

Devoir surveillé n°03 (correction)

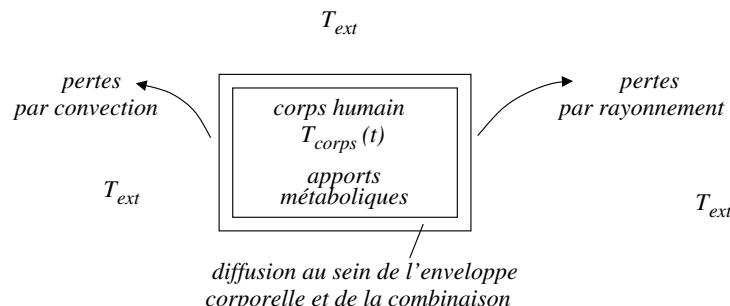
1 Résolution de problème : risque d'hypothermie

D'après un sujet proposé par Alain Favier, lycée Champollion.

Présentation du problème.

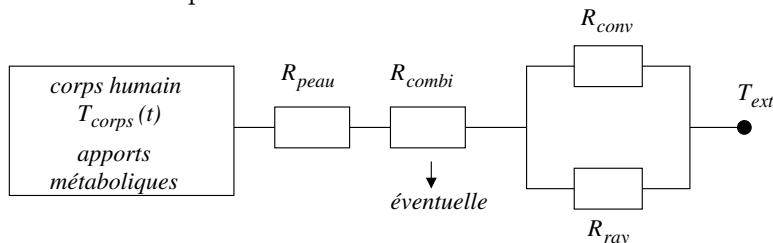
Il s'agit de réaliser un bilan énergétique du plongeur dans l'eau. La température du plongeur évolue sous l'effet de deux phénomènes antagonistes :

- les pertes par rayonnement et convection et la diffusion thermique au sein de la peau et de l'éventuelle combinaison ;
- les apports du métabolisme.



En supposant les parois de la peau et de la combinaison suffisamment « fines », on considère que l'ARQS est applicable et que le temps caractéristique d'évolution de la température du corps humain est grand devant le temps caractéristique d'évolution de la température au sein de la peau ou de la combinaison. La notion de résistance thermique est alors applicable.

Le flux thermique traverse la peau puis l'éventuelle combinaison et enfin les résistances thermiques associées au phénomène de convection et de rayonnement, ces deux dernières étant en parallèles :



Par la suite, on considère un plongeur de masse $m = 75 \text{ kg}$. Pour simplifier on assimile le plongeur à un cylindre de hauteur $H = 1,75 \text{ m}$ et de circonférence moyenne $C = 80 \text{ cm}$, c'est à dire une surface latérale équivalente de $S = 1,4 \text{ m}^2$. Une évaluation plus précise nécessiterait par exemple de décomposer le corps humain en plusieurs cylindres : un pour le tronc, deux pour les jambes et deux pour les bras.

Mise en œuvre et calculs.

→ Résistances thermiques :

- la résistance équivalente vaut $R_{eq} = R_{peau} + R_{combi} + \frac{R_{conv}R_{ray}}{R_{conv}+R_{ray}}$;
- l'épaisseur e de la combinaison étant très faible vis à vis de la taille de l'individu, on peut appliquer le modèle du conducteur plan pour estimer la résistance de la combinaison : $R_{combi} = \frac{e}{\lambda S}$;
- le flux thermique de rayonnement permet d'accéder à la résistance de rayonnement :

$$\Phi_{ray} = p_R S = a T_{ext}^3 (T - T_{ext}) S \Rightarrow R_{ray} = \frac{T - T_{ext}}{\Phi_{ray}} = \frac{1}{a T_{ext}^3 S}$$

- le flux thermique de convection permet d'accéder à la résistance de convection :

$$\Phi_{conv} = p_c S = h(T - T_{ext}) S \Rightarrow R_{conv} = \frac{T - T_{ext}}{\Phi_{conv}} = \frac{1}{h S}$$

→ Bilan thermique :

