Écoulements incompressibles et homogènes

Résistance hydraulique d'une conduite

Écoulement de Poiseuille cylindrique

Calcul du débit volumique

$$\phi_V = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = \frac{p(0)-p(L)}{\frac{8\eta L}{\pi R^4}}$$

Chute de pression sur une longueur L

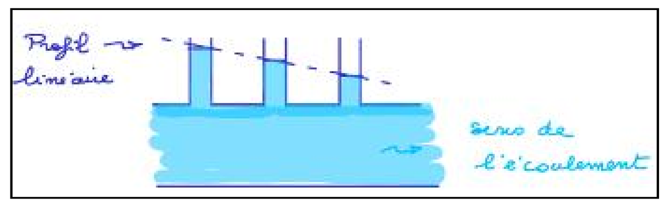
$$p(0)-p(L) = \frac{8\eta L}{\pi R^4}\cdot \phi_V = R_{\text{hyd}}\cdot\phi_V$$

Résistance hydraulique

$$\boxed{R_{\text{hyd}} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}}$$

Profil de pression

$$\boxed{p(x) = p(0) - \frac{8\eta\phi_V}{\pi R^4}\,x}$$



Généralisation

Loi de Hagen-Poiseuille

$$\boxed{\Delta p = R_{\text{hyd}}\cdot\phi_V}$$

Chute de pression sur une longueur L: Δp

Résistance hydraulique: R_{hyd}

Débit volumique: ϕ_V

Influence du nombre de Reynolds

$$\Delta p \propto \frac{1}{2}\,\mu U^2\cdot\frac{L}{D}$$

$$\text{Soit : } \boxed{\Delta p = \Lambda\times\frac{1}{2}\,\mu U^2\cdot\frac{L}{D}}$$

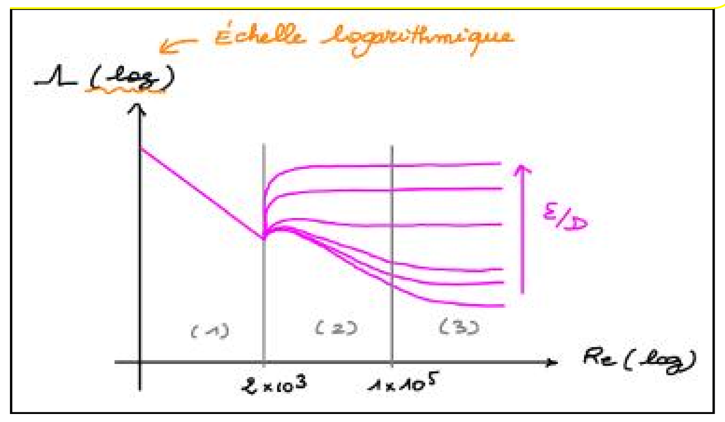
Coefficient de friction

$$\boxed{\Lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\,\mu U^2\cdot\frac{L}{D}}}$$

Cas de l'écoulement de Poiseuille cylindrique

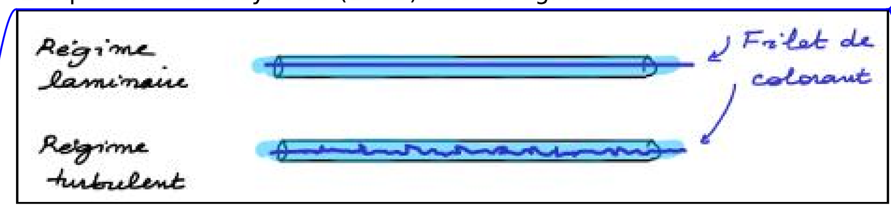
$$\Lambda = \frac{\frac{8\eta L}{\pi R^4}\cdot\phi_V}{\frac{1}{2}\,\mu U^2\cdot\frac{L}{D}} = \frac{64}{R_e}$$

<u>Cas général :</u> **diagramme** (expérimental) **de Moody**



L'expérience de Reynolds (1883) : deux régimes d'écoulement

La viscosité d'un fluide est responsable de nombreux phénomènes.



Un écoulement est **laminaire** si les lignes de courant sont localement parallèles entre elles à tout instant.

