Lycée Naval, Spé 2.
ÉLECTRONIQUE. 04. Électronique numérique.

Électronique numérique

1 Numérisation des signaux analogiques

1.1 Intérêt de la numérisation

La plupart des signaux physiques à traiter ou à transmettre sont analogiques, représentés par des fonctions continues du temps.

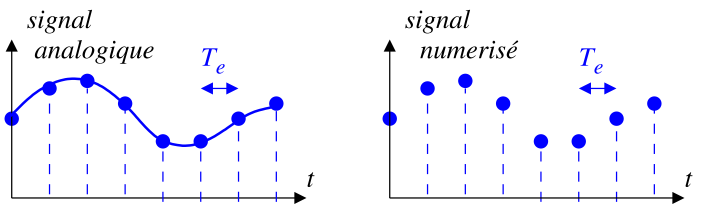
Depuis quelques décennies, on assiste à la numérisation de nombreux signaux pour le stockage comme la transmission : disque vinyle→ CD audio, DVD, fichiers mp3 ; télévision hertzienne → TNT.

La numérisation des signaux permet d'augmenter la quantité d'informations stockées ou transmises et la qualité de la transmission.

Il est également aisé d'effectuer des opérations sur les signaux numériques (moyenne, addition, multiplication, filtrage) alors que ces mêmes opérations sont réalisées sur les signaux analogiques à l'aide de composants électroniques.

1.2 Principe

Soit un signal analogique $s(t)$, fonction continue du temps. On discrétise le signal en collectant les valeurs successives de s à intervalles réguliers T_e.



Lors de la numérisation d'un signal, trois paramètres sont importants :
→ $f_e = 1/T_e$, la **fréquence d'échantillonnage**,
→ N, le nombre d'échantillons,
→ $T = NT_e = N/fe$, la durée de l'enregistrement.

On remplace un signal continu par la donnée de N valeurs discrètes :

$$\forall t \in [0, T[, s(t) \quad \Rightarrow \quad k \in \{0, N-1\}, \quad s[k] = s(kT_e)$$

Ces nombres sont conservés sur un nombre n déterminé de bits (0 ou 1), autorisant 2^n niveaux différents.

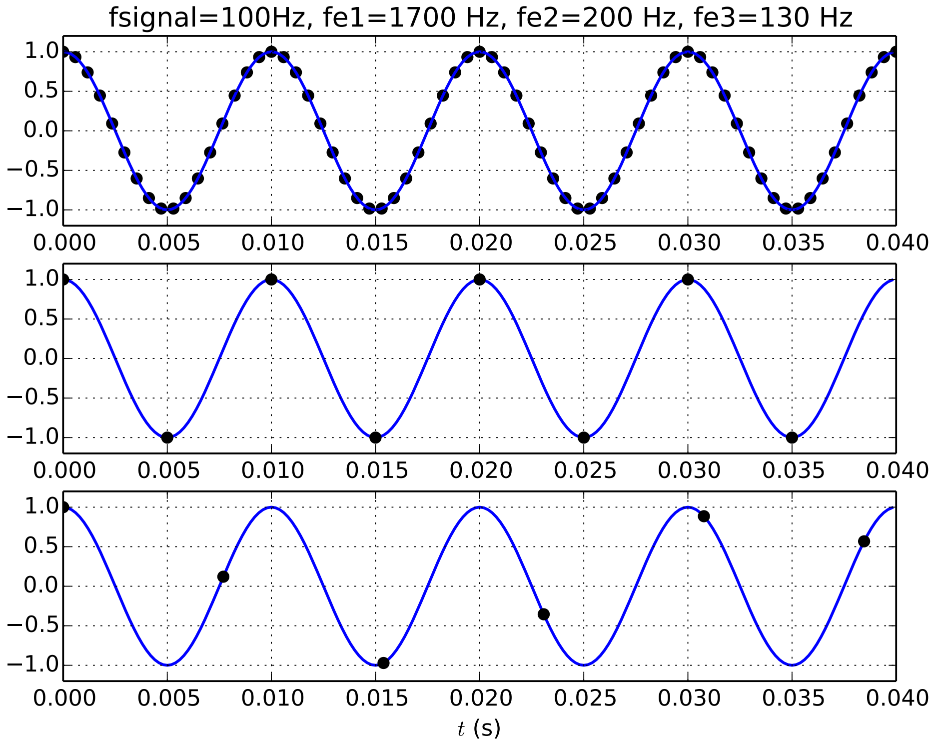
Par exemple, pour la musique d'un CD-audio, $f_e = 44,1$ kHz et $n = 16$ en stéréo. Sur chaque voie (droite et gauche), chaque seconde, il y a 44100 échantillons codés chacun sur 16 bits ou 2 octets. Ainsi, une minute de musique est stockée sur 10 Mo.