Pour le corps humain de capacité thermique $C = mc_{corps}$ et de température T_{corps} , on applique le premier principe de la thermodynamique entre deux instants voisins t et $t+dt$. Le corps humain subit des pertes via la résistance thermique équivalente et des apports du fait d'une puissance métabolique P_m :

$$mc_{corps} dt T_{corps} = P_m dt - \frac{T_{corps} - T_{ext}}{R_{eq}} dt$$

Ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\tau \frac{dT_{corps}}{dt} + T_{corps} = T_{ext} + R_{eq} P_m \quad \text{avec} \quad \tau = mc_{corps} R_{eq}$$

Cette équation différentielle admet pour solution avec $T_{corps}(t=0) = T_0 = 37^\circ\text{C}$:

$$T_{corps}(t) = (T_0 - T_{ext} - P_m R_{eq}) e^{-t/\tau} + T_{ext} + P_m R_{eq}$$

→ Début de l'hypothermie :

Il faut alors déterminer l'instant t_{hyp} vérifiant $T_{corps}(t_{hyp}) = T_{hyp}$, c'est à dire :

$$t_{hyp} = \tau \ln \left(\frac{T_0 - T_{ext} - P_m R_{eq}}{T_{hyp} - T_{ext} - P_m R_{eq}} \right)$$

Applications numériques.

On travaille avec $T_{hyp} = 34^\circ\text{C}$ et une combinaison d'épaisseur $e = 5,0 \text{ mm}$.

- $R_{combi} = \frac{5,0 \times 10^{-3}}{0,20 \times 1,4} \approx 0,018 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$;
- $R_{conv} = \frac{1,0}{10 \times 1,4} = 0,071 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$;
- $R_{ray} = \frac{1,0}{22,8 \times 10^{-8} \times 291^3 \times 1,4} = 0,13 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$;
- sans combinaison : $R_{eq}^1 = 0,030 + \frac{0,071 \times 0,13}{0,071 + 0,13} = 0,076 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
- avec combinaison : $R_{eq}^2 = 0,018 + 0,030 + \frac{0,071 \times 0,13}{0,071 + 0,13} = 0,094 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
- la puissance métabolique est obtenue en divisant l'énergie journalière par la durée d'une journée :

$$P_m = \frac{10^7}{24 \times 3600} = 116 \text{ W}$$

Ce qui donne pour la durée recherchée :

- sans combinaison :

$$t_{hyp}^1 = 75 \times 3,5 \times 10^3 \times 0,076 \times \ln \left(\frac{37 - 18 - 116 \times 0,076}{34 - 18 - 116 \times 0,076} \right) \approx 2 \text{ h}$$

- avec combinaison :

$$t_{hyp}^2 = 75 \times 3,5 \times 10^3 \times 0,094 \times \ln \left(\frac{37 - 18 - 116 \times 0,094}{34 - 18 - 116 \times 0,094} \right) \approx 3 \text{ h } 10 \text{ min}$$

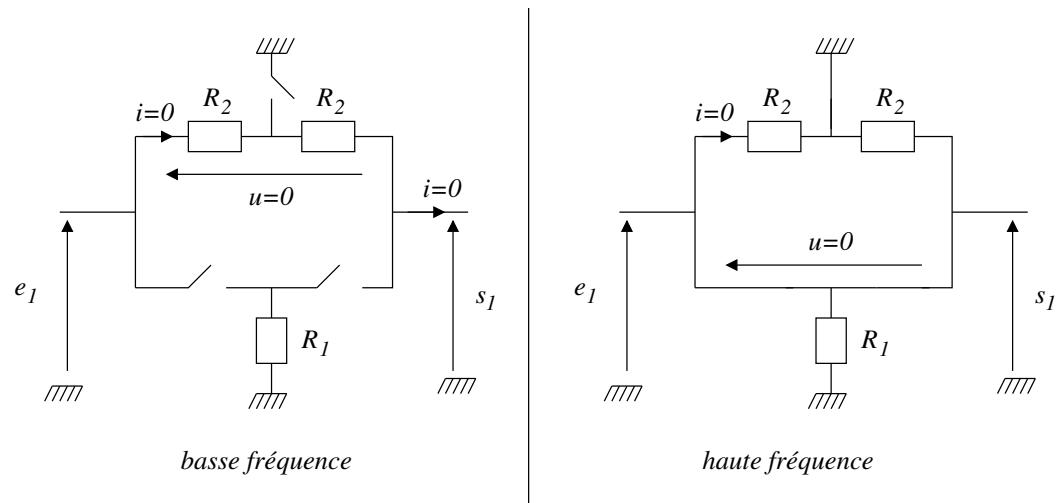
On constate que la combinaison augmente sensiblement l'instant d'apparition de l'hypothermie.

