

## TD05 : Fluides en écoulement (correction)

### PhTr056. Calcul de débit (\*)

1.  $\vec{v}(r = R) = \vec{0}$  en conformité avec la condition d'adhérence sur une paroi fixe.

2. Par définition du débit volumique :

$$D_v = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} v(r) dr r d\theta = 2\pi v_0 \int_{r=0}^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr$$

$$D_v = 2\pi v_0 \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R \Rightarrow \boxed{D_v = \frac{\pi R^2 v_0}{2}}$$

3. Par définition, la vitesse débitante est le rapport du débit volumique par la section :

$$U = \frac{D_v}{\pi R^2} \Rightarrow \boxed{U = \frac{v_0}{2}}$$

### PhTr067. Distribution d'eau potable (\*\*)

1. En appliquant la formule de l'hydrostatique :

$$P = P_0 + \mu gh = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 25 \Rightarrow \boxed{P = 3,5 \text{ bar}}$$

On peut aussi se contenter d'affirmer que, dans l'eau, la pression augmente d'un bar tous les dix mètres.

2. Lorsqu'on ouvre la vanne en sortie, l'eau sort à l'air libre et la pression est égale à la pression atmosphérique.

En supposant l'écoulement laminaire et en notant  $\Delta P$  la baisse de pression, la loi de Hagen-Poiseuille permet d'affirmer (Cf. cours) :

$$\Delta P = \left( \frac{D_v \times 8\eta}{\pi a^4} \right) \times L \Leftrightarrow D_v = \frac{\Delta P \times \pi a^4}{8\eta L}$$

avec  $a$  le rayon de la conduite.

Application numérique :

$$D_v = \frac{\Delta P \times \pi \times (S/\pi)^2}{8\eta L} = \frac{2,5 \times 10^5 \times \pi \times (10^{-4}/\pi)^2}{8 \times 10^{-3} \times 100} \Rightarrow \boxed{D_v = 1,0 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3. Connaissant le débit volumique, on peut en déduire la vitesse débitante  $U = D_v/S$  et le nombre de Reynolds :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu \times U \times 2a}{\eta} = \frac{\mu \times (D_v/S) \times \sqrt{4S/\pi}}{\eta}$$

Application numérique :

$$\mathcal{R}_e = \frac{10^3 \times (10^{-3}/10^{-4}) \times \sqrt{4 \times 10^{-4}/\pi}}{10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{R}_e = 1,1 \times 10^5}$$

L'écoulement est turbulent. La loi de Hagen-Poiseuille ne s'applique pas.

Il semble alors raisonnable, pour cette conduite lisse, d'utiliser la formule de Blasius :

$$\frac{\Delta P}{1/2\mu U^2} = \frac{0,316}{\mathcal{R}_e^{1/4}} \times \frac{L}{d} = \frac{0,316}{(\mu U d/\eta)^{1/4}} \times \frac{L}{d} \Leftrightarrow U^{7/4} = \frac{2\Delta P}{0,316} \times \frac{1}{\mu^{3/4}} \times \frac{d^{5/4}}{L\eta^{1/4}}$$

Application numérique :

$$U^{7/4} = \frac{2 \times 2,5 \times 10^5 \times (11,3 \times 10^{-3})^{5/4}}{0,316 \times (10^3)^{3/4} \times 100 \times (10^{-3})^{1/4}} \Rightarrow U = 1,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Et donc pour le débit volumique :

$$D_v = U \times S = 1,42 \times 10^{-4} \Rightarrow \boxed{D_v = 0,14 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4. Dans de vieilles installations, les dépôts accumulés et le calcaire rendent la conduite rugueuse, ce qui augmente le facteur de friction entraînant une baisse du débit.

### PhTr068. Perte régulière horizontale (\*\*)

Pour utiliser le diagramme donnant la perte de charge, il nous faut déterminer le nombre de Reynolds de l'écoulement et la rugosité relative de la conduite :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu U d}{\eta} = \frac{U d}{\nu} = \frac{Q_v}{S} \times \frac{d}{\nu} = \frac{Q_v}{\pi d^2/4} \times \frac{d}{\nu} = \frac{4Q_v}{\pi d \times \nu} = \frac{4 \times 0,120}{\pi \times 0,2 \times 9,0 \times 10^{-6}}$$

On obtient  $\mathcal{R}_e = 8,5 \times 10^4$ .

