

## TD03 : Électronique numérique, modulation

### Elec052. Conditions de Shannon (\*).

$$1. T_e = 1/f_e = 1/(20 \times 10^3) \Rightarrow T_e = 50 \mu s.$$

L'intervalle minimal en fréquence vaut  $f_e/N = 20 \text{ kHz}$ .

La fréquence maximale du signal échantillonné ne doit pas dépasser **10 kHz**. Pour diminuer l'intervalle minimal entre deux raies, il faut **augmenter le nombre de points  $N$** .

Pour échantillonner un signal de fréquence plus élevée, il faut augmenter  $f_e$ .

$$2. \text{ On peut choisir } f_e = 20 \text{ kHz} \text{ et } N = 4096, \text{ ainsi } f_e > 2f_{max} \text{ (critère de Shannon) et } f_e/N \approx 5 \text{ Hz, les deux raies seront séparées.}$$

### Elec053. Signal créneau et critère de Shannon (\*\*).

→ Le spectre d'un signal créneau ne devrait comporter que le fondamental  $\omega_0$  et les harmoniques impairs du type  $(2k+1)\omega_0$  avec des amplitudes proportionnelles à  $1/(2k+1)$ .

→ Pour ce signal de fréquence fondamentale 100 Hz, on devrait donc détecter une raie à 100 Hz et une raie à 300 Hz dans l'intervalle  $[0, 450 \text{ Hz}]$  si le signal était correctement échantillonné.

→ La fréquence d'échantillonnage étant de 900 Hz,  $f_e/2 = 450 \text{ Hz}$ , et on observe un **repliement du spectre pour les harmoniques à 500 Hz et à 700 Hz**.

La fréquence à 500 Hz se replie, autour de 450 Hz, sur 400 Hz et celle de 700 Hz sur 200 Hz, ce qui fait apparaître de **raies parasites à 200 Hz et 400 Hz sur le spectre**.

### Elec055. Modulation d'amplitude (\*\*).

1. On suppose que les ALI sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire (rétroaction sur la borne inverseuse).

On s'intéresse au premier ALI,  $v_- = v_+ = 0$  et on applique la loi des nœuds au niveau de la borne inverseuse. Ce qui donne en termes de potentiel :

$$\frac{u_m - v_-}{R} + \frac{E - v_-}{R} = \frac{v_- - u_{s1}}{R} \text{ avec } v_- = 0$$

On en déduit  $u_{s1} = -(u_m + E)$ .

Le second montage à ALI est un montage inverseur, donc en sortie du second ALI, on obtient :

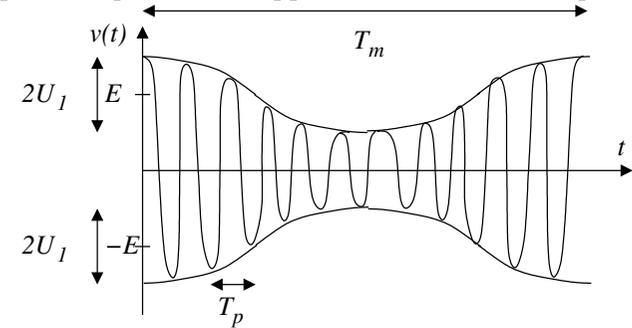
$$u_{s2}(t) = u_m(t) + E$$

En sortie du multiplieur, on a finalement :

$$v(t) = kU_0 [E + U_1 \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t)$$

2. Principe du tracé :

On commence par tracer l'enveloppe : une oscillation sinusoïdale basse fréquence d'amplitude  $U_1$  avec un décalage  $E > U_1$ . Cette sinusoïde étant multipliée par un cosinus haute fréquence qui passe rapidement de  $+1$  à  $-1$ , on représente le symétrique de cette oscillation par rapport à l'axe des abscisses, il ne reste plus qu'à dessiner le cosinus haute fréquence au sein de l'enveloppe en respectant le rapport entre les deux fréquences.



