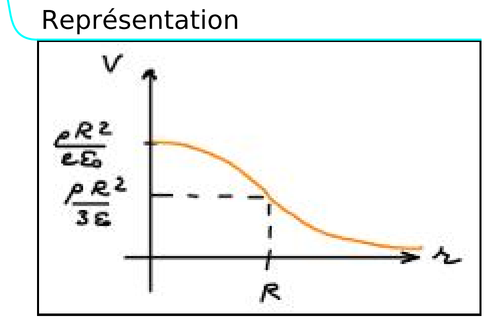
Sphère uniformément chargée en volume

Si $r > R$: $V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$

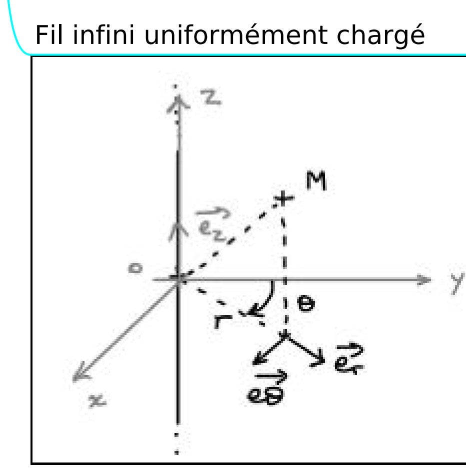
Si $r < R$: $V = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right)$



Représentation



Fil infini uniformément chargé



Champ électrique

$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

Potentiel électrique

$V = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = V_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$