2 Échantillonnage temporel

2.1 Phénomène de repliement du spectre

Influence de la fréquence d'échantillonnage

Pour un signal analogique sinusoïdal de fréquence $f_s = 100$ Hz, les graphiques ci-dessous représentent l'influence d'une fréquence d'échantillonnage f_e successivement égale à 1700 Hz, 200 Hz, et 130 Hz.

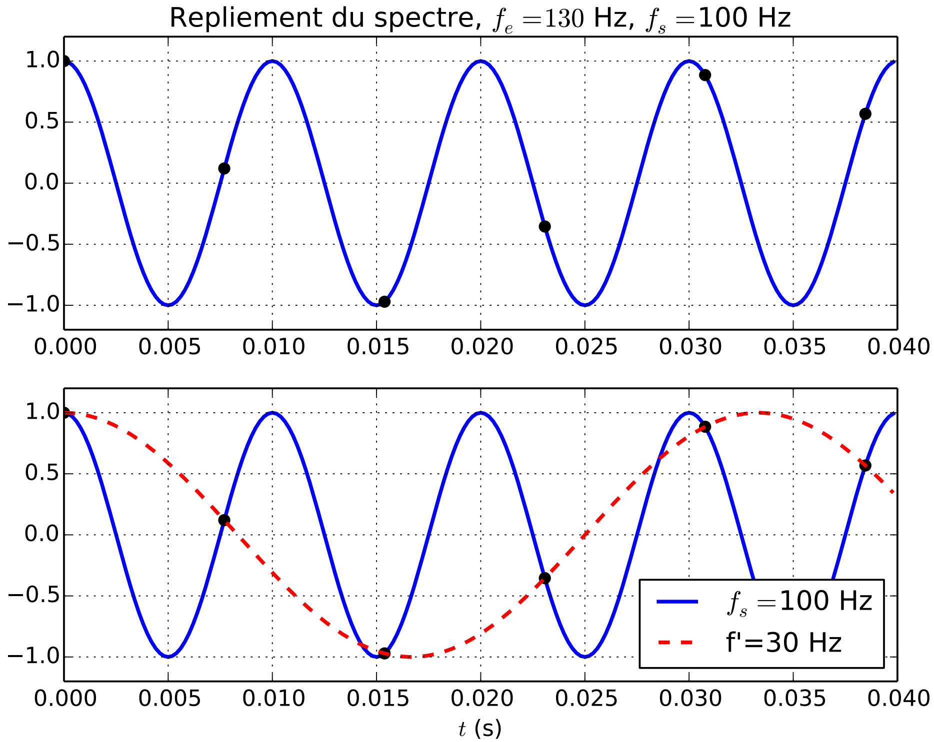


→ Pour une fréquence $f_e \gg f_s$, les échantillons reproduisent fidèlement le signal, le coût à payer étant la quantité de données à traiter.
→ $f_e = 2f_s$ apparaît comme la valeur limite permettant de préserver l'information

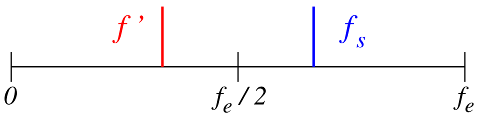
sur la fréquence du signal f_s.
→ Pour $f_e < 2f_s$, l'information contenue dans les échantillons ne semble pas permettre de remonter au signal analogique.

Illustration du repliement

On considère toujours un signal sinusoïdal de fréquence $f_s = 100$ Hz que l'on échantillonne à $f_e = 130$ Hz. Le graphique ci-dessous montre que des signaux de fréquence $f = 100$ Hz (le vrai signal) et $f' = 30$ Hz possèdent les mêmes échantillons (les deux courbes passent bien par les valeurs échantillonnées)



Pour un « **vrai** » signal analogique à $f_s = 100$ Hz, un échantillonnage à $f_e = 130$ Hz ($fe < 2f$) rend compte d'un « **faux** » signal à $f' = 30$ Hz.



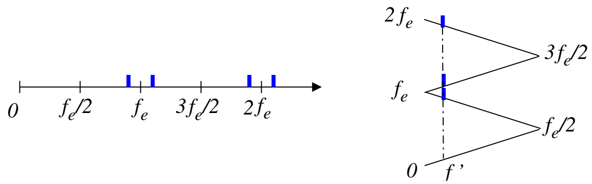
On remarque que les fréquences f_s et f' sont symétriques par rapport à $f_e/2$, d'où le nom de « **repliement** » du spectre (par rapport à $f_e/2$).

