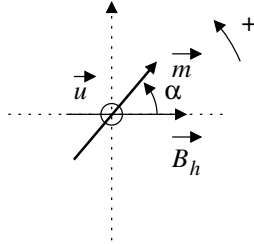


Mines 2019 Sujet I PSI (correction)

Q1. En un point de la surface terrestre, la composante horizontale du champ magnétique \vec{B}_h pointe vers le pôle nord (Cf. suite du sujet).



L'énergie potentielle prend la forme : $E_p = -mB_h \cos(\alpha)$. Pour $\alpha = 0$, l'énergie potentielle est minimale et correspond à une **position d'équilibre stable**. À l'équilibre, l'aiguille s'aligne sur le champ magnétique terrestre et pointe elle aussi vers le nord.

Q2. Pour un mouvement d'oscillation amorti, la pseudo-pulsation a pour expression $\omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ et peut être assimilée à la pulsation propre ω_0 pour un mouvement faiblement amorti, en pratique dès que le facteur de qualité Q dépasse quelques unités.

Appliquons alors un théorème du moment cinétique pour l'aiguille aimantée par rapport à l'axe du pivot dans le référentiel terrestre supposé galiléen dans le cas d'un mouvement non amorti et pour les « petits » angles. **Seule la composante horizontale du champ magnétique contribue à faire pivoter l'aiguille.**

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \cdot \vec{u} = (\vec{m} \wedge \vec{B}_h) \cdot \vec{u} \Rightarrow I\ddot{\alpha} = -mB_h \sin(\alpha) \approx -mB_h \alpha$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mB_h}{I} \alpha = 0$$

Pour cette équation d'oscillateur harmonique :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_{osc}} = \sqrt{\frac{mB_h}{I}} \Leftrightarrow B_h = \frac{4\pi^2 I}{m\tau_{osc}^2}$$

Q3. Sachant que $\vec{e}_z = \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta$ et compte tenu de la formule proposée en fin d'énoncé :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \left[\frac{3R_T \vec{e}_r (M_0 \vec{e}_z \cdot R_T \vec{e}_r) - R^2 M_0 \vec{e}_z}{R_T^3} \right] = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} [3 \cos(\theta) \vec{e}_r - \vec{e}_z]$$

$$\Leftrightarrow \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} [2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta]$$

Q4. À l'équateur $\theta = +\pi/2$, l'énoncé indique que le champ magnétique est dirigé vers le nord d'intensité B_E , c'est à dire : $\vec{B}(\theta = \pi/2) = -B_E \vec{e}_\theta$ (\vec{e}_θ étant dirigé vers le sud) ; en comparant à la formule obtenue à la question précédente et appliquée en $\theta = \pi/2$, on en déduit :

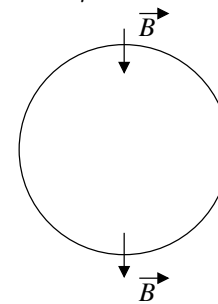
$$-B_E \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_\theta \Rightarrow M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0}$$

On en déduit $M_0 < 0$ avec :

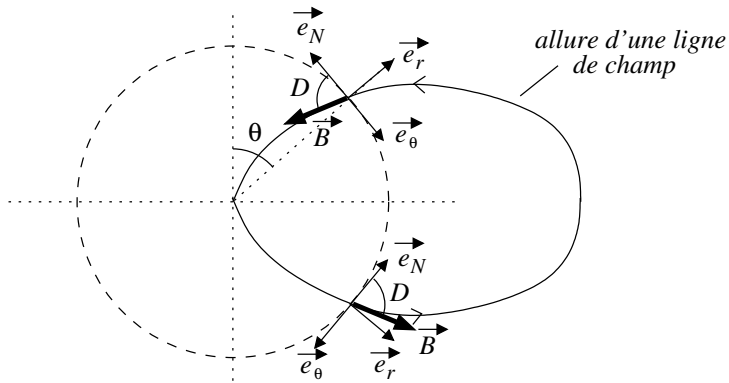
$$|M_0| = \frac{4\pi \times (6,4 \times 10^6)^3 \times 3,0 \times 10^{-5}}{4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow |M_0| = 7,9 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Champ magnétique :