Si l'individu nage, on peut penser qu'il augmente sa dépense énergétique, l'apport thermique est plus important ce qui lui permet de repousser la durée avant hypothermie.

2 Mesure de la fréquence cardiaque (CS PC 2014)

II. A.

1. On représente les équivalents basses fréquences (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert) et hautes fréquences (le condensateur se comporte comme un fil) du montage :



- en basse fréquence : aucun courant ne s'écoule dans les résistances R_2 , en conséquence $s_1 = e_1$;
- en haute fréquence : les condensateurs se comportant comme des fils $s_1 = e_1$.

Le filtre laissant passer les basses fréquences et les hautes fréquences, on peut penser à un **filtre réjecteur**.

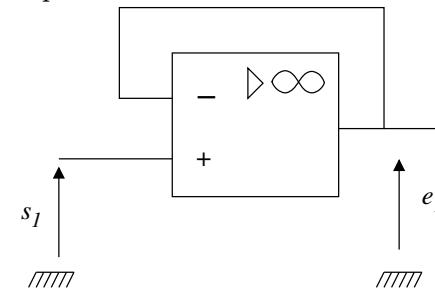
2. A.N. :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \times 2 \times 16 \times 10^3 \times 0,1 \times 10^{-6}} \Rightarrow f_0 \approx 50 \text{ Hz}$$

Le signal à extraire étant faible, il s'agit d'**éliminer tous les signaux parasites en particulier le 50 Hz, issu du réseau électrique**.

II. B.

1. Il s'agit de **ne pas prélever de courant en sortie du filtre réjecteur**, pour cela, on utilise un **montage suiveur** reliant la sortie du filtre réjecteur et l'entrée du filtre passe-bande.



2. La rétroaction sur la borne inverseuse permet de faire l'hypothèse d'un régime linéaire.

La structure $\{C_3, R_3\}$ en amont de l'ALI est un passe-haut, la structure $\{R_4, C_4\}$ en aval de l'ALI est un passe-bas. **La combinaison d'un passe-bas et d'un passe-haut avec des fréquences de coupure adaptées génère un passe-bande.**

3. Les rythmes cardiaques limites exprimés en hertz valent $60/60 = 1,0$ Hz et $200/60 \approx 3$ Hz et sont donc bien **compris dans la bande-passante**. On aurait pu envisager une fréquence un peu plus faible pour la coupure haute fréquence.
4. Pour un ALI idéal en régime linéaire $v_- = v_+ = V_D$, l'application de trois diviseurs de tension conduit à :

$$\text{— passe-haut : } \frac{V_D}{e_2} = \frac{jR_3C_3\omega}{1 + jR_3C_3\omega}$$

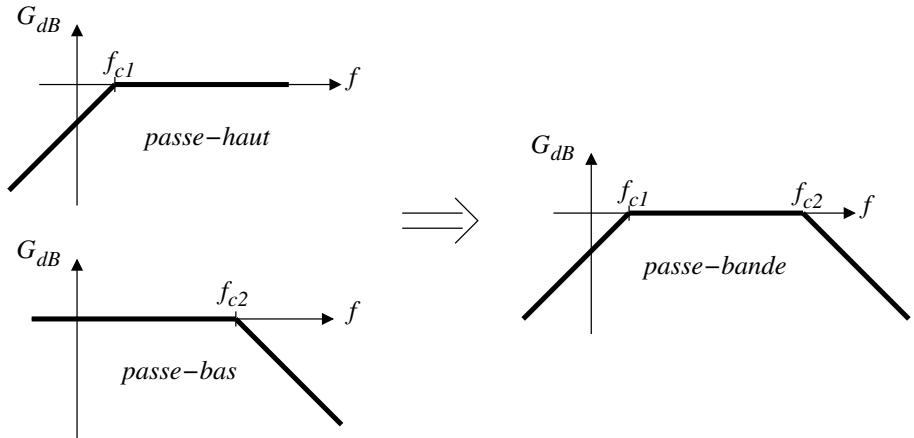
$$\text{— amplificateur non-inverseur : } \frac{V_E}{V_D} = 1 + \frac{R_6}{R_5}$$

$$\text{— passe-bas : } \frac{s_2}{V_E} = \frac{1}{1 + jR_4C_4\omega}$$

C'est à dire pour la fonction de transfert de l'ensemble :