Justification mathématique

Soit une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ et des dates d'échantillons $t_k = kT_e = k/f_e$. Le signal analogique réel est de la forme : $y(t) = y_0 \cos(2\pi f_s \times t)$. On considère un signal $y'(t) = y_0 \cos(2\pi f' \times t)$ avec $f' = f_e - f_s$

Les signaux échantillonnés valent respectivement :
→ $y_k = y(t_k) = y_0 \cos(2\pi f_s \times t_k) = y_0 \cos\left(2\pi k \dfrac{f_s}{f_e}\right)$
→ $y'_k = y'(t_k) = y_0 \cos(2\pi f' \times t_k) = y_0 \cos\left(2\pi k \dfrac{f_s - f_e}{f_e}\right) = y_k$

Plus généralement, tout se passe comme si on repliait l'axe des fréquences en accordéon tous les $f_e/2$:



Ainsi pour $f_e = 1$ kHz, des signaux de fréquence 900 Hz, 1100 Hz, 1900 Hz, 2100 Hz,... seront tous perçus comme un signal de fréquence 100 Hz.

Condition de Nyquist-Shannon

Pour éviter le phénomène de repliement du spectre, il est nécessaire d'échantillonner le signal à une fréquence au moins égale au double de la plus haute fréquence du signal à étudier.

$$f_e \geq 2f_{max}$$

Observation expérimentale

Les oscilloscopes numériques et les logiciels associés à un dispositif d'acquisition ("Latis pro" pour la "Sysam SP5") peuvent fournir le spectre en fréquence d'un signal numérique ; on parle de transformée de Fourier discrète. L'intérêt de cette transformée discrète est qu'elle peut se calculer à l'aide d'un algorithme de calcul efficace appelé FFT (Fast Fourier Transform ou Transformée de Fourier Rapide).

→ Brancher le GBF sur la voie EA0 de la Sysam et lancer "Latis-pro"
→ Choisir pour l'acquisition $N = 1024$ et $f_e = 2$ kHz.

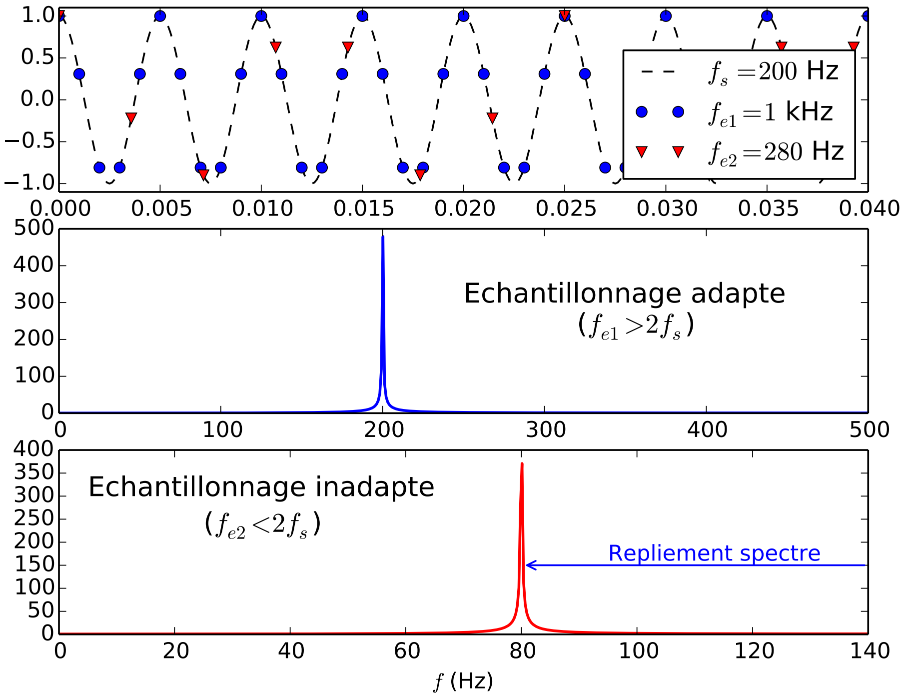
→ Observer les spectres des signaux suivants :
⋆ signal sinusoïdal puis créneau de fréquence $f = 95$ Hz
⋆ signal sinusoïdal de fréquence $f = 1,2$ kHz, puis créneau de fréquence 400 Hz.