- pôle Nord : $\vec{B}(\theta = 0) = \frac{2\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z = -2B_E \vec{e}_z$; **le champ magnétique a une intensité de $60 \mu\text{T}$ et est dirigé vers le centre de la Terre.**
- pôle Sud : $\vec{B}(\theta = \pi) = -\frac{2\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \times (-\vec{e}_z) = -2B_E \vec{e}_z$; **le champ magnétique a une intensité de $60 \mu\text{T}$ et fuit le centre de la Terre.**



Q5. À l'aide de l'expression du champ magnétique en coordonnées sphériques et de l'allure des lignes de champ magnétique d'un dipôle vue en cours, on peut réaliser le schéma suivant :



On a : $\vec{B}(P) = -B_E \times [2 \cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta]$

- hémisphère nord : $\theta \in [0, \pi/2[$, $B_r < 0$ et donc $D < 0$;
- hémisphère sud : $\theta \in [\pi/2, \pi[$, $B_r > 0$ et donc $D > 0$.

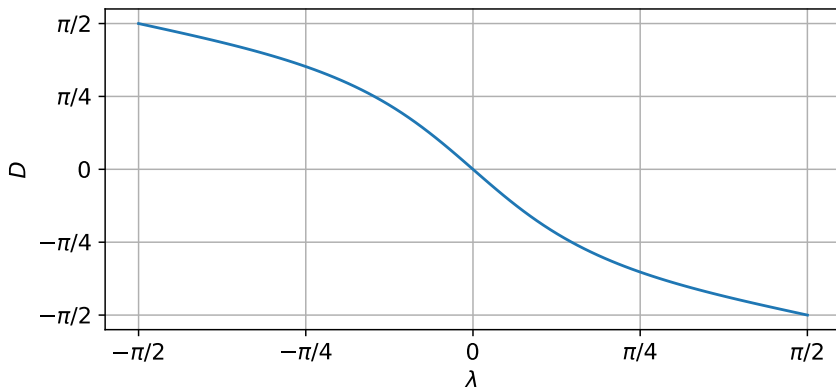
D'autre part (avec $\lambda = \pi/2 - \theta$) :

$$|\tan(D)| = \left| \frac{B_r}{B_\theta} \right| = \left| \frac{2 \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right| = \left| \frac{2 \sin(\lambda)}{\cos(\lambda)} \right| = 2 |\tan(\lambda)|$$

Dans l'hémisphère nord $D < 0$ et $\lambda > 0$, dans l'hémisphère sud $D > 0$ et $\lambda < 0$, D et λ sont donc de signe différent ; en conséquence, pour des angles entre $-\pi/2$ et $\pi/2$:

$$\tan(D) = -2 \tan(\lambda)$$

Allure de la déclinaison magnétique :



Au voisinage des pôle $D \rightarrow \pm\pi/2$, la composante horizontale du champ

magnétique diminue donc et finit par s'annuler, il en est alors de même du couple qui aligne l'aiguille aimantée selon le pôle nord. En pratique, en approchant des pôles, toute perturbation magnétique est susceptible de perturber la mesure.

Pour savoir si on se trouve dans l'hémisphère sud ou nord, l'idée serait d'utiliser la boussole verticalement pour aligner l'aiguille sur la composante du champ magnétique perpendiculaire à la surface terrestre, cette composante pointant vers le ciel dans l'hémisphère sud et vers le sol dans l'hémisphère sud. Cependant une boussole usuelle n'est pas prévue pour être utilisée dans cette position.

Q6. En présence du seul champ magnétique, la force de Lorentz se limite à sa composante magnétique donc la puissance est nulle :

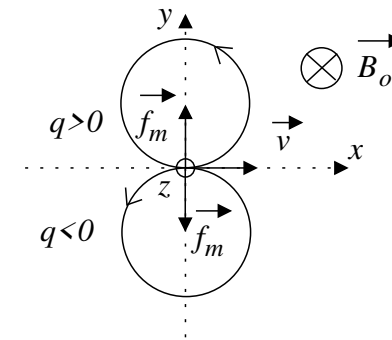
$$\mathcal{P} = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

Le théorème de l'énergie cinétique assure alors que le mouvement est uniforme (norme de la vitesse constante).

