

Devoir surveillé n°03 (vendredi 11 octobre, durée 4 h)

Mettre en évidence les résultats. Séparer les problèmes. Justifier les réponses.

Calculatrice autorisée

1 Résolution de problème : risque d'hypothermie

Durée conseillée pour cet exercice : environ 45 minutes.

L'objet de l'exercice est de répondre à la question suivante :

Combien de temps un plongeur peut-il rester dans une eau à 18°C avant d'être en danger d'hypothermie, suivant qu'il porte ou non une combinaison ?

Afin de répondre à cette question, les données suivantes sont proposées :

- hypothermie moyenne chez l'homme :
 - hypothermie modérée 35°C à 34°C,
 - hypothermie moyenne 34°C à 32°C,
 - hypothermie grave en dessous de 32°C ;
- énergie journalière fournie par le métabolisme humain :
2400 kcal soit $1,0 \times 10^4$ kJ environ ;
- capacité thermique massique du corps humain :
 $c_{\text{corps}} = 3,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- résistance thermique moyenne de la peau humaine pour un homme :
 $3,0 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$;
- puissances surfaciques ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) de perte du corps humain :
 - par rayonnement :
 $p_R = aT_{\text{ext}}^3(T - T_{\text{ext}})$ avec $a = 22,8 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$,
 - par convection : $p_c = h(T - T_{\text{ext}})$ avec $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$,
avec T_{ext} la température du milieu environnant.
- combinaison :
 - épaisseurs « classiques » d'une combinaison de plongée : 3,0 mm ; 5,0 mm ; 7,0 mm ;
 - conductivité thermique du néoprène : $0,20 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Il sera nécessaire d'introduire des valeurs numériques « raisonnables » pour certains paramètres non fournis ci-dessus.

Les étapes du raisonnement doivent être expliquées de manière concise mais précise.

Ne pas hésiter à réaliser des schémas pour illustrer la démarche de résolution.

2 Mesure de la fréquence cardiaque

Certains manèges proposent aux passagers d'évaluer leur « peur » en mesurant leur rythme cardiaque. Le rythme cardiaque varie d'environ 60 battements par minute pour un sujet au repos jusqu'à 200 battements lors d'un effort physique intense ou d'une forte émotion. La contraction d'un muscle, le cœur en particulier, crée un signal électrique. La détermination du rythme cardiaque sur les manèges passe par la mesure de la différence de potentiel électrique entre les deux mains du passager. Sur le garde corps du manège, sont fixées deux électrodes où le passager pose ses deux mains. La différence de potentiel est de l'ordre de quelques dizaines de mV. Le rapport signal sur bruit est en général plutôt faible. Il est donc nécessaire de mettre en forme le signal avant de pouvoir extraire la fréquence cardiaque. Cette partie se propose d'étudier les différentes étapes de mise en forme du signal. Après amplification (non étudiée), le signal est soumis à deux opérations de filtrage.

Pour tout signal sinusoïdal $u(t)$, la grandeur complexe associée sera notée \underline{u} . Tous les amplificateurs opérationnels sont supposés idéaux.

II.A – Premier filtrage

Le signal amplifié est appliqué en entrée d'un filtre dont la structure est donnée [figure 4](#).

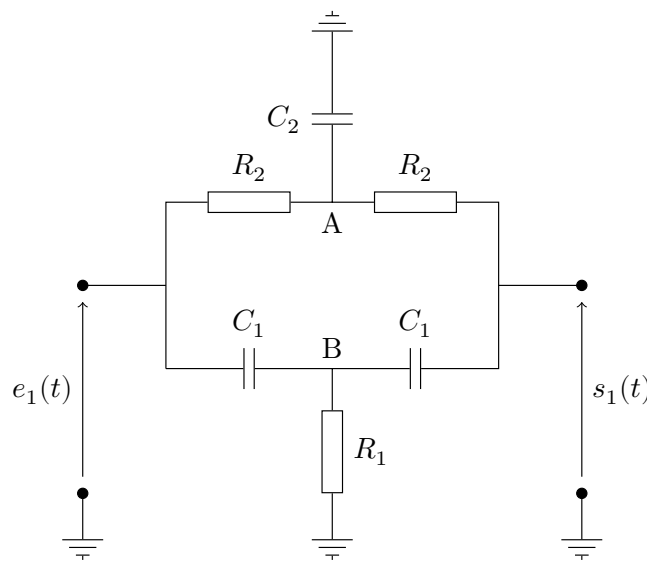


Figure 4

On donne les valeurs des composants : $R = R_1 = R_2/2 = 16 \text{ k}\Omega$ et $C = C_1 = C_2/2 = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$.