2.2 Analyse spectrale numérique

Pour terminer, on s'intéresse au choix des paramètres (nombre d'échantillons N, fréquence d'échantillonnage f_e, durée N/f_e) pour réaliser une analyse spectrale numérique.
Les spectres sont obtenus à l'aide de simulations réalisées en python. La FFT renvoie le spectre du signal pour les fréquences $f_k = kf_e/N$ avec $k \in [0, N-1]$.

Influence de la fréquence d'échantillonnage

Pour un signal sinusoïdal de fréquence $f_s = 200\ Hz$ avec $N = 1024$, on observe le spectre résultant pour deux fréquences d'échantillonnage $f_{e1} = 1$ kHz et $f_{e2} =$ 280 Hz.

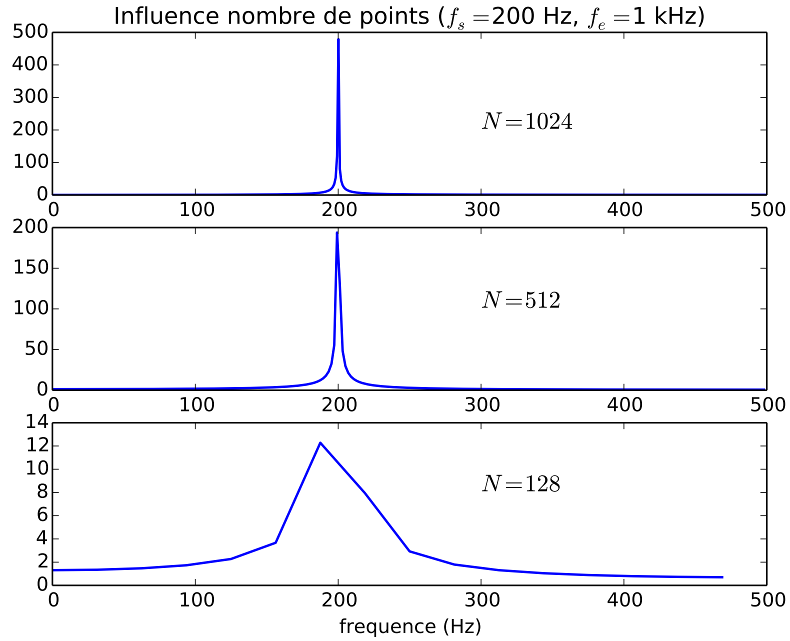


La condition de Nyquist-Shannon impose de choisir une fréquence d'échantillonnage supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal étudié.

Influence du nombre de points N

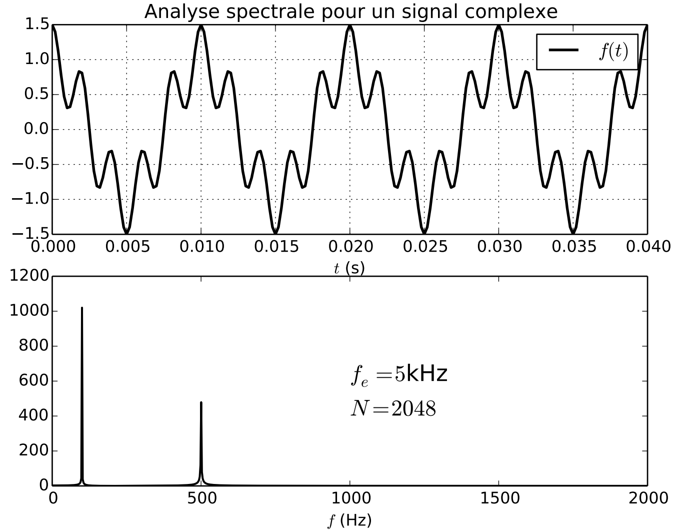
→ Le pas de résolution en fréquence vaut fe/N.

→ Concrètement, la demi-largeur du pic est de l'ordre de fe/N.



Analyse spectrale d'un signal complexe

On considère le signal $f(t) = \cos(2\pi \times 100 \times t) + 0,5 \cos(2\pi \times 500 \times t)$



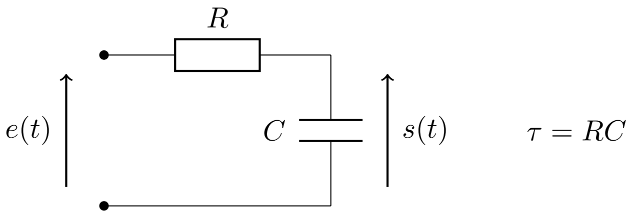
3 Filtrage numérique

On s'intéresse au cas d'un filtre passe-bas du premier ordre.