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{s_2}{e_2} = \frac{s_2}{V_E} \times \frac{V_E}{V_D} \times \frac{V_D}{e_2} \\ \Leftrightarrow H_2 &= \frac{jR_3C_3\omega}{1 + jR_3C_3\omega} \times \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) \times \frac{1}{1 + jR_4C_4\omega} \end{aligned}$$

5. La fréquence de coupure du passe-bas f_{c2} est suffisamment élevée vis à vis de celle du passe-haut f_{c1} ($f_2/f_1 = 300$) pour supposer que la fonction de transfert du passe-haut est unitaire à la coupure haute-fréquence et réciproquement lorsqu'on réalise l'étude basse-fréquence sur le passe-haut.



La fréquence de coupure du passe-bas est $f_{c2} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{R_4C_4}$, en retenant $R_4 = 1,0 \text{ k}\Omega$, on en déduit :

$$C_4 = \frac{1}{2\pi \times R_4 f_{c2}} = \frac{1}{2\pi \times 1,0 \times 10^3 \times 150} \Rightarrow C_4 = 1,1 \mu\text{F}$$

La fréquence de coupure du passe-haut est $f_{c1} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{R_3C_3}$, en retenant $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, on en déduit :

$$C_3 = \frac{1}{2\pi \times R_3 f_{c1}} = \frac{1}{2\pi \times 10 \times 10^3 \times 0,50} \Rightarrow C_3 = 32 \mu\text{F}$$

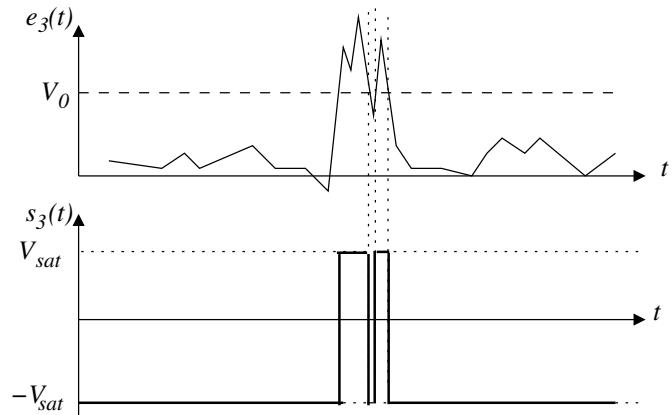
6. La partie « amplificateur non-inverseur » permet d'**amplifier les signaux dont les fréquences sont dans la bande passante**.

II. C.

1. Le circuit proposé en figure 8 est un **comparateur simple**. En conséquence :

- pour $e_3(t) > V_0$, $s_3(t) = +V_{sat}$;
- pour $e_3(t) < V_0$, $s_3(t) = -V_{sat}$.

Ce qui donne pour la réponse en sortie :



Du fait des fluctuations du signal d'entrée dans la zone V_2 , le signal de sortie présente un double créneau au lieu d'un créneau unique, ce qui va fausser la mesure du compteur. **Le dispositif n'est pas adapté à la mesure de la fréquence cardiaque.**

2. **L'absence de rétroaction sur la borne inverseuse** assure que l'ALI fonctionne en régime de saturation.

