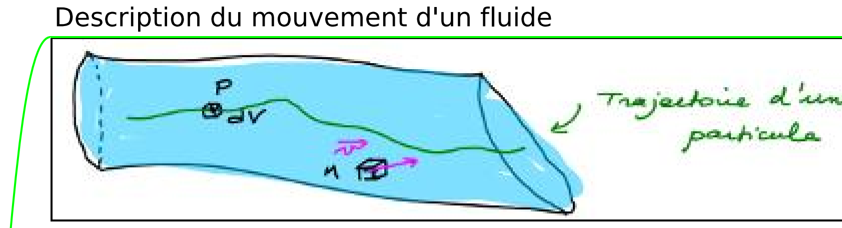
Fluides en écoulement

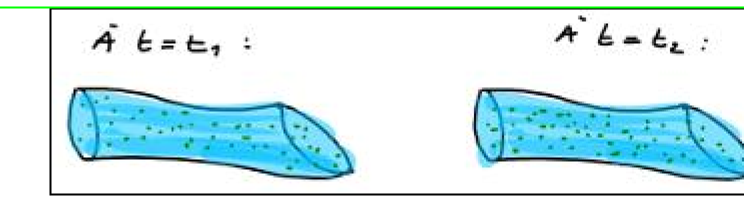
Modélisation d'un fluide

- Un fluide est un milieu matériel **continu**, **déformable**, et **qui peut s'écouler**.
- Une **particule de fluide** est de **taille mésoscopique**, soit grande à l'échelle microscopique et petite à l'échalle macroscopique.
  $\ell^3 << \mathrm{d}V << L^3$
- Typiquement
  $\mathrm{d}V \sim 1\ \mu\mathrm{m}^3$
- **Masse volumique**
  $\mu = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$

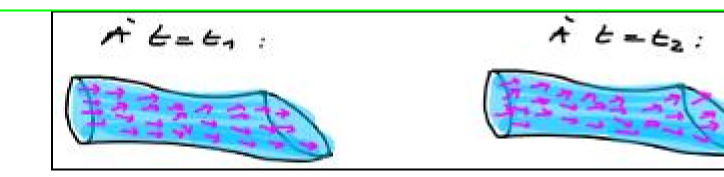
Description du mouvement d'un fluide



- **Description lagrangienne :** on suit le mouvement de <u>chaque</u> particule P de fluide.



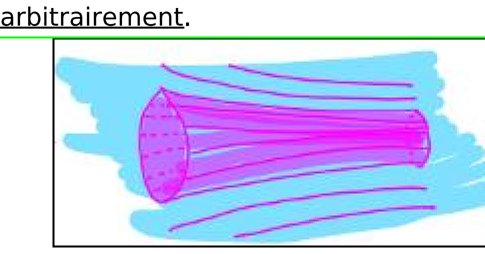
- **Description eulérienne :** on étudie les caractéristiques des particules qui passent en <u>chaque point</u> M de fluide.



- Une **ligne de courant** est une courbe <u>tangente</u> en chacun de ses points et à tout instant au vecteur vitesse.

- Au cours du temps, une trajectoire se forme alors qu'une ligne de courant se déforme.

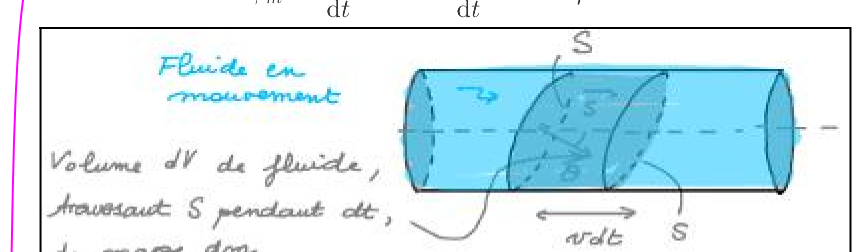
- Un **tube de courant** est une surface engendrée par les lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé <u>choisi arbitrairement</u>.



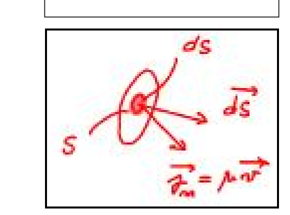
Caractéristiques du mouvement d'un fluide

Débit massique

$\phi_m = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mu\ v\mathrm{d}t\ S\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \mu\vec{v}\cdot\vec{S}$



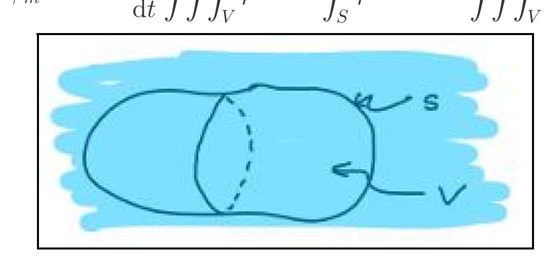
- **Vecteur densité de flux massique**
  $\boxed{\vec{j}_m = \mu\vec{v}}$
- Flux massique ou **débit massique**
  $\boxed{\phi_m = \iint_S \vec{j}_m\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$