3. On linéarise l'expression précédemment obtenue :

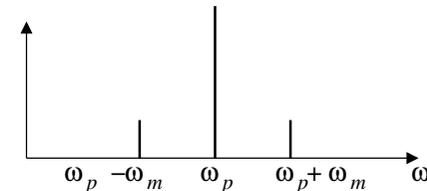
$$v(t) = kU_0 E \cos(\omega_p t) + kU_0 U_1 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t)$$

$$v(t) = kU_0 E \cos(\omega_p t) + \frac{kU_0 U_1}{2} [\cos([\omega_p + \omega_m] t) + \cos([\omega_p - \omega_m] t)]$$

$$v(t) = kEU_0 \left[ \cos(\omega_p t) + \frac{U_1}{2E} \cos([\omega_p + \omega_m] t) + \frac{U_1}{2E} \cos([\omega_p - \omega_m] t) \right]$$

$$\text{et donc } m = U_1/E.$$

4. Le signal contient les pulsations  $\omega_p$ ,  $\omega_p + \omega_m$  et  $\omega_p - \omega_m$ , la figure suivante est tracée pour  $U_1/E = 1/2$  :



5. Démodulation :

(a) En appelant  $k$  la constante multiplicative introduite par le multiplieur,

le signal en sortie du composant est de la forme :

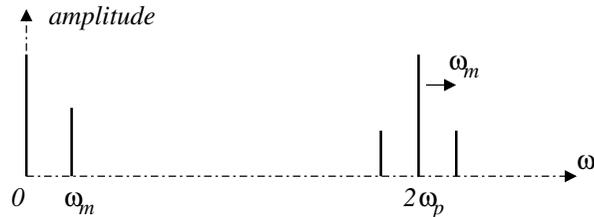
$$v_m(t) = k^2 U_0^2 E (1 + m \cos(\omega_m t)) \cos^2(\omega_p t)$$

Sachant que  $\cos^2(\omega_p t) = (1 + \cos(2\omega_p t)) / 2$ , on en déduit :

$$v_m(t) = \frac{k^2 U_0^2 E}{2} [1 + m \cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_p t) + m \cos(\omega_m t) \cos(2\omega_p t)]$$

avec  $\cos(\omega_m t) \cos(2\omega_p t) = 1/2 (\cos([2\omega_p - \omega_m]t) + \cos([2\omega_p + \omega_m]t))$

Le signal en sortie du multiplieur contient des composantes aux pulsations 0,  $\omega_m$ ,  $2\omega_p$ ,  $2\omega_p - \omega_m$ ,  $2\omega_p + \omega_m$

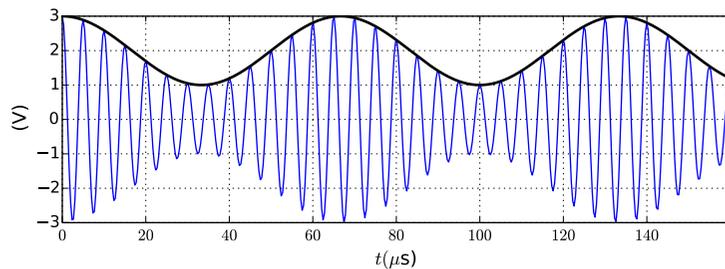


- (b) On choisit un filtre passe-bas  $RC$  de fréquence de coupure  $\omega_c = 1/(RC)$  avec  $\omega_m \ll \omega_c \ll 2\omega_p$  afin d'éliminer les hautes fréquences tout en préservant la composante du signal modulant.

### Elec073. Signal modulé en amplitude

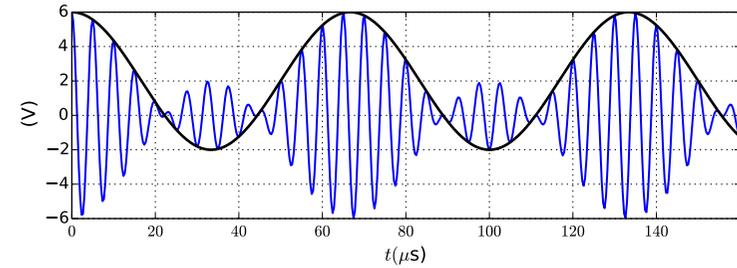
1. L'idée consiste à décomposer le signal en un signal modulant (que l'on fait apparaître sur la figure) et la porteuse :

$$s(t) = s_m(t) \times \cos(2\pi f_p t) \quad \text{avec} \quad s_m(t) = A_0 [1 + m \cos(2\pi f_m t)]$$



