Électromagnétisme en régime variable

Équations de Maxwell dans le vide

$$\mathrm{M.T}\ :\ \boxed{\mathrm{div}\vec{B}=0}$$

$$\mathrm{M.F}\ :\ \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

$$\mathrm{M.G}\ :\ \boxed{\mathrm{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\mathrm{M.A}\ :\ \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}=\mu_0\vec{j}_C+\mu_0\vec{j}_D$$

Courant **de conduction**

$$\vec{j}_C=\vec{j}$$

Courant **de déplacement**

$$\vec{j}_D=\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

La présence d'un courant de déplacement permet d'assurer la cohérence entre l'équation de M.A et l'équation de conservation de la charge.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{j}=0$$

Aux fréquences accessibles au XIXe siècle, le courant de déplacement était masqué par le courant de conduction.

En régime variable

$$\epsilon_0\|\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\|\sim\epsilon_0\omega E<<\|\gamma\vec{E}\|\sim\gamma E$$

$$\boxed{\omega<<\frac{\gamma}{\epsilon_0}}$$

Typiquement

$$\omega<<10^{16}\ \mathrm{rad}$$

Approximation des **R**égimes **Q**uasi-**S**tationnaires **(ARQS) magnétique**

$$\|\vec{j}_D\|<<\|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\|$$

C'est un cas particulier de régime lentement variable.

Conséquences de l'ARQS magnétique

Équations de Maxwell dans le vide

$$\mathrm{M.T}\ :\ \mathrm{div}\vec{B}=0$$

$$\mathrm{M.F}\ :\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{M.G}\ :\ \mathrm{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\mathrm{M.A}\ :\ \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\simeq\mu_0\vec{j}}$$

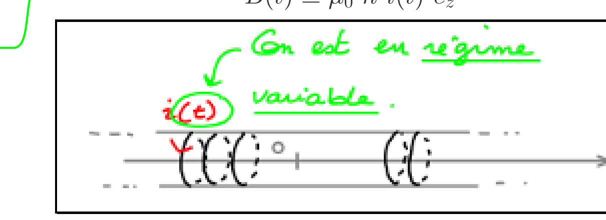
Le champ magnétique est décrit par les **mêmes équations qu'en régime stationnaire, on pourra utiliser les mêmes lois.**

$$\mathrm{M.T}\ :\ \mathrm{div}\vec{B}=0$$

$$\mathrm{M.A}\ :\ \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\simeq\mu_0\vec{j}}$$

Exemple

$$\vec{B}(t)\simeq\mu_0\ n\ i(t)\ \vec{e}_z$$



Le champ électrique n'est pas décrit par les **mêmes équations qu'en régime stationnaire, on ne pourra pas utiliser les mêmes lois.**

$$\mathrm{M.G}\ :\ \mathrm{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\mathrm{M.F}\ :\ \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\neq\vec{0}}$$

Le courant de conduction est **à flux conservatif**, comme en régime stationnaire.

$$\mathrm{M.A}\ :\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\simeq\mu_0\vec{j}\ \text{or}\ \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B})=0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{j}\simeq0}$$

La loi des noeuds est toujours valable.

La densité volumique de charge varie peu.

$$\mathrm{div}\vec{j}\simeq0\ \text{soit}\ \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}\simeq0}$$

La loi des noeuds est toujours valable.

Loi de Faraday

$$\boxed{e=-\frac{\mathrm{d}\phi_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(\phi_p+\phi_{\mathrm{ext}})}{\mathrm{d}t}}$$

Phénomène d'induction

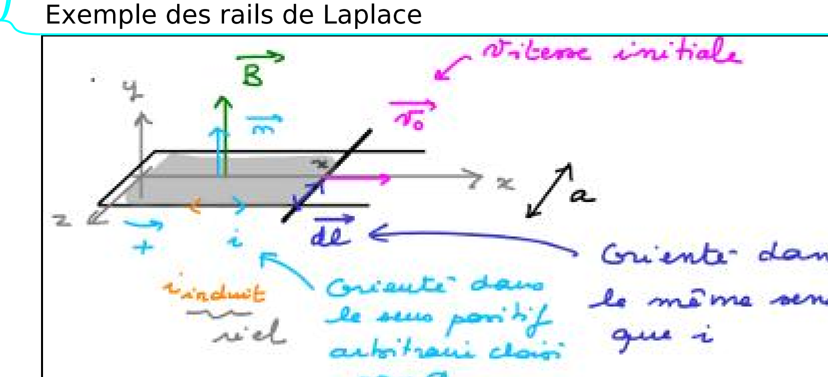
Flux propre

$$\phi_p=\iint_S\vec{B}_{\mathrm{propre}}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Flux extérieur

$$\phi_p=\iint_S\vec{B}_{\mathrm{ext}}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Exemple des rails de Laplace



Le flux propre est négligé ici.