Ce filtre est un filtre réjeteur : il ne transmet pas les signaux dont la pulsation est voisine de $\omega_0 = \frac{1}{2RC}$.

On considérera qu'aucun courant n'est prélevé en sortie du montage.

II.A.1) En étudiant de façon qualitative le comportement basses et hautes fréquences, justifier qu'il est légitime de dire que le filtre de la figure 4 est un filtre réjeteur.

II.A.2) Calculer la valeur de la fréquence f_0 associée à ω_0 . Pourquoi ce filtre est-il important dans le cas présent ?

II.B – Deuxième filtrage : filtre passe-bande

La fréquence des battements cardiaques étant comprise dans un intervalle relativement restreint et de façon à s'affranchir au maximum de parasites hautes et très basses fréquences, on applique un filtre passe-bande au signal obtenu en sortie du filtre précédent. La structure du circuit utilisé est donnée figure 5.

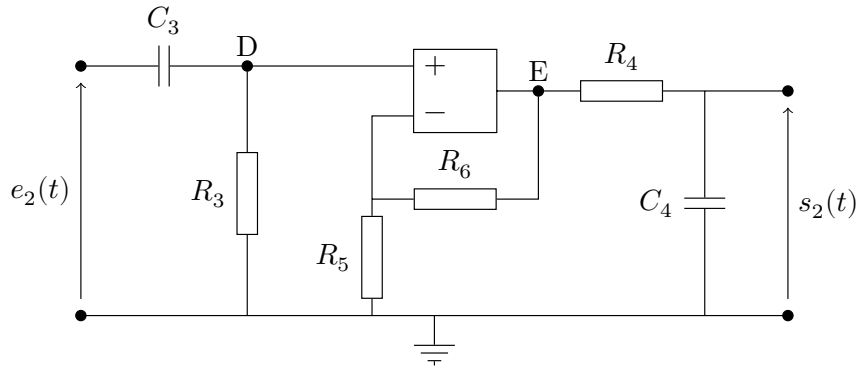


Figure 5

II.B.1) Comment faut-il relier le circuit précédemment étudié et le circuit de la figure 5 pour que le signal $s_1(t)$ obtenu en sortie du filtre réjecteur ne soit pas perturbé par l'ajout du montage de la figure 5 ?

II.B.2) Justifier de façon qualitative que l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire. Montrer de façon qualitative que ce circuit présente bien un caractère passe-bande.

II.B.3) On souhaite que la fréquence de coupure basse soit égale à 0,5 Hz et la haute égale à 150 Hz. Ces valeurs sont-elles compatibles avec les fréquences cardiaques humaines ?

II.B.4) En évaluant successivement les quotients $\underline{V}_D/\underline{e}_2$, $\underline{V}_E/\underline{V}_D$ et $\underline{s}_2/\underline{V}_E$, montrer que la fonction de transfert $\underline{H}_2 = \underline{s}_2/\underline{e}_2$ s'exprime comme le produit de trois fonctions de transfert très simples. On précisera le rôle de chacune d'entre elles.

II.B.5) Proposer pour R_3 , R_4 , C_3 et C_4 des valeurs permettant de réaliser le filtrage souhaité. Les valeurs proposées devront être compatibles avec les composants couramment utilisés en travaux pratiques.

II.B.6) En plus de la fonction filtrage, le filtre proposé possède un deuxième avantage. Lequel ?

II.C – Après amplification et filtrages, l'allure du signal obtenu est donnée figure 6.