Le signal modulant a une valeur moyenne  $A_0$  et une amplitude  $m A_0$  ; à l'aide des deux courbes, on en déduit immédiatement :

- premier signal :  $A_0 = 2,0 \text{ V}$ ,  $m A_0 = 1,0 \text{ V}$  donc  $m = 1/2$  ;
- second signal :  $A_0 = 2,0 \text{ V}$ ,  $m A_0 = 4,0 \text{ V}$  donc  $m = 2$  ;

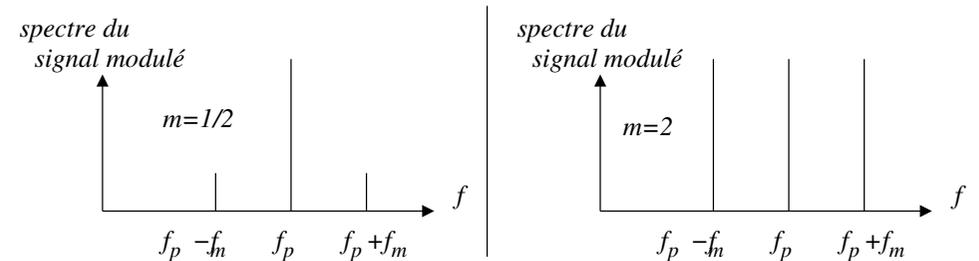


Pour les fréquences, on constate que deux périodes du signal modulant durent environ  $135 \mu\text{s}$ , ce qui correspond à une fréquence  $f_m \approx 15 \text{ kHz}$ . Et on compte environ 13 périodes de la porteuse pour une période de la modulante donc  $f_p \approx 2,0 \times 10^5 \text{ Hz}$ .

2. Pour déterminer le spectre du signal modulé, on linéarise le signal :

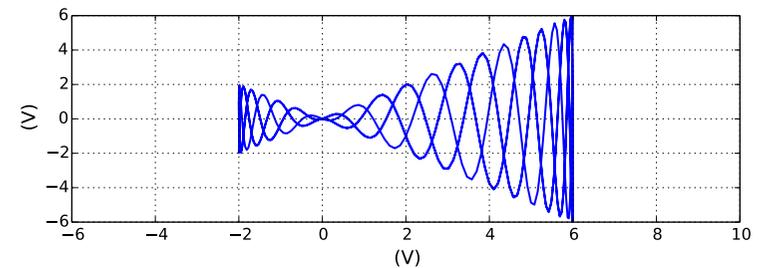
$$s(t) = A_0 \cos(2\pi f_p t) + A_0 m \cos(2\pi f_p t) \cos(2\pi f_m t)$$

$$\Leftrightarrow s(t) = A_0 \cos(2\pi f_p t) + \frac{A_0 m}{2} [\cos(2\pi [f_p + f_m] t) + \cos(2\pi [f_p - f_m] t)]$$



La figure suivante représente l'oscillogramme en mode XY du premier signal. La voie X correspond au signal modulant et la voie Y au signal modulé.

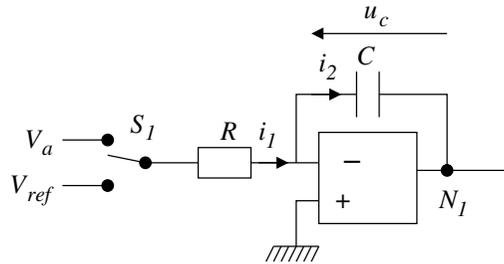
3. Le signal modulant varie entre les valeurs extrêmes  $A_0(1 - m) = 1 \text{ V}$  et  $A_0(1 + m) = 3 \text{ V}$ , c'est à dire, en effectuant le rapport  $m = 1/2$



4. Dans le cas d'un signal « surmodulé » (figure ci-dessus),  $m > 1$ , le signal

modulant passe par la valeur nulle, le trapèze se transforme en deux triangles dont les bases sont situées en  $A_0(1 - m) = -2 \text{ V}$  et  $A_0(1 + m) = 6 \text{ V}$  :

### Elec056. Convertisseur analogique numérique double rampe (\*\*)



1. On suppose que l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire (rétroaction sur la borne inverseuse), en conséquence  $v_- = v_+ = 0$ .