Appliquons une loi des noeuds en terme de potentiels à l'entrée non-inverseuse :

$$\frac{e_4(t) - v_+}{R_7} = \frac{v_+ - s_4(t)}{R_8} \Leftrightarrow v_+ = \frac{R_8 e_4(t) + R_7 s_4(t)}{R_7 + R_8}$$

— $s_4(t) = +V_{sat}$ nécessite $\varepsilon = v_+ - V_0 > 0$, c'est à dire $v_+ > V_0$ et grâce à la relation précédente :

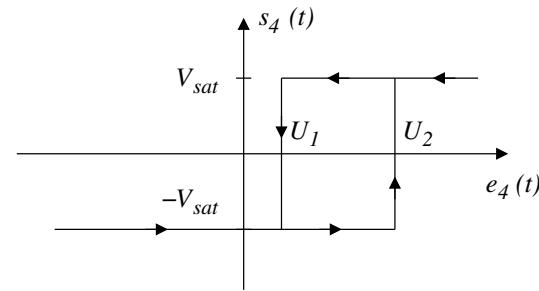
$$\frac{R_8 e_4(t) + R_7 V_{sat}}{R_7 + R_8} > V_0 \Leftrightarrow e_4(t) > U_1 \quad \text{avec} \quad U_1 = \frac{V_0(R_7 + R_8) - R_7 V_{sat}}{R_8}$$

— $s_4(t) = -V_{sat}$ nécessite $\varepsilon = v_+ - V_0 < 0$, c'est à dire $v_+ < V_0$ et grâce à la relation précédente :

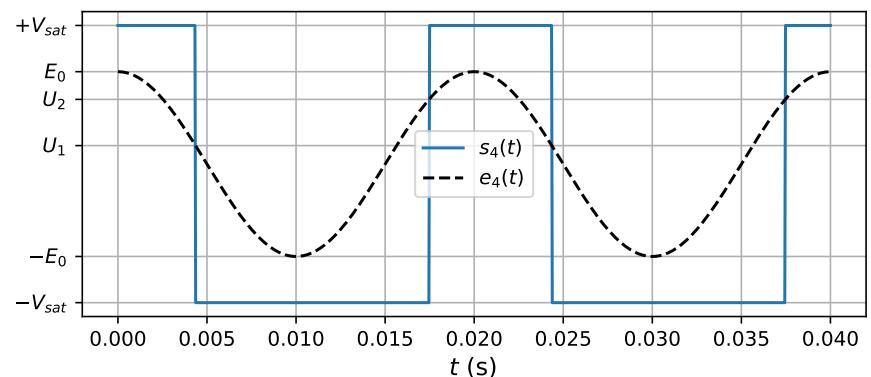
$$\frac{R_8 e_4(t) - R_7 V_{sat}}{R_7 + R_8} < V_0 \Leftrightarrow e_4(t) < U_2 \quad \text{avec} \quad U_2 = \frac{V_0(R_7 + R_8) + R_7 V_{sat}}{R_8}$$

$$U_1 > 0 \Leftrightarrow V_0 > \frac{R_7 V_{sat}}{R_7 + R_8}.$$

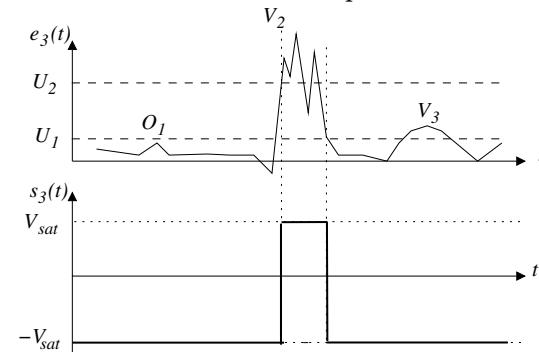
On en déduit le cycle du **montage à d'hystérésis** qui montre les basculements de la tension de sortie sachant que $U_2 > U_1$:



On en déduit l'évolution des tensions au cours du temps :



3. L'idée est de retenir U_1 et U_2 comme représentées sur la courbe suivante :



Le montage à hystérésis est moins sensible aux fluctuations que le comparateur simple.

3 Sismographe (adapté de CS TSI 2009)

1. À l'équilibre les forces se compensent ce qui donne en projection sur l'axe Ox :

$$0 = -mg - k(X_{eq} - l_0) \Leftrightarrow X_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \quad (1)$$

2. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la relation fondamentale de la dynamique à la masse, ce qui donne en projection sur l'axe Ox (en exploitant la relation à l'équilibre) :

$$m\ddot{X} = -mg - k(X - l_0) - f\dot{X} \Rightarrow m\ddot{X} = -k(X - X_{eq}) - f\dot{X} \quad (1)$$

C'est à dire avec $x(t) = X(t) - X_{eq}$: $\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$.

