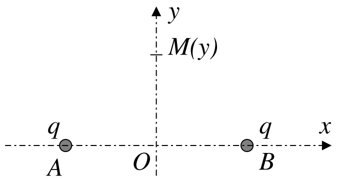
Lycée Naval, Spé 2.

TD07 : électrostatique

Charges ponctuelles et cartes de champ

EM001. Potentiel dans le plan médiateur d'un doublet (*)

Deux charges ponctuelles identiques égales à q sont placées en A et B sur l'axe (Ox) à une distance a de part et d'autre du point O. On note V le potentiel électrostatique créé en un point M de l'axe (Oy) par ces deux charges.

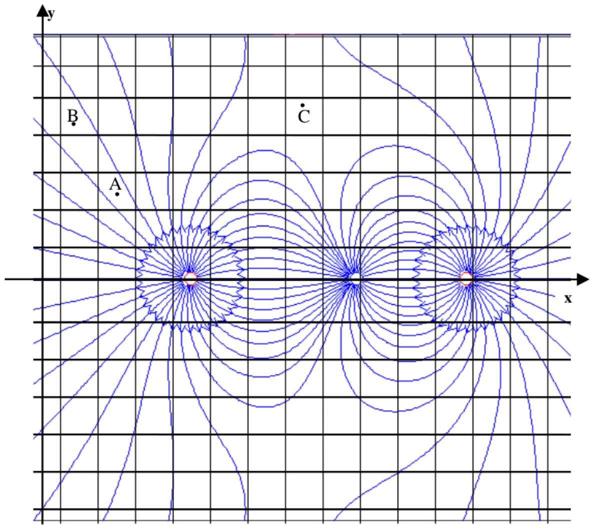


1. Exprimer le potentiel $V(y)$ au point M en fonction de q, a et y.
2. En déduire l'expression du champ électrostatique au point M.
3. Déterminer directement le champ électrostatique en utilisant l'expression du champ créé par une charge ponctuelle.

Réponses : 1 : $V(M)=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+y^2}}$; 2 : $\vec{E}(M)=\dfrac{qy}{2\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{3/2}}\vec{u}_y$

EM013. Analyse d'une carte de champ (*)

La figure suivante représente les lignes du champ électrostatique créé par des fils très longs, uniformément chargés, perpendiculaires au plan de la figure.



1. Où sont situés les points d'intersection des fils avec le plan de la figure ? Quel est le signe de la charge de chacun d'entre eux ?
2. Quel est le signe de la charge totale ?
3. La norme du champ en A est de $100\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$. Calculer une valeur approchée du champ en B.

Réponses : 2 : charge totale positive ; 3 : $E_B \approx 50\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

Théorème de Gauss

EM014. Cylindre chargé en surface (**)

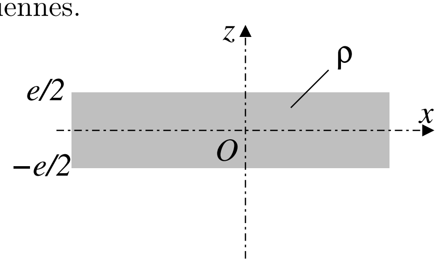
On considère un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R portant une densité surfacique de charge σ uniforme.

1. Déterminer les symétries du champ $\vec{E}$.
2. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
3. Vérifier la relation de passage à la traversée du cylindre, c'est à dire :
$$\vec{E}(R_+)-\vec{E}(R_-)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_r$$
4. Donner l'expression du potentiel électrostatique V en tout point de l'espace. On choisira $V(R)=V_0$.
Montrer en particulier que V est uniforme à l'intérieur du cylindre.

Réponses : 2 : pour $r<R$, $\vec{E}(r)=\vec{0}$; pour $r>R$, $\vec{E}(r)=\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$;
4 : pour $r<R$, $V(r)=V_0$; pour $r>R$, $V(r)=V_0+\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{R}{r}\right)$

EM004. Champ créé par une couche uniformément chargée (**)

Une couche plane infinie d'épaisseur e est délimitée par les plans $z=-e/2$ et $z=+e/2$. Elle est chargée avec la densité volumique uniforme ρ. On note $\vec{E}$ le champ électrostatique créé par la couche en tout point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cartésiennes.



1. Montrer que le champ électrostatique est *a priori* de la forme $\vec{E}=E(z)\vec{u}_z$.
2. Que peut-on dire de $E(z)$ et $E(-z)$? Justifier.

3. En utilisant la surface de Gauss adéquate, exprimer $E(z)$. On distinguera les cas où le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur de la couche plane.
4. Tracer l'allure de la fonction $E(z)$.
5. On fait tendre l'épaisseur de la couche plane vers $e \to 0$ et la charge $\rho \to \infty$, de manière à se ramener au plan (xOy) portant la densité surfacique de charge $\sigma = \rho e$. Exprimer, en fonction de σ, le champ électrostatique $\vec{E}'$ créé par ce plan et retrouver le résultat du cours.