D'autre part :  $u_{N1} = v_{N1} - v_- = -u_c$ .

Le condensateur étant initialement déchargé et la tension aux bornes d'un condensateur étant continue, on en déduit :  $u_{N1}(0^+) = 0$ .

2. On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$$i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{v_a - v_-}{R} = C \frac{du_c}{dt} = -\frac{du_{N1}}{dt}$$

On en déduit :

$$\frac{du_{N1}}{dt} = \frac{-v_a}{RC} = \frac{|v_a|}{RC} \quad (v_a < 0)$$

Le second membre étant constant, on intègre aisément cette équation différentielle compte tenu de la condition initiale et on obtient :

$$u_{N1}(t) = \frac{|v_a|}{RC} t$$

3. La première phase correspond au déroulement de  $2^N$  périodes d'un signal de fréquence  $f_h$ , c'est à dire une durée  $T_1 = 2^N / f_h$  ; à cet instant la tension  $u_{N1}$  atteint la valeur :

$$V_{pic} = \frac{|v_a|}{RC} T_1 = \frac{|v_a| 2^N}{RC f_h}$$

4. La nouvelle équation différentielle vérifiée par  $u_{N1}$  s'écrit :

$$\frac{du_{N1}}{dt} = \frac{-V_{ref}}{RC}$$

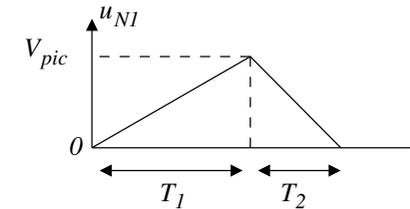
Équation qui s'intègre selon :  $u_{N1} = -\frac{V_{ref}}{RC} t + cste$  ; compte tenu de la condition initiale :  $u_{N1}(T_1) = V_{pic}$ , donc :

$$V_{pic} = -\frac{V_{ref}}{RC} T_1 + cste \Rightarrow cste = V_{pic} + \frac{V_{ref}}{RC} T_1$$

Et finalement  $\forall t \in [T_1, T_1 + T_2]$  :

$$u_{N1}(t) = V_{pic} + \frac{V_{ref}}{RC} (T_1 - t)$$

5. Évolution de  $u_{N1}$  :



6. L'ALI fonctionne en **comparateur simple**. Tant que  $u_{N1}$  reste positive, la sortie de l'ALI vaut  $+V_{sat}$ . Lorsque la tension  $u_{N1}$  s'annule, la sortie de l'ALI bascule vers  $-V_{sat}$ , ce qui permet de repérer le passage par zéro.

7. Pour  $t = T_1 + T_2$ , la tension  $u_{N1}$  s'annule :

$$0 = V_{pic} + \frac{V_{ref}}{RC} [T_1 - (T_1 + T_2)] \Rightarrow T_2 = RC \frac{V_{pic}}{V_{ref}} = \frac{|v_a|}{V_{ref}} T_1$$

8. On a  $T_1 = 2^N / f_h$  et  $T_2 = n / f_h$ , on en déduit (en toute rigueur avec une partie entière) :

$$\frac{n}{f_h} = \frac{2^N |v_a|}{f_h V_{ref}} \Rightarrow n = \frac{2^N |v_a|}{V_{ref}}$$

À  $N$  et  $V_{ref}$  fixés, le nombre obtenu est bien proportionnel à  $v_a$ . On a réalisé la conversion analogique numérique.