3. On réécrit l'équation sous forme canonique : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Le graphique indique un régime pseudo-périodique, les solutions de l'équation caractéristiques sont :

$$r_{\pm} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

La solution générale de l'équation est de la forme :

$$x(t) = e^{-\lambda t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Compte tenu des conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on en déduit le système d'équations :

$$x_0 = A \quad \text{et} \quad 0 = -\lambda \times A + B \times \omega$$

C'est à dire : $x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right]$.

4. L'amortissement présentant au moins 5 ou 6 oscillations bien visibles, on peut assimiler la pseudo-pulsation ω observée sur le graphique à la pulsation propre ω_0 ($\lambda^2 \ll \omega_0^2$).

Sur le graphique, on observe 5 périodes en 3,0 s, c'est à dire :

$$\omega_0 \approx \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3,0/5} \Rightarrow \omega_0 \approx 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Considérons d'autre part l'évolution du signal sur une période temporelle $T = 2\pi/\omega$:

$$x(T) = x_0 e^{-\lambda T} \left[\cos(\omega T) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega T) \right] = x_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{T} \times \ln \left(\frac{x_0}{x(T)} \right)$$

Lors de la première oscillation, le signal passe d'une amplitude de 5,0 mm à 2,7 mm :

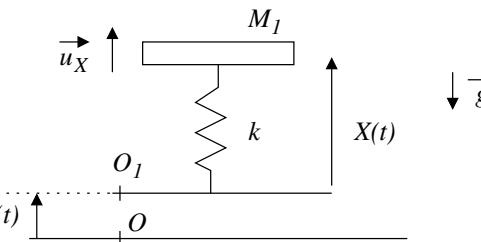
$$\lambda = \frac{5}{3,0} \times \ln \left(\frac{5}{2,7} \right) \Rightarrow \lambda = 1,0 \text{ s}^{-1}$$

On a bien $\lambda^2 \ll \omega_0^2$, On en déduit :

$$f = 2m\lambda = 2 \times 0,100 \times 1,02 \Rightarrow f = 0,21 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = m\omega_0^2 = 0,100 \times 10,4^2 \Rightarrow k = 11 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

5. Commençons par réaliser un schéma de la situation :



Dans le référentiel galiléen lié au point O , on applique la relation fondamentale de la dynamique au miroir. On constate que l'accélération du miroir s'écrit alors :

$$\vec{a}(M_1) = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}_1}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{O\vec{O}}_1}{dt^2} + \frac{d^2 \overrightarrow{O_1M}_1}{dt^2} = \ddot{s}(t)\vec{u}_x + \ddot{x}(t)\vec{u}_x$$

Les forces étant identiques à celles de la question 2, il s'agit donc d'ajouter $-\ddot{s}(t) = \omega_1^2 s_0 \cos(\omega_1 t)$ dans le membre de droite pour obtenir :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_1^2 s_0 \cos(\omega_1 t)$$

6. En utilisant la notation complexe, on en déduit :

$$(-\omega_1^2 + 2j\omega_1\lambda + \omega_0^2) \underline{x} = \omega_1^2 s_0 \Rightarrow \underline{Y}(j\omega_1) = \frac{\omega_1^2}{-\omega_1^2 + 2j\omega_1\lambda + \omega_0^2}$$

$$7. Y = \frac{\omega_1^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2\lambda^2}} ; \lim_{\omega_1 \rightarrow +\infty} Y \rightarrow 1$$

Pour $\omega_1 \ll \omega_0$, l'inertie du bloc {masse,ressort} s'exprime et le bloc ne peut osciller à de telles fréquences, le miroir reproduit fidèlement les mouvements

du sol.