Réponses : 2 : $E(z) = -E(-z)$; 3 : pour $z > e/2$, $E(z) = \dfrac{\rho e}{2\varepsilon_0}$; pour $0 < z < e/2$, $E(z) = \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}$; 5 - $z > 0$ $\vec{E}' = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$; $z < 0$ $\vec{E}' = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$

EM119. Énergie électrostatique (**)

Comparer l'énergie électrostatique $\mathcal{E}$ du proton à son énergie de masse $\mathcal{E}_m$.

Données : $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C et $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1}.

Réponse : $\mathcal{E} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

EM142. Boule chargée en volume (ESM 2019,**)

On considère une distribution sphérique de charges. On note ρ la densité volumique de charges qui vérifie :

$$\forall\, r \in [0, a/2], \quad \rho(r) = 0 \quad ; \quad \forall\, r \in [a/2, a], \quad \rho(r) = Ar \quad ; \quad \forall\, r > a, \quad \rho(r) = 0$$

avec A une constante.

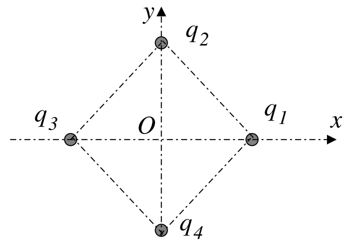
1. Énoncer le théorème de Gauss. Est-il valable en régime variable ?
2. Représenter la distribution de charges.
3. Exprimer la charge contenue dans une sphère de rayon r.
4. En déduire le champ électrostatique en tout point point de l'espace.

Réponses : 3 : $r < a/2$, $Q(r) = 0$; $r \in]a/2, a[$, $Q(r) = \pi A \times \left[r^4 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^4\right]$; $r > a$, $Q(r) = \dfrac{15\pi A}{16} \times a^4$; 4 : $r < a/2$, $\vec{E}(r) = \vec{0}$; $r \in]a/2, a[$, $\vec{E}(r) = \dfrac{A}{4\varepsilon_0} \times \left[r^2 - \dfrac{1}{r^2} \times \left(\dfrac{a}{2}\right)^4\right]$; $r > a$, $\vec{E}(r) = \dfrac{15A}{64\varepsilon_0 r^2} \times a^4$.

Théorème de superposition

EM015. Charges aux sommets d'un carré (*)

Aux sommets d'un carré de côté a et de centre O, situé dans le plan (xOy), sont placées des charges ponctuelles q_1, q_2, q_3 et q_4 comme indiqué sur la figure.



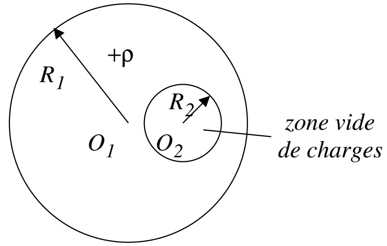
En utilisant les symétries, exprimer le champ $\vec{E}$ au centre du carré dans les cas suivants :

1. $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$.
2. $q_1 = q_3 = q$ et $q_2 = q_4 = -q$.
3. $q_1 = q_2 = q_3 = q$ et $q_4 = 2q$; on utilisera le théorème de superposition pour limiter au maximum les calculs.

Réponses : 1 : $\vec{E}(O) = \vec{0}$; 2 : $\vec{E}(O) = \vec{0}$; 3 : $\vec{E}(O) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

EM006. Champ dans une cavité sphérique (**)

On considère une boule de centre O_1 et de rayon R_1, uniformément chargée en volume (densité ρ). On creuse à l'intérieur de celle-ci une boule de centre O_2 et de rayon R_2. La distribution de charges constituée par la boule évidée a l'allure ci-après.



Déterminer le champ électrostatique régnant dans la cavité vide de charges.
Indication : on pourra considérer la sphère évidée comme la superposition de deux boules l'une de charge volumique $-\rho$, l'autre de charge volumique $+\rho$, et appliquer deux fois le théorème de Gauss.

Réponse : $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$

Condensateurs

EM017. Condensateur sphérique (**)

On considère deux électrodes conductrices sphériques concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2.
La sphère intérieure est au potentiel $V_1 > 0$, la sphère extérieure au potentiel V_2

nul.
On appelle Q la charge portée par la sphère intérieure.