9. Pour une tension à convertir de l'ordre de  $V_{ref}$ , on a  $T_2 \approx T_1$  et un temps de conversion de l'ordre de :

$$\tau_{conv.} \approx \frac{2^{N+1}}{f_h}$$

### Elec057. CNA à réseau de résistances pondérées (\*\*)

1. L'ALI est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire :  $v_- = v_+ = 0$ .

Que l'interrupteur soit relié à la masse ou à l'entrée non inverseuse, le potentiel est le même, par conséquent :

$$i_k = \frac{V_{ref}}{2^{k-1} R}$$

2. Le courant  $i_{sa}$  est la somme des courants correspondant aux interrupteurs connectés à l'entrée inverseuse ( $b_k = 1$ ), il peut donc s'écrire :

$$i_{sa} = \sum_{k=1}^N \frac{b_k V_{ref}}{2^{k-1} R}$$

D'autre part la loi d'Ohm appliquée à la résistance  $R/2$  s'écrit :

$$i_{sa} = -\frac{v_{sa}}{R/2}$$

La comparaison des deux expressions conduit à :

$$v_{sa} = -\frac{V_{ref}}{2} \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{2^{k-1}} = -\frac{V_{ref}}{2^N} \sum_{k=1}^N b_k 2^{N-k}$$

$$v_{sa} = -\frac{V_{ref}}{2^N} \left[ \sum_{k=1}^N b_k 2^{N-k} \right]$$

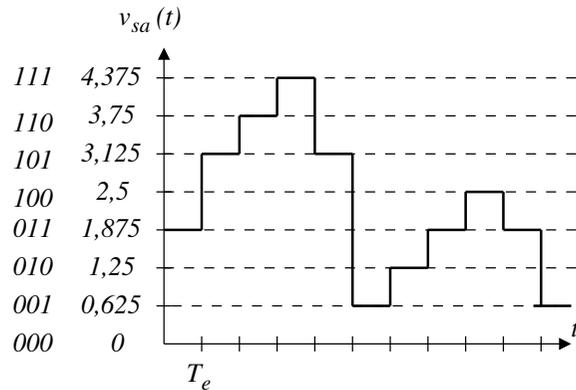
3. La tension de sortie s'incrémente par pas de  $\boxed{V_{ref}/2^N}$  qui est la résolution du convertisseur.

Pour augmenter cette résolution, il faut augmenter  $N$ . Il faut alors disposer de résistances très bien étalonnées sur une grande échelle : pour  $N$  grand, il n'est pas évident de disposer d'une résistance ( $2^{N-1}R$ ) dont la précision absolue est meilleure que la plus petite résistance  $R$ .

4. Cas d'un convertisseur 3 bits

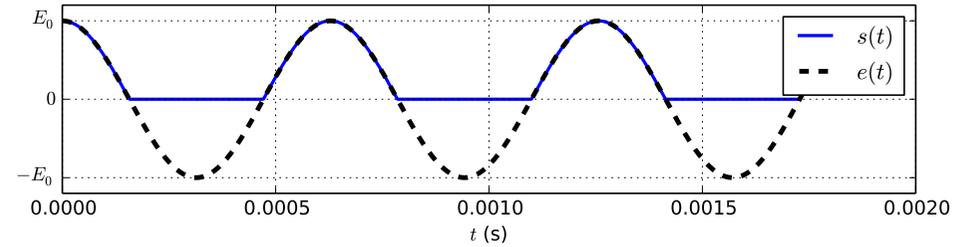
(a) Résolution :  $\frac{V_{ref}}{2^3} = \frac{5}{8} = \underline{0,625 \text{ V}}$

(b) Tracé :



## Elec071. Détecteur de crêtes

1. On étudie les deux cas possibles pour la diode :



→ diode passante :  $u_d = 0$  à condition  $i > 0$ .

La loi des mailles conduit à :  $e(t) = u_d + s(t) = s(t) = Ri(t)$  à condition que  $i > 0$  c'est à dire  $e(t) > 0$  :

*Conclusion* : **diode passante** :  $s(t) = e(t)$  à condition que  $e(t) > 0$

→ diode bloquante :  $i = 0$  à condition  $u_d < 0$ .

$i = 0 \Rightarrow s(t) = Ri = 0$  à condition que  $e(t) = u_d < 0$ .