Introduction du **nombre de Reynolds**, <u>sans dimension</u> :

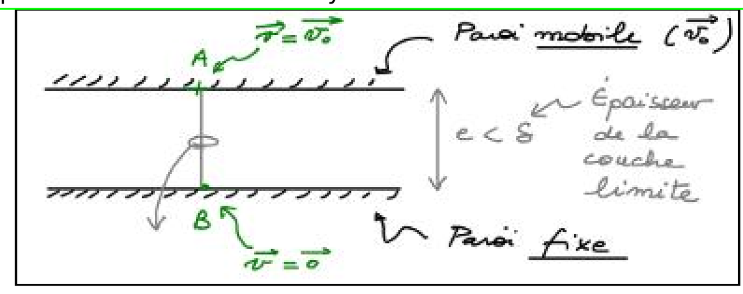
$$\boxed{R_e = \frac{\mu U D}{\eta}}$$

- Masse volumique du fluide: μ
- Diamètre de la conduite: D
- Viscosité dynamique: η

Vitesse débitante à travers la section S de la conduite (vitesse caractéristique de l'écoulement)

$$\boxed{U = \frac{\phi_V}{S}} = \frac{\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}}{\iint_S dS}$$

Une interprétation du nombre de Reynolds dans l'écoulement de Couette plan



Débit convectif de quantité de mouvement (sens de l'écoulement)

$$\vec{\phi}_{p_x,\text{conv}} = \iint_{S'} (\mu v_x)\vec{v}\, dS'$$

Vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement

$$\vec{j}_{p_x,\text{conv}} = (\mu v_x)\vec{v}$$

Débit diffusif de quantité de mouvement (normal au sens de l'écoulement)

$$\vec{\phi}_{p_x,\text{diff}} = \iint_S -\nu\,\overrightarrow{\text{grad}}(\mu v_x)\, dS$$

Viscosité cinématique

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\mu}}$$

Vecteur densité de courant diffusif de quantité de mouvement

$$\vec{j}_{p_x,\text{diff}} = -\nu\,\overrightarrow{\text{grad}}(\mu v_x)$$

Nombre de Reynolds

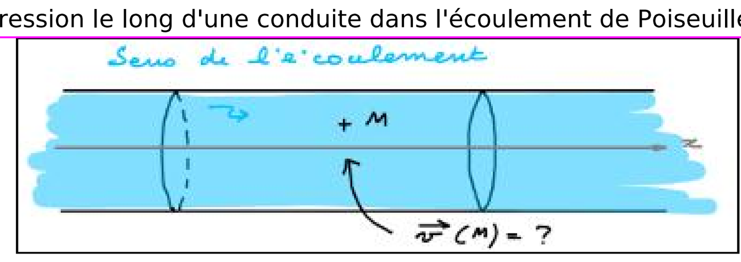
$$\frac{j_{p_x,\text{conv}}}{j_{p_x,\text{diff}}} \sim \frac{\mu U D}{\eta} = R_e$$

Le nombre de Reynolds caractérise la prédominance du transport convectif ou diffusif de quantité de mouvement.

$R_e >> 1$: <u>convection</u> dominante

$R_e << 1$: <u>diffusion</u> dominante

La chute de pression le long d'une conduite dans l'écoulement de Poiseuille cylindrique



Écoulement **laminaire**

$$\vec{v} = v(r,x)\,\vec{e}_x$$

Écoulement **incompressible et homogène**

$$\text{div}\vec{v} = 0 \text{ soit } \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Caractéristiques de la vitesse

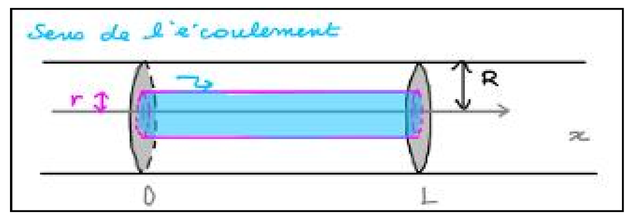
$$\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_x$$

PFD sur un cylindre de fluide

$$\vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{viscosité}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

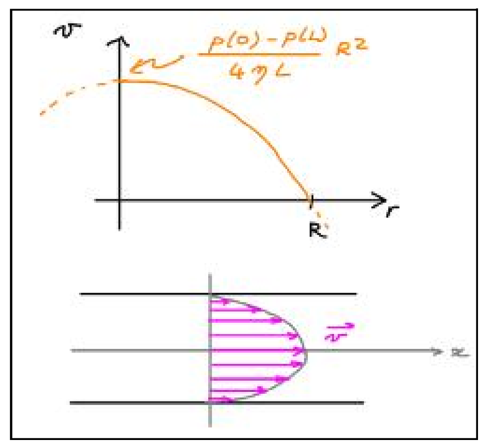
$$(p(0)-p(L))\pi r^2 + \eta\frac{\partial v}{\partial r}2\pi r L = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{p(0)-p(L)}{2\eta L}r \text{ soit } \boxed{v = -\frac{p(0)-p(L)}{4\eta L}r^2 + Cte}$$