Équation électrique

$$e=-\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t=-Bav\ \text{or}\ e=Ri\ \text{soit}\ \boxed{-Bav=Ri}$$

Équation mécanique

$$m\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t=\vec{F}_L=\int_\ell i\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}=iaB\ \vec{e}_x\ \text{soit}\ \boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=iaB}$$

Découplage

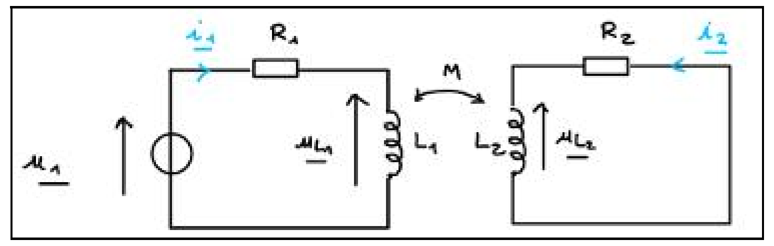
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2a^2}{mR}v=0}\ \text{soit}\ \boxed{v=v_0\ \mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

Couplage par **induction**

Circuits couplés par mutuelle induction en régime variable

$$\underline{u}_1=R_1\ \underline{i}_1+L_1\frac{\mathrm{d}\underline{i}_1}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}\underline{i}_2}{\mathrm{d}t}$$

$$0=R_2\ \underline{i}_2+L_2\frac{\mathrm{d}\underline{i}_2}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}\underline{i}_1}{\mathrm{d}t}$$



Découplage

$$\underline{u}_1=\left(R_1+jL_1\omega+\frac{M^2\omega^2}{R_2+jL_2\omega}\right)\underline{i}_1$$

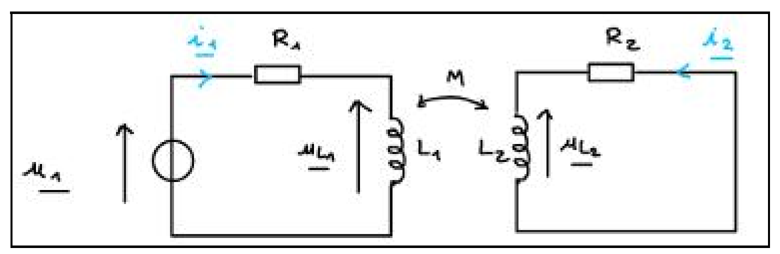
Le couplage est équivalent à un unique dipôle d'impédance

$$\underline{Z}=R_1+jL_1\omega+\frac{M^2\omega^2}{R_2+jL_2\omega}$$

Aspects énergétiques de circuits couplés par mutuelle induction

$$u_1=R_1\ i_1+L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\rightarrow\times i_1$$

$$0=R_2\ i_2+L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\rightarrow\times i_2$$



Bilan d'énergie

$$u_1i_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+Mi_1i_2\right)+R_1i_1^2+R_2i_2^2$$

Énergie magnétique des deux circuits couplés

$$W_{L,M}=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+Mi_1i_2$$

Condition sur le coefficient de mutuelle induction

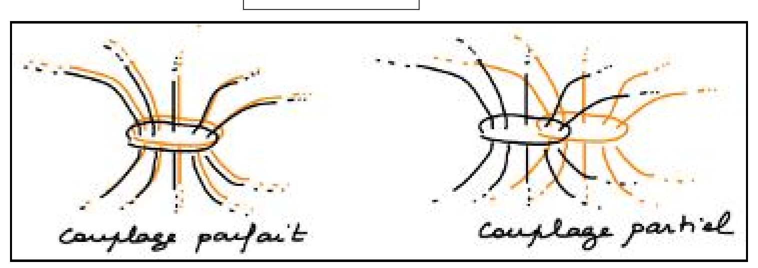
$$W_{L,M}=\iiint_V\frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}V\geqslant0$$