  - Champ uniforme
    $\boxed{\phi_m = \vec{j}_m\cdot\vec{S}}$

Bilan de masse

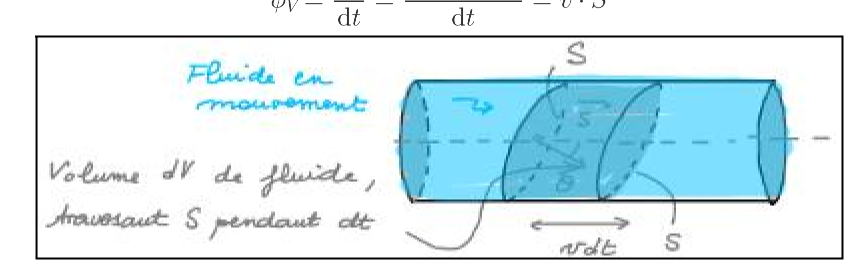
$-\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \phi_m$ soit $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \mu\mathrm{d}V = \oint_S \mu\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\mu\vec{v})\mathrm{d}V$



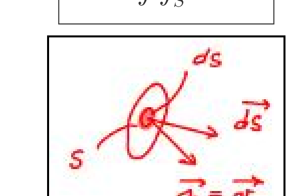
- Équation locale de conservation de la masse
  $\boxed{\dfrac{\partial\mu}{\partial t} + \mathrm{div}(\mu\vec{v}) = 0}$

Débit volumique

$\phi_V = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v\mathrm{d}t\ S\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\vec{S}$



- Flux volumique ou **débit volumique**
  $\boxed{\phi_V = \iint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$



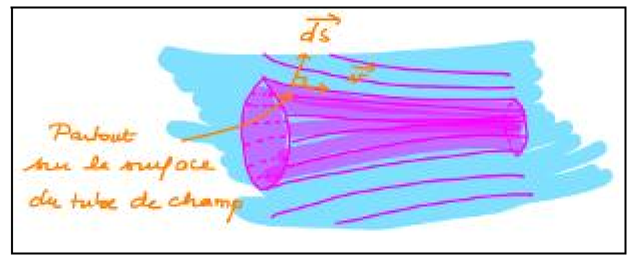
  - Champ uniforme
    $\boxed{\phi_V = \vec{v}\cdot\vec{S}}$

Lois de conservation

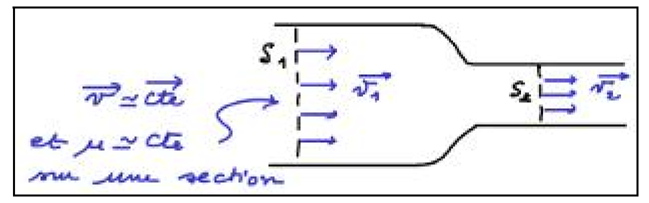
Écoulement stationnaire

$\dfrac{\partial\mu}{\partial t} = 0$ soit $\boxed{\mathrm{div}(\mu\vec{v}) = 0}$

- Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.
- **Conservation du débit massique dans un tube de courant**
  $\phi_m = \oint_S \mu\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\mu\vec{v})\ \mathrm{d}V = 0$
  $\boxed{\phi_{m,\mathrm{entrant}} = \phi_{m,\mathrm{sortant}}}$



- Exemple
  $\mu_1 v_1 S_1 = \mu_2 v_2 S_2$

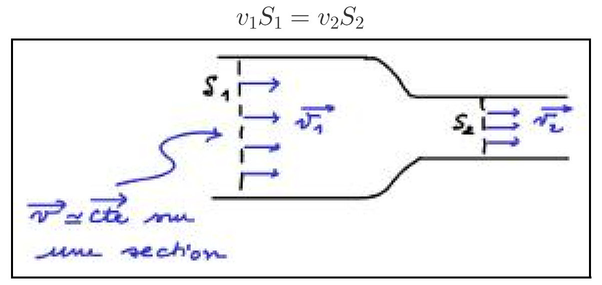


Écoulement incompressible et homogène

$\dfrac{\partial\mu}{\partial t} = 0$ soit $\mathrm{div}(\mu\vec{v}) = 0 = \mu\ \mathrm{div}\ \vec{v} + (\mathrm{grad}\mu)\cdot\vec{v} = \mu\ \mathrm{div}\ \vec{v}$