Le caractère circulaire étant admis (rayon R de la trajectoire), on applique, dans le référentiel terrestre, un principe fondamental de la dynamique à la particule de charge q soumise à la seule force magnétique :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\vec{u}_r} \quad m \frac{v^2}{R} = |q| v B_0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{v=R\omega_c} \quad \boxed{\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}}$$

Le sens de rotation dépend du signe de la charge, on le détermine en considérant le sens de la force qui impose la courbure :



Q7. Exprimons tout d'abord l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \times (R\omega_c)^2 = \frac{m}{2} \times \left(R \times \frac{qB_0}{m} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad E_c = \frac{q^2 B_0^2 R^2}{2m}$$

Une particule de charge positive tourne dans le sens trigonométrique à condition que $\vec{B}_0 = -B_0\vec{e}_z$; pour exprimer le moment magnétique, il faut considérer que la charge q tournant en une période T génère une intensité électrique $i = q/T$:

$$\vec{M} = i\vec{S} = \frac{q}{T} \times \pi R^2 \vec{e}_z = \frac{q\omega_c R^2}{2} \vec{e}_z$$

On en déduit :

$$-\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{q\omega_c R^2}{2} \vec{e}_z \cdot (-B_0 \vec{e}_z) = \frac{q\omega_c R^2 B_0}{2} \Rightarrow \boxed{-\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = \frac{q^2 B_0^2 R^2}{2m} = E_c}$$

Q8. Au voisinage du pôle nord, $\vec{B} = -B_0\vec{e}_z$ (Cf. Q3), ce qui implique (Cf. sens de rotation expliqué à la question Q6) $\vec{M} = \|\vec{M}\|\vec{e}_z$ pour une charge positive. De plus, la norme du champ magnétique diminue lorsqu'on s'éloigne du pôle nord $\frac{dB_0(z)}{dz} < 0$, en conséquence :

$$\vec{F} = -\underbrace{M_z}_{>0} \underbrace{\frac{dB_0(z)}{dz}}_{<0} \vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \underbrace{F_z}_{>0} \vec{e}_z}$$

Le proton est donc freiné quand il s'approche du pôle nord.

Q9. Dans ce cas de figure : $\text{div} \vec{B} = -\frac{dB_0(z)}{dz} = -G_m(z)$. L'équation de Maxwell-Thomson imposerait alors $G_m(z) = 0$. En pratique, il y a nécessairement une composante radiale du champ magnétique qui assure que le tube de courant se resserre quand on s'approche du pôle Nord.

Q10. D'après la question Q3, le champ magnétique au voisinage du pôle Nord ($\theta \approx 0$) s'écrit :

$$\vec{B}_P \approx \frac{\mu_0 M_0}{2\pi z^3} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \times \left(-\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} \right) \vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}_P = -\frac{2B_E R_T^3}{z^3} \vec{e}_z$$

C'est à dire : $B_0(z) = \frac{2B_E R_T^3}{z^3}$ et $G_m(z) = \frac{dB_0(z)}{dz} = -\frac{6B_E R_T^3}{z^4}$; le proton étant au voisinage du pôle Nord $z \approx R_T$ et finalement :

$$\boxed{G_m(R_T) \approx \frac{6B_E}{R_T} \approx \frac{3B_0(R_T)}{R_T}}$$

On peut alors évaluer la norme de la force de dérive \vec{F} en utilisant le résultat obtenu à la question Q7 sur l'énergie cinétique pour un moment magnétique et un champ magnétique tous les deux dirigés selon \vec{e}_z :

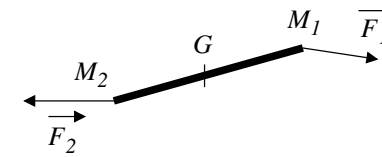
$$\|\vec{F}\| = |MG_m(R_T)| = \frac{3B_0(R_T)}{R_T} \times |M| = \frac{3}{R_T} \times |MB_0(R_T)| \xrightarrow{Q7} \boxed{\|\vec{F}\| = \frac{3E_c}{R_T}}$$

$$\text{A.N. : } \|\vec{F}\| = \frac{3 \times 0,5 \times 10^3 \times 1,6 \times 10^{-19}}{6,4 \times 10^6} \Rightarrow \boxed{\|\vec{F}\| = 3,8 \times 10^{-23} \text{ N}}$$

$$\text{Pour le poids : } P = m_p g = 1,67 \times 10^{-27} \times 10 \Rightarrow \boxed{P = 1,6 \times 10^{-26} \text{ N}}$$

Le poids est bien négligeable vis à vis de la force de dérive.