Pour la rugosité relative, on obtient  $k = \frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,25}{200} = 1,25 \times 10^{-3}$ .

En utilisant le diagramme fourni, le coefficient de perte de charge peut, pour cette expérience, être approximé par  $\Lambda \approx 0,023$ .

On repart alors de sa définition pour déterminer la perte de charge :

$$\Delta P = \mu g \Delta h = \Lambda \frac{L}{d} \times \frac{1}{2} \mu U^2 \Leftrightarrow \Delta h = \frac{\Lambda \times L \times U^2}{2d \times g}$$

Application numérique :

$$\Delta h = \frac{0,023 \times 300 \times [0,120/(\pi \times 0,2^2/4)]^2}{2 \times 0,2 \times 9,81} \Rightarrow \boxed{\Delta h \approx 26 \text{ m}}$$

### PhTr059. Vedette hydroptère (\*\*)

1. L'équilibre vertical impose que la portance équilibre le poids :

$$\frac{1}{2}\mu SC_z V^2 = mg \Rightarrow S = \frac{2mg}{\mu C_z V^2} = \frac{2 \times 10^4 \times 9,81}{10^3 \times 0,70 \times (72/3,6)^2}$$

$$S = 0,70 \text{ m}^2$$

2. Très généralement, la puissance est le produit de la force par la vitesse ; pour avancer à vitesse constante, le bateau doit disposer d'une puissance moteur  $\mathcal{P}$  qui compense la puissance de la force de traînée :

$$\mathcal{P} = F_t \times V = \frac{1}{2}\mu SC_x V^3 = \frac{10^3 \times 0,7 \times 0,06 \times (72/3,6)^3}{2} \Rightarrow \mathcal{P} = 1,7 \times 10^2 \text{ kW}$$

### PhTr060. Chute d'une bille, loi de Stokes (\*\*)

1. On constate que la distance parcourue est proportionnelle au temps écoulé, la vitesse est donc constante ; à l'aide d'une régression linéaire, ou, à défaut, en utilisant les données extrêmes du tableau, on obtient :

$$v = 3,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. En choisissant  $\eta \approx 1 \text{ Pl}$  :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu_g v d}{\eta} = \frac{1260 \times 3,5 \times 10^{-2} \times 0,0216}{1} \Rightarrow \mathcal{R}_e \approx 1$$

3. La bille de caoutchouc est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de traînée que l'on peut modéliser par la loi de Stokes compte tenu de la valeur du nombre de Reynolds.

On applique alors la deuxième loi de Newton à la bille dans le référentiel galiléen du laboratoire.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \mu_g \times \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}$$

4. En régime inertiel, les forces se compensent, en appelant  $\mu_c$  la masse volumique du caoutchouc, on en déduit :

$$\frac{4\pi R^3}{3}(\mu_c - \mu_g)g = 6\pi\eta Rv \Rightarrow v = \frac{2R^2 g}{9\eta}(\mu_c - \mu_g)$$

On en déduit alors la viscosité de la glycérine à l'aide de la mesure de la vitesse (avec  $\mu_c = 1421 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) :

$$\eta = \frac{2R^2 g(\mu_c - \mu_g)}{9v} = \frac{2 \times (0,0216/2)^2 \times 9,81 \times (1421 - 1260)}{9 \times 3,5 \times 10^{-2}} \Rightarrow \eta \approx 1,2 \text{ Pl}$$

### PhTr065. Portance d'une plaque (\*\*)

1. La portance est assurée par une pression plus grande au niveau de l'intrados. **L'intrados est associé à la courbe supérieure.**

2. On commence par déterminer la force perpendiculaire à la plaque résultant de la différence des pressions, ce qui revient à calculer  $F_N = \iint \Delta P \times dxdy$ , avec  $\vec{u}_y$  le vecteur directeur le long de l'envergure.