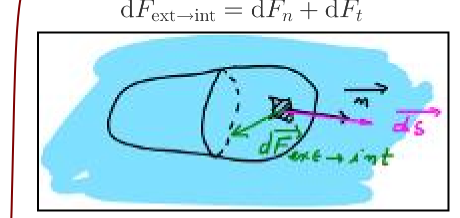
$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{v} = 0}$

- Masse volumique constante et uniforme
- **Conservation du débit volumique dans un tube de courant**
  $\phi_V = \oint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{v}\ \mathrm{d}V = 0$
  $\boxed{\phi_{V,\mathrm{entrant}} = \phi_{V,\mathrm{sortant}}}$
- Exemple
  $v_1 S_1 = v_2 S_2$



Actions de contact sur un fluide

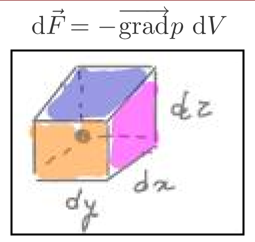
$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{int}} = \mathrm{d}\vec{F}_n + \mathrm{d}\vec{F}_t$



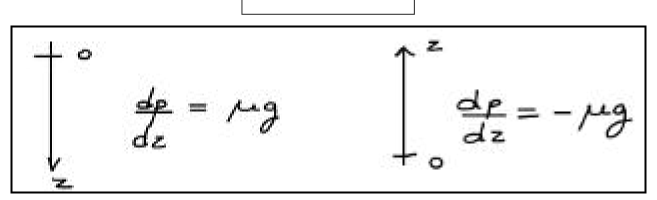
Composante normale : **force de pression**

$\mathrm{d}\vec{F}_n = -p\ \mathrm{d}\vec{S}$

- Résultante des forces
  $\boxed{\vec{F}_{\mathrm{tot}} = \iint_S -p_{\mathrm{tot}}\ \mathrm{d}\vec{S}}$
- Cas d'une **particule** de fluide : force **volumique** de pression
  $\mathrm{d}\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}p\ \mathrm{d}V$



  - **Équation locale de la statique des fluides**
    $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}p = \mu\ \vec{g}}$

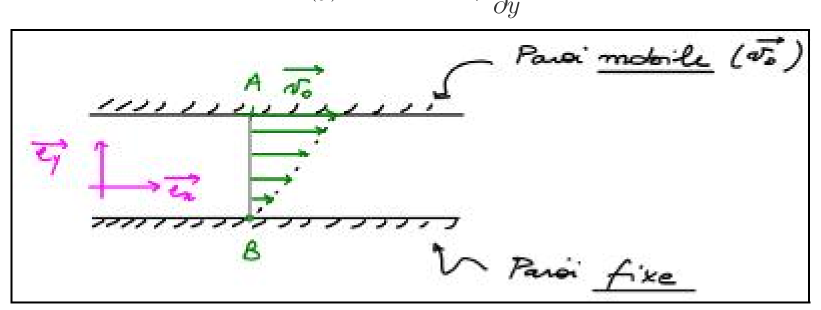


- Poussée d'Archimède
  $\boxed{\vec{F}_A = -\mu_{\mathrm{fluide}}V_{\mathrm{corps}}\ \vec{g}}$
- Exemples

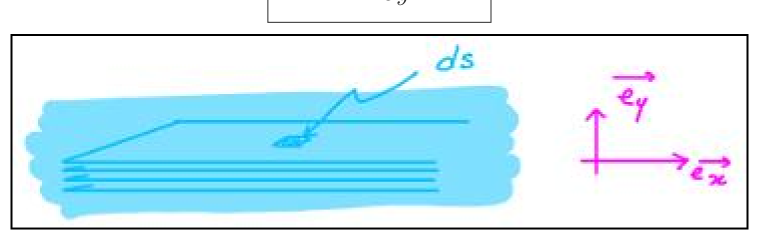
Composante tangentielle : **force de viscosité**

$\mathrm{d}\vec{F}_t = \eta\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}S\ \vec{e}_x$

- Écoulement de Couette plan
  $\vec{v} = v(y)\ \vec{e}_x$ et $\vec{F}_t = \eta\ \dfrac{\partial v}{\partial y}S\ \vec{e}_x$



- **Loi de Newton :** dans un écoulement <u>parallèle</u>, une couche de fluide supérieure exerce sur une surface élémentaire d'une couche de fluide inférieure une force
  $\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_t = \eta\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}S\ \vec{e}_x}$



  - On parle de **fluides newtoniens**.
- **Coefficient de viscosité dynamique**
  η
  - Unité : le **Poiseuil**
    $\mathrm{P}\ell$ (ou Pa.s)
- **Condition d'adhérence :** au contact d'une paroi, la vitesse du fluide est nulle.
  $\boxed{\vec{v} = \vec{0}}$