*Conclusion* : **diode bloquante** :  $s(t) = 0$  à condition que  $e(t) < 0$

2. Pour la diode passante :  $\boxed{u_c(t) = e(t)}$ .

3. La diode étant bloquante, on se retrouve avec une association série  $RC$  isolée de l'amont. Le condensateur se décharge dans la résistance et la tension vérifie l'équation différentielle :

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :  $\boxed{u_c(t) = u_0 e^{-t/\tau}}$  avec  $\tau = RC$ .

4. Une fois le condensateur chargé sous l'amplitude de la tension d'entrée, la valeur de la tension d'entrée décroît et la diode devient bloquante, le condensateur se décharge alors dans la résistance en une durée caractéristique  $\tau$  et ceci tant que la diode reste bloquante.

La diode redevient passante quand la tension à ses bornes s'annule à nouveau, intersection de la courbe représentant la tension d'entrée et de la courbe associée au condensateur, la tension aux bornes du condensateur est alors à nouveau égale à la tension d'entrée.

Pour  $T \gg \tau$ , le condensateur a le temps de se décharger significativement ; dans le cas contraire, la tension du condensateur reste quasiment constante égale à l'amplitude du signal d'entrée d'où le nom de **détecteur de crête**.

5. Dans tous les cas  $T_p = 0, 20$  ms et  $T_m = 2, 0$  ms.

→ Expérience 1 :  $\tau = RC = 51 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-9} \approx 1,0$  ms  $> T_p$ . Le condensateur n'a pas le temps de se décharger à l'échelle de la porteuse ; en revanche  $\tau < T_m$ , **la tension du condensateur parvient à suivre les évolutions de la modulante** même s'il reste une légère ondulation en dents de scie. On récupère bien le signal de la modulante.

→ Expérience 2 :  $\tau = RC = 51 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-9} \approx 0,2$  ms. La constante de temps est de l'ordre de  $T_p$ . **Le condensateur a tendance à trop se décharger pendant une oscillation de la porteuse.**

→ Expérience 3 :  $\tau = RC = 51 \times 10^3 \times 210 \times 10^{-9} \approx 10$  ms  $> T_m$ . **La constante de temps est trop grande et ne permet pas au condensateur de se décharger à l'échelle des variations de la modulante.** La tension du condensateur ne suit plus les oscillations de la modulante.

### Elec059. Échantillonneur bloqueur (\*\*\*)

#### Première partie : Générateur d'impulsions

1. Étude du filtre CR :

(a) On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{R}{R + 1/jC\omega} \Rightarrow \underline{H = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$$

(b) La fonction de transfert se réécrit :  $RC \times j\omega v_s + v_s = RC \times j\omega v_e$ , c'est à dire dans l'espace temporel :

$$\underline{RC \frac{dv_s}{dt} + v_s = RC \frac{dv_e}{dt}}$$

(c) Sur l'intervalle  $t \in ]0, T/2[$ , la tension d'entrée est constante et l'équation différentielle se simplifie selon :

$$\underline{RC \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0}$$

→ La solution de cette équation différentielle est de la forme :  $v_s(t) = Ae^{-t/\tau}$  avec  $\tau = RC$ .

→ Il reste à déterminer la condition initiale. La tension aux bornes d'un condensateur étant continue :  $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$ , la loi d'additivité des tensions écrite en  $t = 0^+$  prend alors la forme :

$$v_e(t = 0^+) = \underbrace{u_c(t = 0^+)}_{=0} + v_s(t = 0^+) \quad \text{donc} \quad \underline{v_s(0^+) = v_e(0^+) = E}$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{\forall t \in ]0, T/2[, \quad v_s(t) = Ee^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC}$$

(d) Le régime transitoire perdure pendant quelques fois la durée  $\tau$  ; en choisissant, par exemple,  $\boxed{10RC < T/2}$ , on assure que le régime permanent est atteint avant le basculement.

(e)  $\forall t \in ]T/2, T[$ , l'équation différentielle n'est pas modifiée :

$$RC \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0$$

La solution est de la forme  $v_s(t) = Be^{-t/\tau}$ . Il faut maintenant déterminer la condition initiale !