La différence de pression varie entre  $\Delta P = 2P_v$  et  $\Delta P \approx 0,3P_v$  le long de la plaque, estimons grossièrement une valeur moyenne  $\Delta P \approx P_v$ , en conséquence :

$$F_N \approx P_v \times L \times h = \frac{1,1 \times 45^2}{2} \times 0,076 \times 0,10 \Rightarrow F_N \approx 8,5 \text{ N}$$

La force de pression est évaluée sur la direction perpendiculaire à la plaque. La force de portance est par définition une force perpendiculaire à l'écoulement, il faut donc effectuer une projection selon la direction verticale dans le cas présent :

$$F_z = F_N \cos(\alpha) = 8,46 \times \cos(12) \Rightarrow F_z = 8,3 \text{ N}$$

La force précédente a été déterminée assez grossièrement, on peut sans doute se contenter d'un unique chiffre significatif, le résultat obtenu est comparable en ordre de grandeur avec la mesure du dynamomètre.

Pour une aile de longueur  $L$  et d'envergure  $h$ , le coefficient de portance est défini par :

$$C_z = \frac{F_z}{1/2 \times \rho u^2 \times hL} = \frac{7,1}{0,5 \times 1,1 \times 45^2 \times 0,076 \times 0,10} \Rightarrow C_z = 0,84$$

### PhTr061. Poussée d'Archimède et ascension (\*)

Pour que le ballon puisse décoller, il est nécessaire que la masse de fluide déplacé dépasse la masse du ballon (masse de la nacelle + masse du dihydrogène), ce qui se traduit à la limite par l'égalité :

$$\rho_{air} V = (m + m_{H_2}) = (m + \rho_{H_2} V)$$

On utilise alors la loi des gaz parfaits pour relier les masses volumiques à la pression :

$$\frac{p_0 M_{air}}{RT_0} V = m + \frac{p_0 M_{H_2}}{RT_0} V \text{ soit } m = \frac{p_0 V}{RT_0} (M_{air} - M_{H_2})$$

On en déduit que le volume doit être supérieur à :

$$V > \frac{mRT_0}{p_0} \left( \frac{1}{M_{air} - M_{H_2}} \right) = 90 \text{ m}^3$$

### PhTr069. Champ de pression dans l'atmosphère non isotherme (\*\*)

1. Partant de la relation affine entre altitude et température, on détermine la constante  $a$  :

$$a = \left( \frac{T_0 - T(z_1)}{T_0} \right) / z_1 = 2,3 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

2. Les trois équations à utiliser sont :

★ l'équation d'état du gaz supposé parfait :  $p = \frac{\rho RT}{M}$

★ l'équation de la statique des fluides :  $-\rho g = \frac{dp}{dz}$

★ la loi d'évolution de la température :  $T(z) = T_0(1 - az)$

On combine ces trois relations pour obtenir une équation différentielle liant la pression à l'altitude :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz = -\frac{Mg}{RT_0} \left( \frac{1}{1 - az} \right) dz = -\frac{1}{H} \frac{dz}{1 - az}$$

3. On intègre cette équation l'altitude variant de 0 à  $z$  et la pression de  $p_0$  à  $p(z)$  :

$$\ln \left( \frac{p(z)}{p_0} \right) = \frac{1}{Ha} \ln(1 - az) \quad \text{soit} \quad p(z) = p_0 e^{\left( \frac{1}{Ha} \ln(1 - az) \right)}$$

4. Au sommet de l'Everest  $p_1 = 0,32 \text{ atm}$

### PhTr070. Densimètre (\*\*)

1. À l'équilibre dans le dissolvant, le poids du densimètre est équilibré par la poussée d'Archimède exercée par le liquide sur le volume immergé  $V_{im}$  :

$$Mg = \rho_1 V_{im} g = \rho_1 (V + n_1 v) g \quad \text{donc} \quad M = \rho_1 (V + n_1 v)$$

On peut également traduire l'équilibre du densimètre dans l'eau qui s'écrit :

$$M = \rho_0 V$$

La comparaison des deux expressions conduit à l'égalité :

$$\rho_0 V = \rho_1 (V + n_1 v) \quad \text{donc} \quad v = \left( \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} \right) \frac{V}{n_1}$$