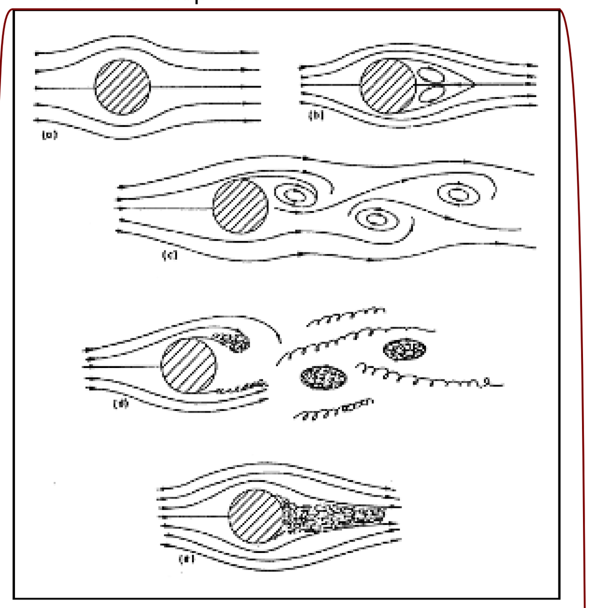
Profil de vitesse

$$v(r=R) = 0 \text{ soit : } \boxed{v = -\frac{p(0)-p(L)}{4\eta L}(r^2 - R^2)}$$



Écoulement autour d'un obstacle

Autour d'une sphère



Constatations expérimentales

$(a)\ R_e \sim 1$

$(b)\ R_e \sim 20$

$(c)\ R_e \sim 100$

$(d)\ R_e \sim 1000$

$(e)\ R_e \sim 10^6$

Force de trainée (colinéaire à l'écoulement)

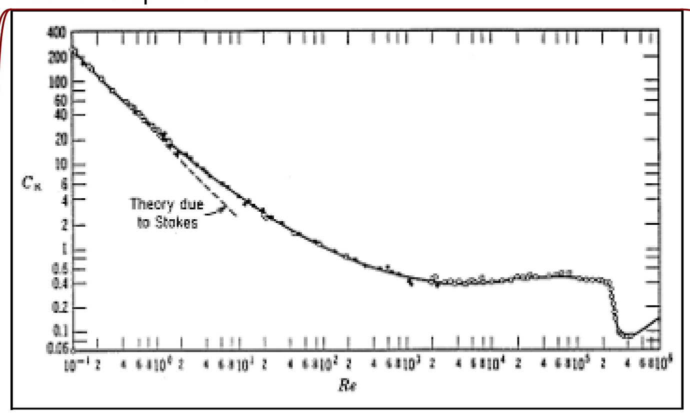
Maître-couple : aire du projeté du solide dans un plan perpendiculaire à l'écoulement: S

Coefficient de trainée: C_x

$$F_t \propto \frac{1}{2}\,\mu U^2\cdot S$$

$$\text{Soit : } \boxed{F_t = C_x\times\frac{1}{2}\,\mu U^2\cdot S}$$

Pour une sphère



Faible nombre de Reynolds

$$\ln C_x \simeq -\ln Re + Cte \text{ soit } C_x \simeq \frac{Cte}{R_e}$$

$$\boxed{F_t \propto U}$$

Fort nombre de Reynolds

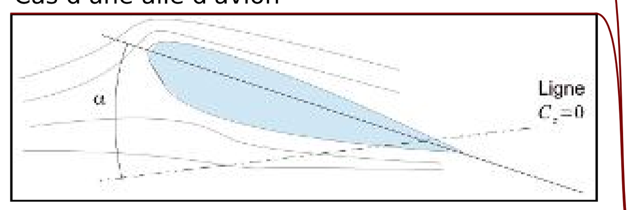
$$C_x \simeq Cte \text{ soit } \boxed{F_t \propto U^2}$$

Force de portance (normale à l'écoulement)

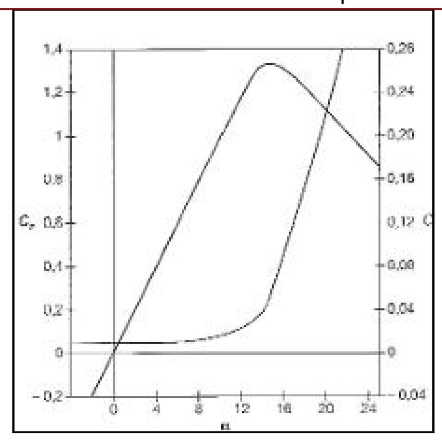
Coefficient de portance: C_z

$$\boxed{F_p = C_z\times\frac{1}{2}\,\mu U^2\cdot S}$$

Cas d'une aile d'avion



Coefficients de trainée et de portance



Constatations expérimentales

$\alpha < 15°$: portance qui augmente, trainée faible

$\alpha \geqslant 15°$: décrochage