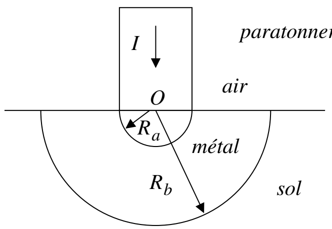
1. Montrer que le champ électrique est de la forme :
$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$
2. Montrer que pour $R_1 < r < R_2$:
$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
3. Intégrer cette relation et en déduire la capacité de ce condensateur sphérique.
4. Exprimer le champ électrique en fonction de R_1, R_2, r et V_1 au sein du condensateur.
5. Pour éviter une étincelle de rupture, le champ électrique entre les armatures ne doit pas dépasser une valeur limite E_d. Déterminer la valeur maximale V_d de la différence de potentiel autorisée entre les armatures. On exprimera V_d en fonction de R_1, R_2 et E_d.
6. En partant de la densité d'énergie électrique, déterminer l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur. Retrouver alors la capacité du condensateur.

Réponses : 3 : $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$; 4 : $\vec{E} = \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\dfrac{V_1}{r^2}\vec{u}_r$; 5 : $V_1 < V_d = \dfrac{E_d R_1 (R_2 - R_1)}{R_2}$; 6 : $\mathcal{E}_e = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1^2$

Pour aller plus loin

EM018. Prise de terre (D'après CCP, PSI, 2015 ***)

Une prise de terre est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur R_a, et de rayon extérieur R_b. On note, γ_{met} la conductivité électrique du métal qui la constitue. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé au demi-espace $z < 0$ et de conductivité électrique γ_{sol}.



La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques R_{met} et R_{sol}, l'une en métal de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b, l'autre associée au sol de rayon intérieur R_b et de rayon extérieur infini. Elle est destinée à recevoir un courant I provenant d'un paratonnerre. Il sera supposé indépendant du temps et descendant.

On suppose que le courant, qui traverse la prise de terre, est radial. Sa densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.

1. Rappeler l'unité de la grandeur $j(r)$. Donner l'expression de la densité de courant $j(r)$ en fonction de I et de r.
2. Exprimer alors le champ électrique $E(r)$ régnant dans le sol.
3. En déduire en fonction de I, r et γ_{sol}, l'expression du potentiel électrique $V(r)$ régnant dans le sol. On supposera un potentiel nul à l'infini.
4. Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux.
On appelle R_h, la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de a.
Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée : I_{max}), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à D de la prise de terre.
   (a) Trouver une relation entre D, a, R_h, I, I_{max} et γ_{sol}.
   (b) En supposant $D \gg a$, exprimer D en fonction de a, R_h, I, I_{max} et γ_{sol}.
   (c) Application numérique : évaluer D pour $I = 5,0 \times 10^4$ A, avec : $I_{max} = 25$ mA, $a = 1,0$ m, $\gamma_{sol} = 1,0 \times 10^{-2}$ S $\cdot$ m^{-1} et $R_h = 2,5$ kΩ.
   (d) Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux,...) ou les petits animaux (lapins, renards,...) ?
5. Expression de la résistance d'une coque hémisphérique
On considère une coque hémisphérique homogène de conductivité électrique γ, comprise entre les rayons R_{int} et R_{ext} et parcourue par un courant radial. On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$.
   (a) Exprimer en fonction de γ, r et $\mathrm{d}r$, la résistance élémentaire δR_c d'une coque hémisphérique élémentaire.
   (b) En déduire en fonction de γ, R_{int} et R_{ext}, la résistance totale R_c de la coque hémisphérique.
6. Résistance de la prise de terre
   (a) Donner l'expression de la résistance globale, notée R_{glob} de la prise de terre en fonction de γ_{met}, γ_{sol}, R_a et R_b.

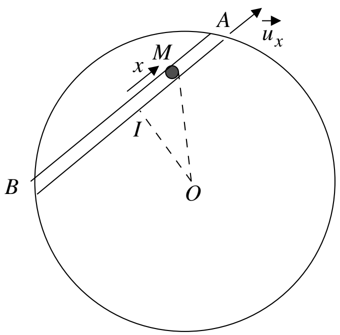
(b) Application numérique : évaluer R_{glob} pour $R_a = 1,0$ cm, $R_b = 35$ cm, $\gamma_{met} = 6,0 \times 10^7$ S $\cdot$ m^{-1}.