2. Application numérique pour le volume  $v$  :

$$v = \left( \frac{0,28}{0,72} \right) \frac{\frac{4}{3} \pi \times 12^3}{80} = 35,2 \text{ mm}^3$$

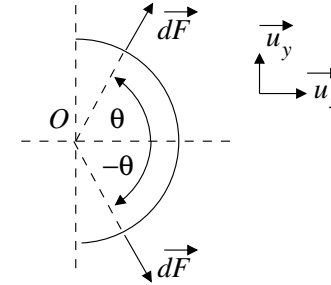
Pour un cylindre, volume  $v$ , hauteur  $l$  et rayon  $r$  sont reliés par la relation :

$$v = l \times \pi r^2 \quad \text{donc} \quad l = \frac{v}{\pi r^2} = \frac{35,2}{\pi \times 2,0^2} = 2,8 \text{ mm}$$

3. De la même manière qu'à la première question, l'équilibre exprimé dans l'eau et dans le benzène conduit à l'égalité :

$$\rho_b (V + n_2 v) = \rho_0 V \quad \text{donc} \quad d = \frac{\rho_b}{\rho_0} = \frac{1}{1 + \frac{n_2 v}{V}} = 0,88$$

### PhTr064. Force sur un barrage (\*\*)



★ De part la symétrie du barrage, on constate que la composante selon  $(Oy)$  de la force infinitésimale créée au voisinage de  $\theta$  est compensée par la composante selon  $(Oy)$  de la force infinitésimale créée au voisinage de  $-\theta$  ; il suffit donc de ne sommer que les composantes selon l'axe  $(Ox)$  des forces de pression.

★ La pression dans l'eau (intérieur du barrage) varie selon  $p = p_0 + \rho g z$  avec  $z$  la profondeur et  $p_0$  la pression atmosphérique ; la pression dans l'air (extérieur du barrage) est constante égale à  $p_0$  ; le barrage ne ressent que la surpression  $\Delta p(z) = p(z) - p_0 = \rho g z$ .

★ Considérons la force de pression s'exerçant à la profondeur  $z$  à  $dz$  près autour de l'angle  $\theta$  à  $d\theta$  près :

$$\delta \vec{F} = \Delta p(z) dS \vec{u}_r = \Delta p(z) dz R d\theta \vec{u}_r$$

★ Il faut alors intégrer pour déterminer la force totale en ne considérant que la projection selon  $Ox$  :

$$\delta F_x = \delta \vec{F} \cdot \vec{u}_x = \Delta p(z) dz R \cos \theta d\theta$$

$$F_x = \int_{z=0}^h \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \rho g z R dz \cos \theta d\theta$$

On peut alors considérer chaque intégrale indépendamment :

$$F_x = \int_{z=0}^h \rho g z dz \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \theta d\theta$$

$$F_x = \rho g \frac{h^2}{2} \times 2R = \rho g h^2 R$$

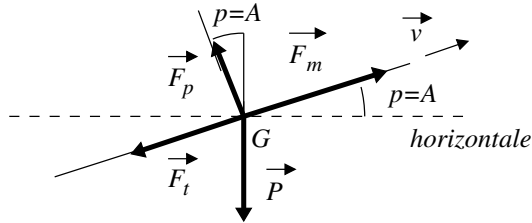
Ce qui donne pour l'expression de la force de pression sur le barrage :

$$\vec{F} = \rho g h^2 R \vec{u}_x$$

PhTr071. Mécanique du vol d'un avion (extrait CS TSI 2015)

Première partie : vol en montée

1. Pour une incidence nulle, l'assiette se confond avec la pente, ce qui donne pour le schéma des forces :



2. La trajectoire étant inertielle, les forces se compensent :

$$\vec{F}_m + \vec{F}_t + \vec{F}_p + \vec{P} = \vec{0}$$

Ce qui donne en projection :

→ sur l'axe longitudinal :  $F_m = F_t + mg \sin(A)$  (1)

→ sur l'axe perpendiculaire :  $F_p = mg \cos(A)$  (2)

3. Avec  $F_p = \frac{1}{2} \rho S C_p v^2$ , la relation (2) devient :

$$v = \sqrt{\frac{2mg \cos(A)}{\rho S C_p}}$$

4. La force de poussée et la vitesse étant colinéaires, la puissance motrice vaut :

$$P_m = \vec{F}_m \cdot \vec{v} \Rightarrow P_m = F_m \times v$$

D'après l'expression obtenue pour  $v$ , on constate que la formule proposée pour  $P_{m0}$  est bien le produit d'une force par une vitesse.