3.1 Principe

Filtre analogique

Pour appliquer un filtre passe-bas à un **signal analogique** $e(t)$, on peut considérer le quadripôle suivant :



Dans le domaine de Laplace et le domaine temporel, ce filtre, de pulsation de coupure $\omega_c = 1/\tau$, est caractérisé par les équations :

$$\frac{s}{e} = \frac{1}{1+\tau p} \quad \text{et} \quad \tau \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

Filtre numérique

On suppose que l'on dispose maintenant d'un **signal d'entrée échantillonné**, c'est à dire la suite $e[k] = e(kT_e)$ avec $T_e = 1/f_e$ et k variant de 0 à $N-1$.
On souhaite construire le signal de sortie échantillonné, c'est à dire la suite des $s[k] = s(kT_e)$.

Pour cela, la méthode la plus simple consiste à discrétiser l'équation différentielle analogique pour obtenir l'équation numérique du filtre qui s'écrit au pas de temps kT_e :

$$\tau \frac{s[k+1] - s[k]}{T_e} + s[k] = e[k]$$

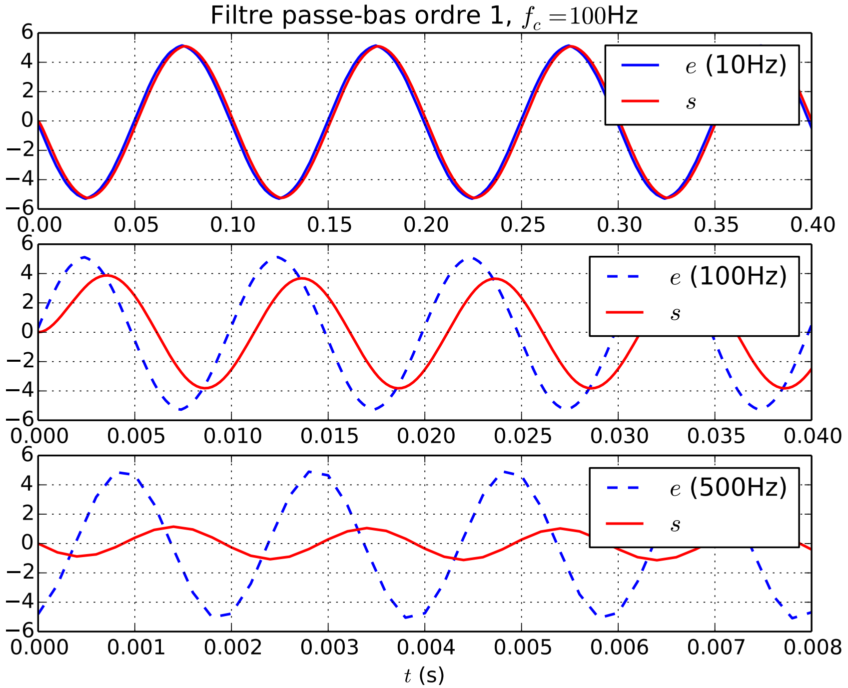
C'est à dire, en terme de programmation :

$$s[0] = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \{1, N-1\} \quad s[n] = s[n-1] + \frac{T_e}{\tau}\left(e[n-1] - s[n-1]\right)$$

Le système devant *a minima* respecter les conditions suivantes :
→ : $T_e \ll \tau$: approximation du calcul de la dérivée par un taux d'accroissement.
→ : $NT_e \gg \tau$: dépasser le régime transitoire
→ : $f_e > 2f_{signal}$: respect du critère de Shannon.

3.2 Réalisation pratique

À l'aide de la centrale d'acquisition Sysam-SP5, on réalise l'acquisition et le filtrage d'un signal d'entrée sinusoïdal avec les caractéristiques suivantes pour l'acquisition et le filtrage :
$f_c = 100$ Hz, $\tau = 1/(2\pi f_c) = 1,6$ ms, $f_e = 1/T_e = 5000$ Hz, $N = 10000$ points.



__Capacités exigibles__ :

→ __Échantillonnage__ : décrire le mouvement apparent d'un segment tournant observé avec un stroboscope. Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage
→ __Condition de Nyquist-Shannon__ : Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique
→ __Analyse spectrale numérique__ : Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.
→ __Filtrage numérique__ : Réaliser un filtrage numérique passe-bas et mettre en évidence la limite introduite par l'échantillonnage.
→ __Porte logique__ : Mettre en œuvre une porte logique pour réaliser un oscillateur.