Q11. Considérons un élément de corde. Si on néglige la masse de cet élément, les seules forces à considérer sont les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 exercées par le reste de la corde en amont et en aval. Appliquons alors les lois de la mécanique à cet élément dont on néglige la masse et donc l'inertie :



— principe fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_2 = -\vec{F}_1} \quad (1)$$

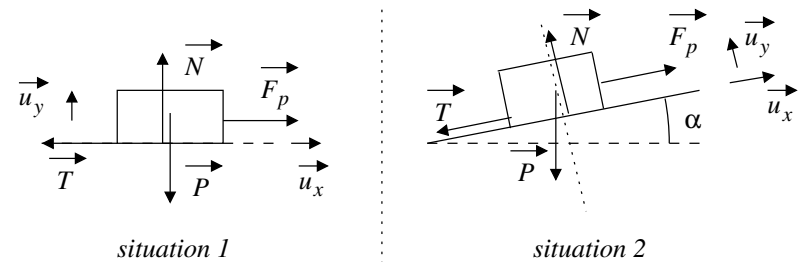
— théorème du moment cinétique :

$$\vec{0} = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge (-\vec{F}_1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{0} = \overrightarrow{M_2 M_1} \wedge \vec{F}_1} \quad (2)$$

La relation (1) assure que la tension se transmet à l'identique le long de la corde, la seconde assure que la tension est bien en chaque point tangente à la corde.

Q12. Représentons chacune des situations et appliquons un principe fondamental de la dynamique au traîneau dans chacun des cas :



— situation 1 : $M\ddot{x} = F_p - \mu_d \times N$ et $0 = N - Mg$

$$\Rightarrow M\ddot{x} = F_p - \mu_d \times Mg$$

— situation 2 : $M\ddot{x} = F_p - \mu_d \times N - Mg \sin(\alpha)$ et $0 = N - Mg \cos(\alpha)$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\alpha \ll 1 \text{ rad}} M\ddot{x} \approx F_p - \mu_d \times Mg - Mg\alpha = F_p - (\mu_d + \alpha) \times Mg$$

La situation 2 est transposable à la situation 1 en posant $\mu'_d = \mu_d + \alpha$.

Q13. Au démarrage la force de traction doit dépasser l'intensité de la force de frottement solide qui, à la limite du glissement, atteint la valeur $\mu_s Mg$, en conséquence :

$$F_0^{min} = \mu_s Mg$$

$$\text{A.N. : } F_0^{min} = 8,0 \times 10^{-2} \times 500 \times 9,8 \Rightarrow F_0^{min} = 3,9 \times 10^2 \text{ N.}$$

Q14. D'après le principe fondamental de la dynamique précédemment établi, l'équation différentielle vérifiée par la vitesse prend la forme :

$$M \frac{dv}{dt} = F_0 - \beta v - \mu_d Mg \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{M} v = \frac{F_0}{M} - \mu_d g$$

La vitesse limite v_0 vérifie : $v_0 = \frac{1}{\beta} (F_0 - \mu_d Mg)$; d'autre part la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$v(t) = v_0 \times (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{M}{\beta}$$

95% de la vitesse finale est atteinte au bout d'une durée t_1 telle que :

$$v(t_1) = \frac{95}{100} v_0 = v_0 \times (1 - e^{-t_1/\tau}) \Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \tau \ln(20) \Rightarrow t_1 \approx \frac{3M}{\beta}$$

$$\text{A.N. : } \beta = \frac{3 \times 500}{5} \Rightarrow \beta = 3,0 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg = 300 \times 3 + 5 \times 10^{-2} \times 500 \times 9,8 \Rightarrow F_0 \approx 1,1 \text{ kN}$$

Q15. Appliquons à nouveau un principe fondamental de la dynamique au traîneau. En projection sur les directions radiale et tangentielle, on obtient :

$$M \frac{v_0^2}{R} = T \sin(\theta) \quad \text{et} \quad T \cos(\theta) = \mu_d Mg$$

En faisant le rapport des deux expressions puis en les élevant au carré, on obtient respectivement :

$$\tan(\theta) = \frac{v_0^2}{R\mu_d g} \quad \text{et} \quad T = \sqrt{(\mu_d Mg)^2 + \left(M \frac{v_0^2}{R}\right)^2}$$