Application numérique :

→  $f_0 = \frac{0,24}{0,008}$   $f_0 = 30$

→  $P_{m0} = \frac{2,3 \times 10^3 \times 9,8}{30} \sqrt{\frac{2 \times 2,3 \times 10^3 \times 9,8}{1,2 \times 220 \times 0,24}}$   $P_{m0} \approx 20 \text{ kW}$

5. En se limitant à un développement à l'ordre 1 en  $A$  :

$$P_m = P_{m0} (1 + f_0 A)$$

Ce qui donne pour l'expression de  $A$  :

$$A = \frac{1}{f_0} \times \left( \frac{P_m - P_{m0}}{P_{m0}} \right) = \frac{1}{30} \times \frac{50 - 20,04}{20,04} = 49,8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

On en déduit  $A \approx 2,9^\circ$ .

6. La vitesse ascensionnelle représente la composante verticale de la vitesse :

$$v_z = v \sin(A)$$

Application numérique :

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 2,3 \times 10^3 \times 9,8 \times \cos(2,86)}{1,2 \times 220 \times 0,24}} \Rightarrow v = 26,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Et donc pour la vitesse ascensionnelle  $v_z \approx 1,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

7.  $\eta = \frac{F_p}{mg} = \cos(A)$ . Le facteur de charge est inférieur à 1, on reste dans la norme autorisée.

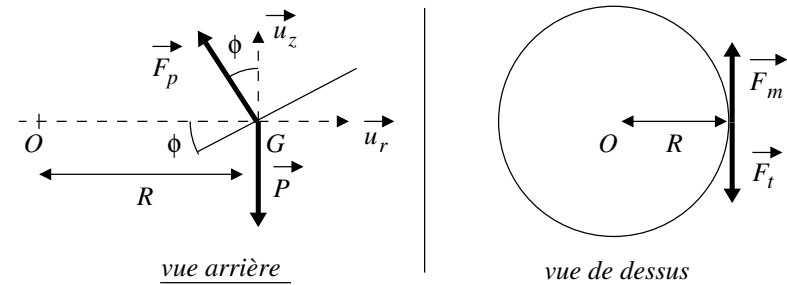
Seconde partie : Vol en virage

1. La deuxième loi de Newton appliquée à l'avion conduit à :

$$m\vec{a} = \vec{F}_m + \vec{F}_t + \vec{P}$$

La trajectoire n'étant plus rectiligne, le vecteur accélération est non nul!

2. Schéma :



Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est radiale égale à :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r.$$

→ Projection selon la radiale :  $-m \frac{v^2}{R} = -F_p \sin(\Phi)$

→ Projection selon la verticale :  $mg = F_p \cos(\Phi)$

Le rapport des deux relations conduit à :

$$\frac{mv^2/R}{mg} = \tan(\Phi) \Leftrightarrow R = \frac{v^2}{g \tan(\Phi)}$$

$$3. \eta = \frac{F_p}{mg} \Rightarrow \boxed{\eta = 1/\cos(\Phi)}$$

4. On veut  $\eta \leq \eta_{max}$ , ce qui impose :  $\cos \Phi \geq 1/\eta_{max}$ , avec  $\eta_{max} = 2$ , on en déduit  $\boxed{\Phi \leq \Phi_l = 60^\circ}$ .