Le module de la fonction de transfert est nul à fréquence nulle et tend vers 1 à haute fréquence ; pour savoir si la fonction passe par un maximum, on réécrit le module :

$$Y(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - 1\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2} \times \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}}}$$

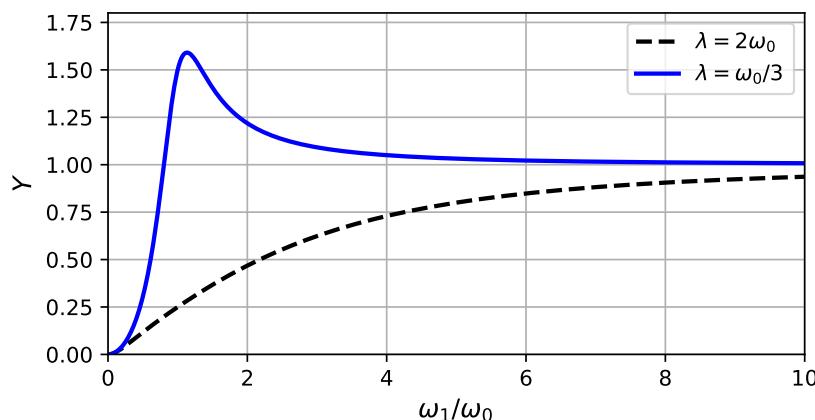
Avec $u = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}$, on se ramène à l'étude de la fonction :

$$f : u \rightarrow \left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2} \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad f'(u) = 2 \times \frac{-1}{u^2} \times \left(\frac{1}{u} - 1\right) - \frac{1}{u^2} \times \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2}$$

$$\text{La dérivée s'annule en } \frac{1}{u} = 1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}}$$

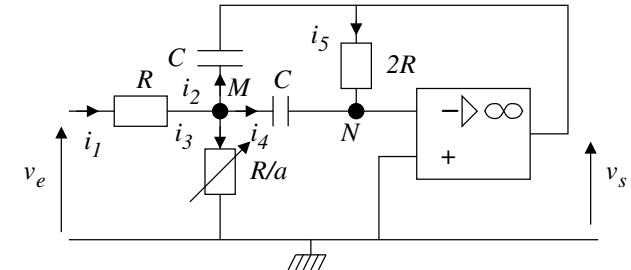
À condition que $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

8. Compte tenu de la question précédente :



Soit ω_1 la pulsation typique d'excitation, on doit choisir $\omega_0 \ll \omega_1$ de manière à se situer dans l'asymptote haute fréquence pour laquelle l'ensemble des excitations soient reproduites fidèlement et identiquement quelle que soit la fréquence.

9. La rétroaction sur la borne inverseuse permet de supposer un régime linéaire, c'est à dire pour l'ALI idéal : $v_- = v_+ = 0$.



On applique alors la loi des nœuds en terme de potentiels au point M :

$$\frac{\underline{v}_e - \underline{v}_M}{R} = (\underline{v}_M - \underline{v}_s) \times jC\omega + (\underline{v}_M - 0) \times jC\omega + \frac{\underline{v}_M - 0}{R/a}$$

$$\Leftrightarrow \underline{v}_e - \underline{v}_M = \underline{v}_M \times 2jRC\omega - \underline{v}_s \times jRC\omega + a\underline{v}_M$$

Par ailleurs une loi des nœuds appliquée en N donne :

$$(\underline{v}_M - 0) \times jC\omega = \frac{0 - \underline{v}_s}{2R} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v}_s = -2jRC\omega \underline{v}_M$$

En éliminant \underline{v}_M des deux lois des nœuds, on en déduit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{-1}{1 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \left(\frac{1+a}{2} \right) \right)}$$

Par identification, on en déduit : $\frac{Q}{\Omega} = RC$ et $Q\Omega = \frac{1}{RC} \left(\frac{1+a}{2} \right)$, c'est à dire :

$$Q = \sqrt{\frac{1+a}{2}} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1+a}{2}}$$

10. La pulsation de résonance Ω du filtre passe-bande doit être positionnée sur l'harmonique de rang N ce qui impose :

$$\Omega = N\omega_1 = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1+a}{2}}$$

D'autre part, on ajuste la valeur de a pour avoir un facteur de qualité suffisamment élevé éliminant les autres fréquences $Q = \sqrt{\frac{1+a}{2}} \gg 1$.

Ces deux contraintes sont imposées en ajustant les valeurs de RC et a .