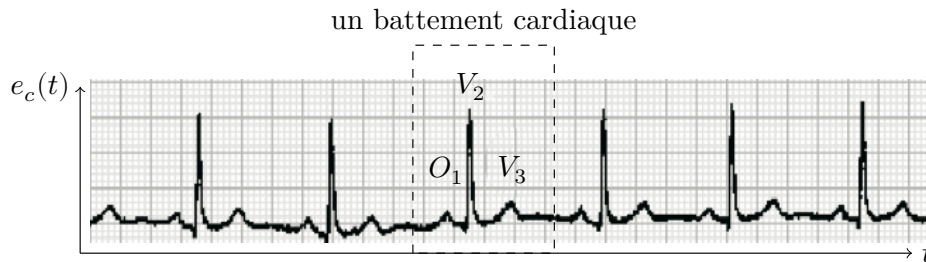


Figure 6

Le signal électrique $e_c(t)$ émis au cours d'un battement cardiaque est complexe. En effet, la figure 6 montre trois phases distinctes : la première (O_1) correspond à l'action des oreillettes, alors que les deux autres phases (V_2 et V_3) correspondent à l'action des ventricules. Pour rendre la mesure de la fréquence cardiaque possible à l'aide d'un compteur numérique (non étudié), le signal électrique du cœur est transformé en un signal créneau d'amplitude donnée, où seul le signal de la phase V_2 est sélectionné. Cependant, malgré les opérations de mise en forme, le signal de la phase V_2 reste complexe, comme le met en évidence la figure 7 qui représente le détail d'un battement cardiaque.

II.C.1) Le signal électrique $e_3(t)$ correspondant aux battements cardiaques est appliqué sur l'entrée + de l'amplificateur opérationnel du montage de la figure 8. La tension V_0 est une tension continue et positive.

Expliquer le fonctionnement de ce dispositif. Que va être la réponse de ce circuit à un signal du type de celui de la figure 7 ? Ce circuit est-il adapté à la détermination de la fréquence cardiaque ? Justifier la réponse (on pourra s'aider d'un schéma).

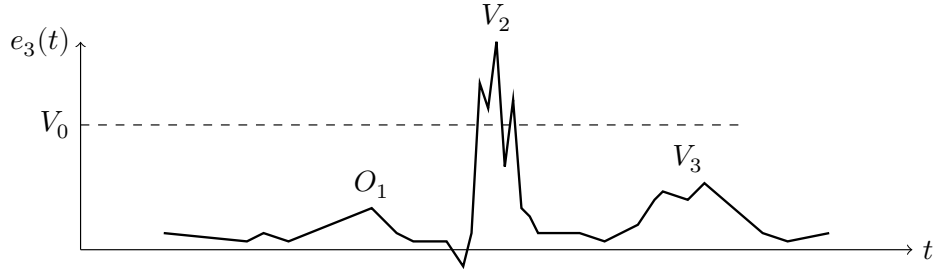


Figure 7

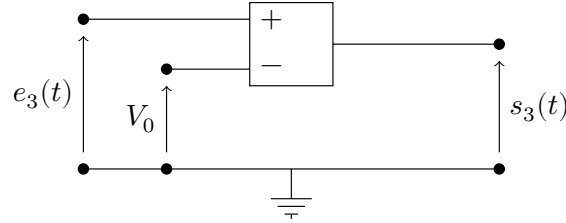


Figure 8

II.C.2) En réalité, le circuit utilisé est donné [figure 9](#). La tension V_0 est une tension continue et positive. On considère dans un premier temps un signal d'entrée sinusoïdal $e_4(t) = E_0 \cos(\omega t)$. Justifier qualitativement que l'amplificateur opérationnel ne peut pas fonctionner en régime linéaire.

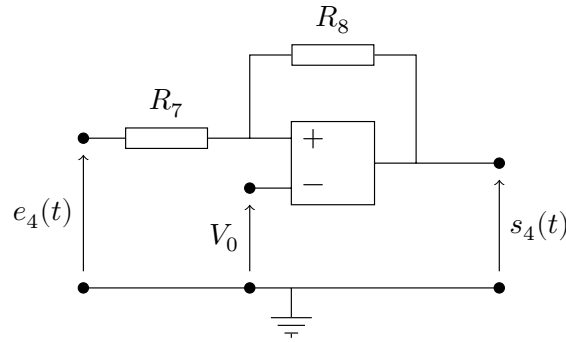


Figure 9

On souhaite que $s_4(t) = +V_{\text{sat}}$, V_{sat} étant la tension de saturation de l'amplificateur opérationnel. Montrer que $e_4(t)$ doit être supérieure à une tension U_1 dont on donnera l'expression en fonction de V_0 , V_{sat} et des résistances du circuit.