Le régime permanent étant atteint avant le basculement, on a :

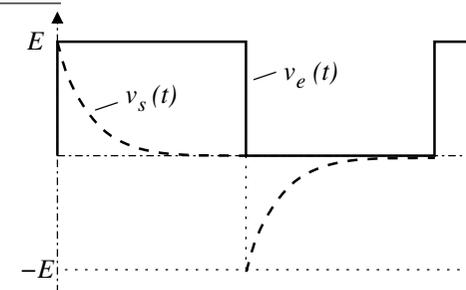
$$v_e(T/2^-) = E \quad \text{et} \quad v_s(T/2^-) = 0 \quad \text{donc} \quad u_c(T/2^-) = E$$

La tension aux bornes d'un condensateur est continue donc :  $u_c(T/2^+) = E$ , la loi d'addition des tensions appliquée en  $t = T/2^+$  s'écrit :

$$\underbrace{v_e(T/2^+)}_{=0} = \underbrace{u_c(T/2^+)}_{=E} + v_s(T/2^+) \quad \text{donc} \quad \underline{v_s(T/2^+) = -E}$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{\forall t \in ]T/2, T[, \quad v_s(t) = -Ee^{-(t-T/2)/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC}$$

(f) Chronogrammes :



2. Rôle de la diode

(a) Que la diode soit passante ou bloquante, on est ramené à un circuit CR attaqué par un signal TTL.

L'allure de la tension  $v_2$  correspond bien à l'allure de la tension  $v_s$  de la première partie.

Pour la diode passante ( $v_1 > 0$ ) qui se comporte comme un fil, on a logiquement  $v_3 = v_2$

Pour la diode bloquante ( $v_1 < 0$ ), le courant est nul dans la résistance

$R_2$  et  $v_3 = 0$ .

**Le montage joue bien le rôle de redresseur, éliminant les alternances négatives.**

- (b) Pour la diode passante, on se ramène à deux résistances en parallèle et donc une résistance équivalente  $R_{eq} = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} \approx 2,5 \text{ k}\Omega$  et donc une constante de temps  $R_{eq} C_1 = 25 \mu\text{s}$   
Pour la diode bloquante, seule la résistance  $R_1$  est à considérer, la constante de temps  $R_1 C_1 = 0,1 \text{ ms}$  est plus élevée, la durée de retour à l'équilibre plus grande.

### 3. Obtention des pics

On considère tout d'abord la première porte NAND :

L'une des entrées est maintenue à 4,5 V donc un niveau « 1 », lorsque la tension  $v_3$  dépasse 2,5 V (niveau « 1 »), c'est à dire à l'apparition du pic, d'après la table de vérité de la porte NAND, la tension de sortie est nulle (niveau « 0 »).

Le reste du temps la tension  $v_3$  est dans un niveau « 0 », donc la sortie est dans le niveau haut.

Au final, la tension  $v_3$  est en position haute, sauf pour quelques « pics inversés » où elle passe à zéro.

Les deux entrées de la seconde porte NAND sont identiques. Cette porte NAND est donc équivalente à un inverseur logique, **la tension  $v_5$  est donc le complémentaire de la tension  $v_4$** . On obtient pour la tension  $v_4$  des impulsions très fines à la période du signal d'entrée.

## Seconde partie : Échantillonnage du signal

1. Lorsque l'interrupteur se ferme (à la fréquence  $f_{imp}$ ), le condensateur se charge sous la tension du GBF et reste bloqué à cette valeur jusqu'à l'impulsion suivante, d'où son allure en marche d'escalier.
2. Résistance d'entrée du CAN
  - (a) Si le CAN possède une faible résistance d'entrée, il se forme un circuit  $R_e C$ , et le condensateur a tendance à se décharger en une durée  $R_e C$ , la tension  $v_6$  ne se maintient plus entre deux impulsions.  
**Le montage suiveur possède une résistance d'entrée quasi-infinie ce qui évite toute décharge du condensateur.**
  - (b) Avec un condensateur de capacité plus grande, le temps de décharge augmente.

Cependant, d'après  $i = C \frac{du_c}{dt}$ , pour une même variation de tension entre deux impulsions, une plus grande capacité nécessite une intensité du courant plus grande que le GBF n'est pas nécessairement en mesure de fournir, ceci explique l'allure de la courbe.