La relation liant  $R$  et  $\Phi$  montre que l'angle  $\Phi$  diminue quand le rayon augmente. Le rayon doit être suffisamment grand pour que l'angle soit suffisamment faible. En se plaçant pour le cas limite et la vitesse précédemment obtenue :

$$R_{min} = \frac{v^2}{g \tan(\Phi_l)} = \frac{26,7^2}{9,8 \times \tan(60)} \Rightarrow \boxed{R_{min} \approx 42 \text{ m}}$$

### PhTr072. Fuite dans une cuve (\*\*)

1. Associons à chaque terme de la formule une expression :

→ L'épaisseur de fissure est nécessairement très inférieure à sa longueur, en conséquence, par rapport à la formule proposée :  $l_1 = l$  et  $l_2 = d$ ; de plus  $L$  représente l'épaisseur  $e$  de la cuve.

→ En dehors de la cuve, la pression peut être assimilée à la pression atmosphérique, la différence de pression représente la surpression de la colonne d'eau que l'on peut prendre égale à 2,9 m en moyenne sur la durée de l'expérience :

$$\Delta P = 10^3 \times 9,81 \times 2,9 = 2,85 \times 10^4 \text{ Pa}$$

→ Le débit volumique moyen est le rapport du volume perdu sur la durée :

$$D_v = \frac{5 \times 4 \times 0,2}{2 \times 30 \times 24 \times 3600} = 0,77 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

On en déduit :

$$D_v = \frac{l \times d^3 \times \Delta P}{12\eta e} \Leftrightarrow d^3 = \frac{D_v \times 12\eta \times e}{l \times \Delta P}$$

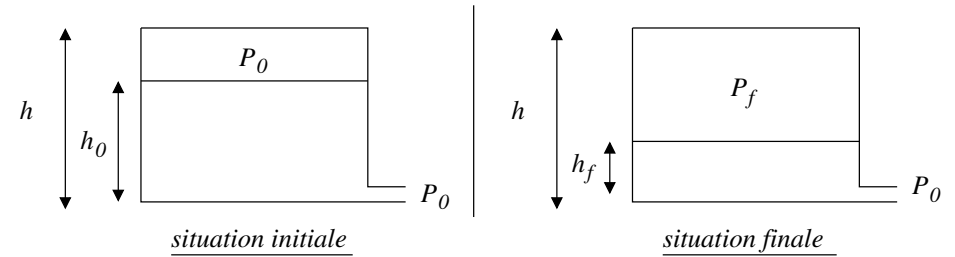
Application numérique :

$$d = \sqrt[3]{\frac{0,77 \times 10^{-6} \times 12 \times 10^{-3} \times 0,2}{0,1 \times 2,85 \times 10^4}} \Rightarrow \boxed{d = 8,7 \times 10^{-5} \text{ m}}$$

Compte tenu des approximations effectuées, on peut estimer l'épaisseur de la fissure au  $1/10^e$  de millimètre.

2. La cuve étant maintenant fermée, la pression dans la cuve diminue au fur et à mesure de la perte d'eau.

La perte d'eau prend fin lorsque la pression au bas de la cuve est égale à la pression atmosphérique. Du fait de la viscosité, le liquide ne peut alors plus s'écouler dans la fissure.



L'arrêt de l'écoulement de l'eau est caractérisé par l'équation :

$$P_f + \mu g h_f = P_0$$

Au sein de l'air de la cuve, on peut supposer l'évolution isotherme, ce qui permet d'écrire :

$$P_f V_f = P_0 V_0 \Rightarrow P_f (h - h_f) = P_0 (h - h_0)$$

En conséquence :

$$\frac{P_0 \times (h - h_0)}{h - h_f} + \mu g h_f = P_0 \Leftrightarrow \mu g h_f^2 - h_f (\mu g h + P_0) + P_0 h_0 = 0$$

C'est à dire numériquement :  $9,81 \times 10^3 \times h_f - h_f \times 1,29 \times 10^5 + 2,8 \times 10^5 = 0$

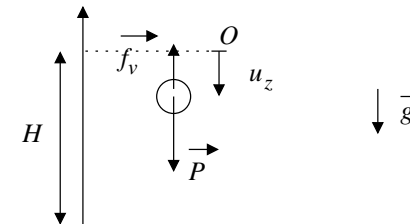
On retient la solution  $h_f = 2,74 \text{ m}$ , c'est à dire une baisse d'eau de 6 cm correspondant à un volume :

$$V = 5 \times 4 \times 0,06 \Rightarrow \boxed{V = 1,2 \text{ m}^3}$$

### PhTr112. Boule de pétanque, balle de tennis (\*\*\*)

Modélisation et idées physiques :

On assimile la balle de tennis et la boule de pétanque à des sphères de rayon  $r \approx 3 \text{ cm}$ , avec une masse de l'ordre de  $m_T = 70 \text{ g}$  et  $m_p = 7,0 \times 10^2 \text{ g}$  tombant d'une hauteur  $H = 10 \text{ m}$ .