On souhaite maintenant que $s_4(t) = -V_{\text{sat}}$. Montrer que $e_4(t)$ doit être inférieure à une tension U_2 dont on donnera l'expression en fonction de V_0 , V_{sat} et des résistances du circuit.

Pour quelle valeur de $e_4(t)$ se fait le basculement de $s_4(t) = +V_{\text{sat}}$ à $s_4(t) = -V_{\text{sat}}$? Même question pour le basculement de $s_4(t) = -V_{\text{sat}}$ à $s_4(t) = +V_{\text{sat}}$.

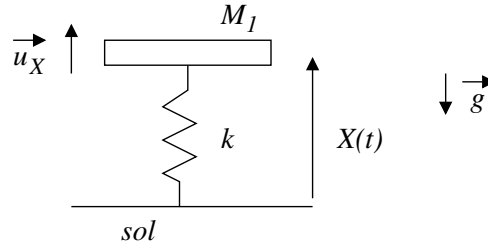
Donner la condition pour que U_1 soit positive.

Dans ce cas et en supposant que $E_0 > U_2$, représenter sur un même graphe les fonctions $e_4(t)$ et $s_4(t)$ en fonction du temps, en faisant apparaître les tensions E_0 , U_1 , U_2 et V_{sat} . Comment s'appelle un tel montage ?

II.C.3) Le signal d'entrée $e_4(t)$ est à présent le signal cardiaque $e_c(t)$ représenté sur les figures 6 et 7. Représenter sur une même figure l'allure du signal cardiaque et celle du signal $s_4(t)$ que l'on souhaite obtenir par le filtre. À quelles conditions sur U_1 et U_2 la fréquence du signal $s_4(t)$ obtenu correspond-elle effectivement à la fréquence du rythme cardiaque ? Quel est l'intérêt du circuit effectivement utilisé par rapport à celui de la [figure 8](#) ?

3 Réalisation d'un sismographe

On considère le miroir d'un interféromètre de Michelson, dispositif optique interférentiel qui permet de déterminer des distances avec grande précision. Le dispositif optique ne sera pas étudié et l'étude se concentrera sur les seuls mouvements du miroir.



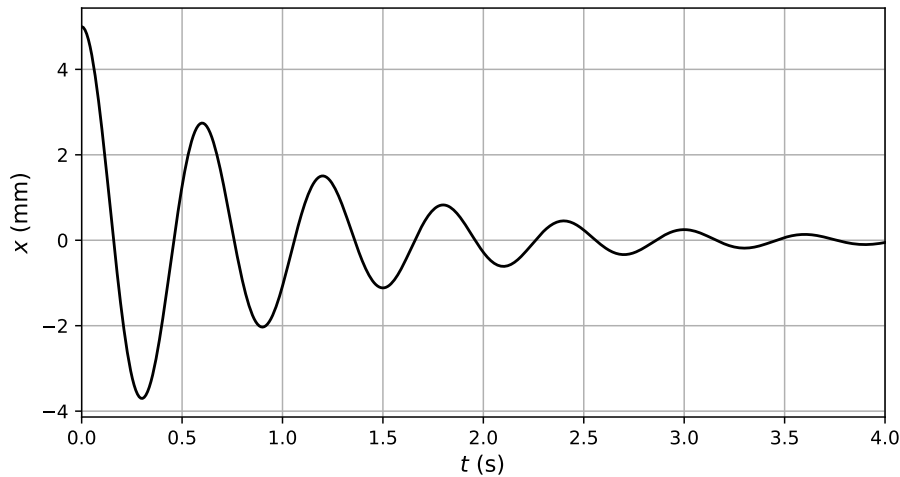
Le miroir de masse m est fixé à un ressort qui le supporte. Le ressort, de raideur k , de longueur à vide l_0 et de masse négligeable, est assujéti à se déplacer verticalement grâce à un système de guidage. L'ensemble repose sur le sol qui constitue un référentiel galiléen. Le miroir (M_1), repéré par sa coordonnée $X(t)$, peut donc osciller le long de l'axe vertical ascendant Ox .