(c) La législation en terme de sécurité électrique impose que $R_{glob} < 25\ \Omega$, est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

Réponses : 1 : $j(r) = \dfrac{I}{2\pi r^2}$; 2 : $E(r) = \dfrac{I}{2\pi\gamma_{sol} r^2}$; 3 : $V(r) = \dfrac{I}{2\pi\gamma_{sol} r}$;
4(a) : $R_h I_{max} = \dfrac{I}{2\pi\gamma_{sol}} \times \dfrac{a}{D(D+a)}$; 4(b) : $D = \sqrt{\dfrac{I \times a}{2\pi\gamma_{sol} R_h I_{max}}}$; 4(c) : $D \approx 1,1 \times 10^2$ m ;
5(a) : $\delta R_c = \dfrac{\mathrm{d}r}{\gamma \times 2\pi r^2}$; 5(b) : $R_c = \dfrac{1}{2\pi\gamma}\left[\dfrac{1}{R_{int}} - \dfrac{1}{R_{ext}}\right]$;
6(a) : $R_{glob} = \dfrac{1}{2\pi\gamma_{met}}\left[\dfrac{1}{R_a} - \dfrac{1}{R_b}\right] + \dfrac{1}{2\pi\gamma_{sol}}\dfrac{1}{R_b}$; 6(b) : $R_{glob} \approx 45\ \Omega$

EM019. Tunnel foré dans le globe terrestre (***)

On assimile la Terre à une boule de centre O, de rayon R_T et de masse volumique uniforme ρ. L'intensité du champ de gravitation est notée $\mathcal{G}_0$ à la surface terrestre. Un long tunnel rectiligne est creusé entre deux points A et B situés à la surface de la Terre. Un wagon placé sur un rail dans le tunnel est susceptible de se mouvoir sans frottement. Il est assimilé à un point matériel M de masse m. Sa position est repérée par son abscisse $x(t)$ mesurée par rapport au milieu I du tunnel, ou par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.



1. Montrer qu'en tout point M à l'intérieur du globe terrestre, le champ de gravitation est :
$$\vec{\mathcal{G}} = -\frac{\mathcal{G}_0}{R_T}\overrightarrow{OM}$$
2. En supposant le référentiel terrestre galiléen, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
3. Quelle est la nature du mouvement du wagon ? Déterminer la période T_0 des oscillations. Quelle est la propriété remarquable ?
4. Calculer la durée nécessaire au wagon pour relier les points A et B, le wagon étant abandonné sans vitesse en A.

<u>Données</u> : $\mathcal{G}_0 = 9,8$ m $\cdot$ s^{-2} et $R_T = 6400$ km.

Réponses : 2 : $\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{\mathcal{G}_0}{R_T}$; 3 : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_T}{\mathcal{G}_0}}$; 4 : $T_0 \approx 2,5 \times 10^3$ s.

EM128. État électrique d'un électrolyte (**)

Le demi-espace métallique $z < 0$ est porté au potentiel uniforme $V_0 > 0$. Le demi-espace $z > 0$ est rempli d'un électrolyte constitué de cations K^+ et d'anions A^-. Le problème étant invariant par translation selon (Ox) et (Oy), le potentiel $V(z)$ ne dépend que de z.
À l'équilibre thermodynamique à la température T, les densités volumiques d'ions (cations et anions) dans l'électrolyte sont données par des facteurs de Boltzmann :
$$n_+(z) = n_0 \exp\left(\frac{-eV(z)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_-(z) = n_0 \exp\left(+\frac{eV(z)}{k_B T}\right)$$

1. Citer un autre contexte où on voit apparaître un facteur de Boltzmann. Préciser la signification physique de cette loi.
2. Exprimer la densité volumique de charges $\rho(z)$ en fonction de e, $V(z)$, n_0, k_B et T.
En déduire que le potentiel $V(z)$ est, sous réserve que $e\,|V(z)| \ll k_B T$, solution d'une équation de la forme :
$$\frac{\mathrm{d}^2 V(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{V(z)}{D^2} = 0$$
où D est une constante qu'on explicitera en fonction de ε_0, k_B, T, n_0 et e.
3. Déterminer $V(z)$ en fonction de V_0, z et D sachant que $\lim\limits_{z \to +\infty} V(z) = 0$.
4. En déduire l'expression du champ électrostatique dans l'électrolyte en fonction de V_0, z et D.
Pourquoi parle-t-on d'écrantage du champ ?

On rappelle que la relation de passage du champ électrique est donnée par $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$.

5. Déterminer la charge Q_1 présente sur une section S à la surface du conducteur métallique.
6. Déterminer de même la charge Q_2 présente dans le domaine $z > 0$ sur la même section droite S. Conclusion.

Réponses : 2 : $\rho(z) = -2en_0 \times \mathrm{sh}\left(\dfrac{eV(z)}{k_B T}\right)$, $D^2 = \dfrac{\varepsilon_0 k_B T}{2e^2 n_0}$; 3 : $\forall z \geq 0$, $V(z) = V_0 e^{-z/D}$;
4 : $\vec{E} = \dfrac{V_0}{D} e^{-z/D}\vec{u}_z$; 5 : $Q_1 = \dfrac{\varepsilon_0 V_0}{D} S$; 6 : $Q_2 = \dfrac{-\varepsilon_0 V_0 S}{D}$.