Pour toute la suite, on négligera la poussée d'Archimède vis à vis du poids, la densité de l'air étant très inférieure à celle des balles.

En l'absence de frottements, l'arrivée serait simultanée; en effet, si on ne tient compte que du poids, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'une

des sphères dans le référentiel terrestre conduit à une accélération indépendante de la masse :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Prenons maintenant en compte les frottements et commençons par évaluer le nombre de Reynolds dans l'air pour des vitesses de l'ordre du mètre par seconde :

$$Re = \frac{\rho_{air} \times 2r \times v}{\eta} \approx \frac{1,2 \times 2 \times 3,0 \times 10^{-2} \times 1}{10^{-5}} \approx 7 \times 10^4 \gg 1$$

On adopte alors un modèle quadratique pour la force de frottements, de la forme :

$$\vec{f}_v \approx -\frac{1}{2} \underbrace{C_x}_{\approx 1} \times S v^2 \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad S = \pi r^2$$

L'accélération devient alors :

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{C_x \rho_{air} \pi r^2 v^2}{2m} \vec{u}_z$$

**La valeur absolue du terme de frottement, terme correctif, est une fonction décroissante de la masse ; l'effet de frottement est donc plus faible pour la boule de pétanque qui arrivera la première au niveau du sol.**

*Mise en équation et calculs :*

L'équation différentielle sur la vitesse prend la forme :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{C_x \rho_{air} \pi r^2}{2m} \times v^2 = g - \frac{v^2}{\ell}$$

avec  $\ell = \frac{2m}{C_x \rho_{air} \pi r^2}$  une longueur.

En introduisant  $v_{lim}^2 = g\ell$ , qui représente la vitesse limite, l'équation prend la forme simplifiée :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v^2}{\ell} = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_{lim}^2} \right)$$

On introduit alors la variable  $u = v/v_{lim}$  qui vérifie :

$$v_{lim} \frac{du}{dt} = g \times (1 - u^2) \Leftrightarrow \frac{du}{1 - u^2} = \frac{g}{v_{lim}} dt$$

À l'instant initial, une vitesse nulle impose  $u = 0$ , ce qui donne par intégration :

$$\int_{u=0}^u \frac{d\tilde{u}}{1 - \tilde{u}^2} = \frac{g}{v_{lim}} \times t \Rightarrow \operatorname{argth}(u) = \frac{t}{\tau}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{v_{lim}}{g} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\text{On en déduit } u(t) = \frac{v(t)}{v_{lim}} = \operatorname{th} \left( \frac{t}{\tau} \right) \Rightarrow \boxed{v(t) = v_{lim} \operatorname{th} \left( \frac{t}{\tau} \right)}$$

Avec  $z(0) = 0$ , on en déduit par intégration :

$$\frac{dz}{dt} = v_{lim} \times \frac{\operatorname{sh}(t/\tau)}{\operatorname{ch}(t/\tau)} \Rightarrow z(t) = v_{lim} \tau \ln \left( \operatorname{ch} \left( \frac{t}{\tau} \right) \right)$$

Ce qui donne pour le temps de chute  $t_c$  sur une hauteur  $H$  :

$$t_c = \tau \times \operatorname{argch} \left( \exp \left( \frac{H}{v_{lim} \tau} \right) \right)$$

**Application numérique et analyse :**

Avec les valeurs numériques proposées :

	$v_{lim}$ (m · s <sup>-1</sup> )	$\tau$ (s)	$t_c$ (s)
balle de tennis	20,1	2,1	1,49
boule de pétanque	63,6	6,5	1,43

**La balle de tennis arrive environ 60 ms après la boule de pétanque ce qui semble perceptible.**