On suppose que ses oscillations sont amorties par une force de frottement fluide $\vec{F}_v = -f\vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse instantanée de (M_1) et f un coefficient de frottement positif.

Q1. Déterminer X_{eq} la longueur du ressort à l'équilibre.

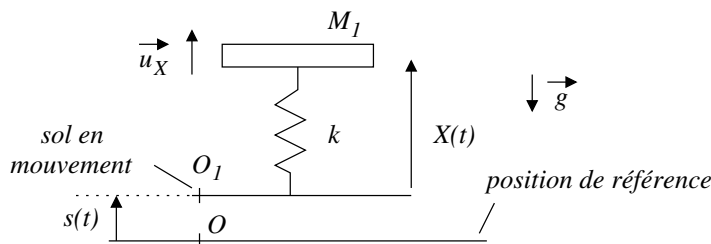
Q2. On pose $x(t) = X(t) - X_{eq}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lors du mouvement.

Partant de la position d'équilibre, le miroir (M_1) est écarté d'une distance x_0 et lâché sans vitesse initiale. La figure ci-dessous donne le graphe $x(t)$ du mouvement de (M_1).



Q3. En s'appuyant sur ce graphe, résoudre l'équation différentielle de la question 2. On posera, pour simplifier les écritures : $\lambda = f/(2m)$ et $\omega_0^2 = k/m$.

Q4. Calculer, à partir du graphe précédent, les valeurs approchées de λ et ω_0 . En déduire une estimation numérique de f et de k en prenant $m = 100$ g.



Le sol, sur lequel repose le système est maintenant animé d'un mouvement de translation sinusoïdal suivant l'axe x ayant pour expression $s(t) = s_0 \cos(\omega_1 t)$ par rapport à un référentiel galiléen de référence.

Q5. On se place toujours dans le référentiel terrestre galiléen ; que devient l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'élongation $x(t)$ du miroir (M_1) ?

On peut alors exprimer l'élongation de (M_1) en régime forcé par $x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t + \phi)$.

Q6. En utilisant la notation complexe, donner l'expression de la transmittance $\underline{Y} = \underline{x}/\underline{s}$ du système en fonction de ω_1 , ω_0 et λ .

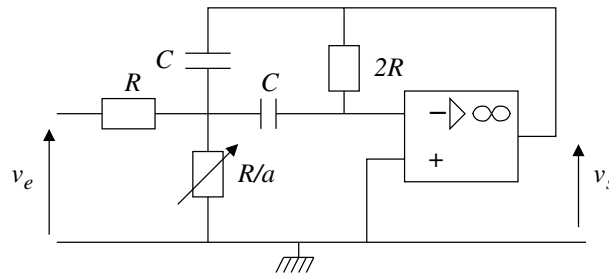
Q7. On note Y le module de \underline{Y} . Quelle est la limite de Y quand $\omega_1 \rightarrow +\infty$? Expliquer physiquement. Quelle est la plage de valeurs de λ pour lesquelles Y passe par un maximum quand ω_1 varie ?

Q8. Représenter l'allure du graphe de Y en fonction de ω_1 , on distinguera deux situations possibles suivant la valeur de λ .

Le but du sismographe étant de reproduire le plus fidèlement les mouvements du sol, comment choisir ω_0 vis à vis des pulsations d'excitation ?

Le mouvement du sol est périodique de pulsation ω_1 mais pas nécessairement sinusoïdal et on désire analyser les différentes composantes harmoniques du signal. Pour cela on traite le signal électrique qui est l'image de l'élongation du miroir (M_1) à l'aide du montage ci-après dans lequel la résistance R/a est une résistance variable.

L'ALI est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire.



Q9. Montrer que la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega} \right)}$$

Donner les expressions de H_0 , Q et Ω en fonction de R , C et a .

Q10. On désire isoler l'harmonique N du signal d'entrée de pulsation ω_1 . Expliquer que le réglage du produit RC et de a permet de répondre à la question.