Q16. On applique un premier principe de la thermodynamique sur une tranche d'épaisseur entre z et $z + dz$. On néglige le travail des forces de pression vis à vis des apports thermiques. En l'absence d'apports en volume, on obtient :

$$dU = \rho_g c_g S dz \frac{\partial T_g}{\partial t} dt = \delta W + \delta Q \approx \delta Q = [\Phi(z, t) - \Phi(z + dz, t)] dt = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz dt$$

On applique alors la loi de Fourier : $\Phi(z, t) = j_z(z, t)S = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial z} S$. En combinant les deux dernières relations, on en déduit finalement :

$$\frac{\partial T_g(z, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} \frac{\partial^2 T_g(z, t)}{\partial z^2}$$

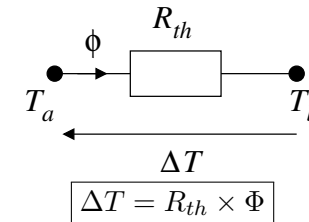
Q17. La relation précédente indique en terme de dimension $\left[\frac{\lambda_g}{\rho_g c_g}\right] = \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$.

Typiquement, en une durée Δt , l'effet thermique diffuse dans la glace sur une distance Δz tel que :

$$\Delta t = \frac{\rho_g c_g}{\lambda_g} (\Delta z)^2$$

Pour se placer en régime quasi-stationnaire et négliger la dépendance temporelle, il faut supposer que les évolutions extérieures (variation des températures extérieures, croissance de l'épaisseur de glace) se font en des durées longues vis à vis du temps caractéristique de diffusion au sein de la couche de glace.

Q18. En régime permanent (ou quasi-permanent) et en l'absence d'apports en volume, la résistance thermique R_{th} est le rapport de la différence de température aux limites de la couche par le flux thermique Φ qui traverse cette couche :



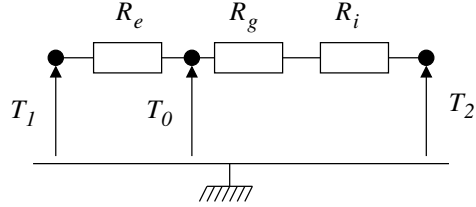
Pour une géométrie plane : $R_g = \frac{z_g}{\lambda_g S}$ et $R_e = \frac{e}{\lambda_e S}$.

Q19. Dans le cadre de l'échange conducto-convectif, le flux thermique et la diffé-

rence de température sont reliés selon :

$$\Phi = P_u \times S = h\Delta T \times S = hS \times \Delta T \Rightarrow R_i = \frac{\Delta T}{\Phi} \Rightarrow \boxed{R_i = \frac{1}{hS}}$$

Q20. Dans un premier temps, ne tenons pas compte de l'apport dû au gel de l'eau, le schéma électrique équivalent s'exprime aisément à l'aide des résistances thermiques :



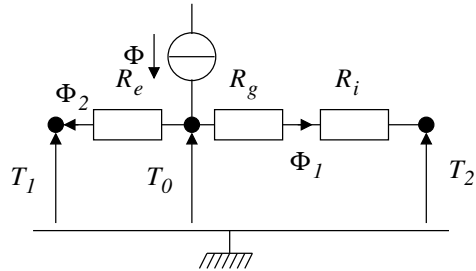
La solidification de l'eau à l'interface glace eau libre de l'énergie qui va s'écouler au travers des différents milieux. Le phénomène de solidification peut donc être vu comme une source idéale de courant thermique (comme le serait un radiateur au sein d'une pièce).

Quantifions cela : pendant dt il se forme une couche de glace dz_g représentant une masse δm qui libère une énergie :

$$\delta \mathcal{E} = \delta m \times l_f = \rho_g S dz_g l_f$$

C'est à dire une puissance : $\Phi = \frac{\delta E}{dt} \Rightarrow \boxed{\Phi = \rho_g S l_f \frac{dz_g}{dt}}$

Cet apport s'effectue au niveau de l'interface glace eau et le schéma devient :



Q21. En électricité, on peut réaliser ce dispositif à l'aide d'un **montage suiveur utilisant un ALI**. Le montage permet de recopier une tension sans prélever de courant du fait de la résistance d'entrée quasi-infinie de l'ALI.

Dans le cas présent, on sait qu'à la pression atmosphérique, la **température de changement d'état** liée à la solidification de l'eau est $T_0 = 0^\circ\text{C}$. Ceci assure que

l'interface eau liquide-glace se maintient à cette température.