$$\frac{1}{2}L_1+\frac{1}{2}L_2x^2+Mx\geqslant0\ \text{avec}\ x=\frac{i_2}{i_1}$$

$$\Delta\leqslant0\ \text{soit}\ \boxed{M^2\leqslant L_1L_2}$$

Couplage parfait, couplage partiel

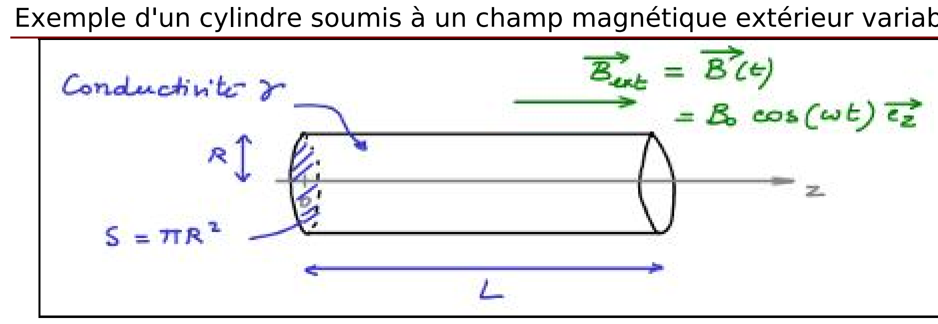
$$\boxed{M\leqslant\sqrt{L_1L_2}}=M_{\max}$$



Courants de Foucault

Phénomène d'induction

Exemple d'un cylindre soumis à un champ magnétique extérieur variable



ARQS magnétique

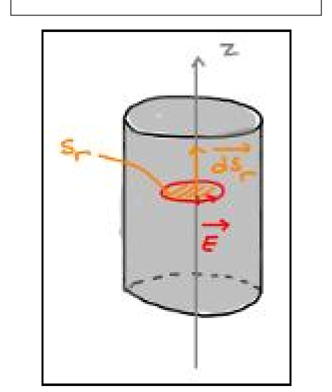
Champ magnétique créé par les courants induits négligé

Loi de Faraday

$$e=\oint_C\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=-\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$$

$$E\cdot2\pi r=\pi r^2\omega B_0\sin(\omega t)$$

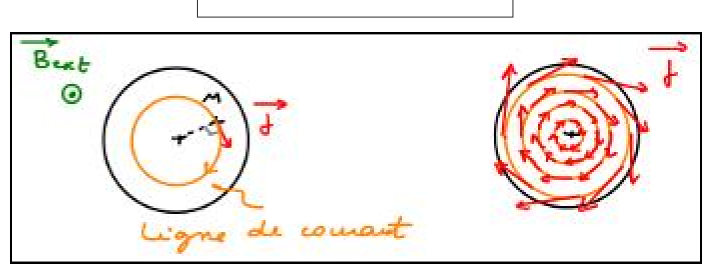
$$\boxed{\vec{E}_{\mathrm{induit}}=\frac{r\omega B_0}{2}\sin(\omega t)\ \vec{e}_\theta}$$



Courants induits

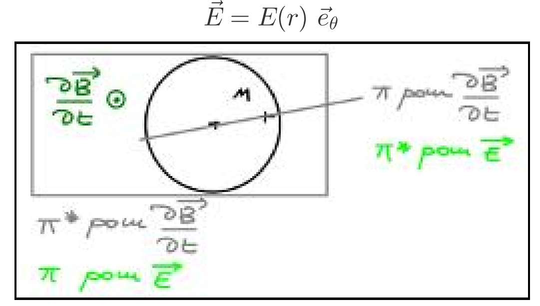
$$\vec{j}=\gamma\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{induit}}=\frac{r\gamma\omega B_0}{2}\sin(\omega t)\ \vec{e}_\theta}$$



Symétries et invariances

$$\vec{E}=E(r)\ \vec{e}_\theta$$



Aspects énergétiques

$$p_J=\iiint_V\vec{j}\cdot\vec{E}\ \mathrm{d}V=\frac{\gamma B_0^2\omega^2L\pi R^4}{8}\sin^2(\omega t)$$

$$\boxed{<p_J>=\frac{\gamma B_0^2\omega^2L\pi R^4}{16}}$$

Intérêt du feuilletage

$$\boxed{<p'_J>=\frac{<p_J>}{N}}$$