Q22. Appliquons une loi des nœuds au niveau de l'interface en faisant attention à bien respecter la convention récepteur :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{T_0 - T_2}{R_i + R_g} + \frac{T_0 - T_1}{R_e}$$

$$\Leftrightarrow \rho_g S l_f \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{1}{hS} + \frac{z_g}{\lambda_g S}} + \frac{T_0 - T_1}{\frac{e}{\lambda_e S}} \Leftrightarrow \boxed{\rho_g l_f \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}} + \frac{T_0 - T_1}{\frac{e}{\lambda_e}}}$$

Compte tenu de l'approximation proposée, l'équation se simplifie selon :

$$l_f \rho_g \left(\frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h} \right) \frac{dz_g}{dt} = T_0 - T_2 \Leftrightarrow \left(\frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h} \right) \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{l_f \rho_g}$$

Pour une épaisseur initiale nulle, on intègre la relation précédente :

$$\frac{z_g^2}{2\lambda_g} + \frac{z_g}{h} = \frac{T_0 - T_2}{l_f \rho_g} \times t \Leftrightarrow \frac{1}{2\lambda_g} \left[z_g^2 + \frac{2\lambda_g}{h} z_g \right] = \frac{T_0 - T_2}{l_f \rho_g} \times t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\lambda_g} \left[z_g^2 + \frac{2\lambda_g}{h} z_g \right] = \left(\frac{2\lambda_g}{h} \right)^2 \times \frac{T_0 - T_2}{l_f \rho_g} \times \frac{h^2}{4\lambda_g^2} \times t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{2\rho_g l_f \lambda_g}{(T_0 - T_2) h^2} \times \left[z_g^2 + \frac{2\lambda_g}{h} z_g \right] = \ell_g^2 \times t}$$

C'est à dire par identification avec la formule proposée :

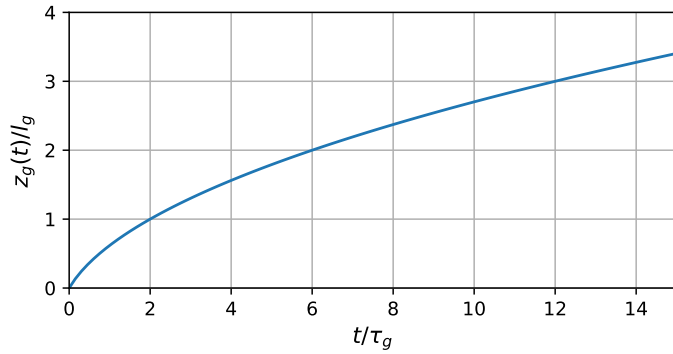
$$\boxed{\tau_g = \frac{2\rho_g l_f \lambda_g}{(T_0 - T_2) h^2} \quad \text{et} \quad \ell_g = \frac{2\lambda_g}{h}}$$

Q23. L'équation sur z_g est une équation du second degré qui peut se réécrire :

$$z_g^2 + \ell_g z_g - \ell_g^2 \frac{t}{\tau_g} = 0$$

Cette équation admet comme racine positive :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad z_g(t) = \frac{\ell_g}{2} \times \left[\sqrt{1 + \frac{4t}{\tau_g}} - 1 \right]}$$



On identifie deux situations limites :

— aux temps courts $t \ll \tau_g$, un développement au premier ordre conduit à :

$$z_g(t) \approx \frac{\ell_g}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{4t}{\tau_g} - 1 \right) \approx \frac{\ell_g}{\tau_g} \times t \quad \boxed{z_g(t) \approx \frac{(T_0 - T_2)h}{\rho_g l_f} \times t}$$

λ_g n'apparaît pas contrairement à h , ceci est logique : aux temps courts la couche de glace est très fine et la résistance supérieure s'identifie à la résistance conducto-convective. Le processus de croissance est dominé par le terme convectif, la croissance de la couche est proportionnelle au temps.

— aux temps longs $t \gg \tau_g$,

$$z_g(t) \approx \ell_g \sqrt{\frac{t}{\tau_g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_g(t) \approx \sqrt{\frac{2\lambda_g(T_0 - T_2)t}{\rho_g l_f}}}$$

Aux temps longs, h n'apparaît pas contrairement à λ_g , ceci est logique : pour une couche de glace épaisse la résistance thermique supérieure s'identifie à la résistance de la couche de glace, le processus de croissance est dominé par la diffusion, on retrouve une croissance $\propto \sqrt{t}$.