

## Devoir non surveillé n°02, CS PSI 2008 (correction)

### Partie A.

Le système est le siège d'oscillations sinusoïdales spontanées s'il vérifie la condition de Berkhausen :

Il doit exister une pulsation  $\omega_0$  pour laquelle :  $\boxed{H(j\omega_0) \times F(j\omega_0) = 1}$ .

Les oscillations prennent naissance sur le **bruit électrique** au sein du circuit.

### Partie B.

1. Pour analyser la fonction de transfert, il est préférable de diviser les termes de la fraction par  $j\omega/(Q\omega_0)$ . La fonction se réécrit alors :

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{F_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

La fonction de transfert tend vers 0 à basse et haute fréquence et passe par un maximum  $F_0$  pour  $\omega = \omega_0$ . Il s'agit donc d'un **filtre passe-bande d'ordre 2**.

→ En haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à :

$\frac{F}{F_0} = \frac{1}{jQ\omega/\omega_0}$ , c'est à dire  $-20 \log \left( \frac{Q\omega}{\omega_0} \right) = -20 \log(Q) - 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$  pour l'asymptote haute fréquence qui est une droite de pente  $-20$  dB/dec et d'ordonnée à l'origine  $-20 \log(Q)$ .

→ En basse fréquence, on obtient l'asymptote :  $-20 \log(Q) + 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$ .

La fonction  $G_{dB} = 20 \log \left( \left| \frac{F}{F_0} \right| \right)$  admet un maximum nul pour  $\omega = \omega_0$ .

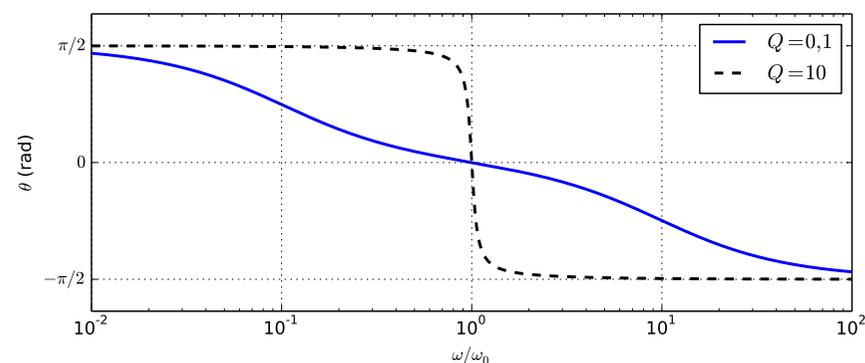
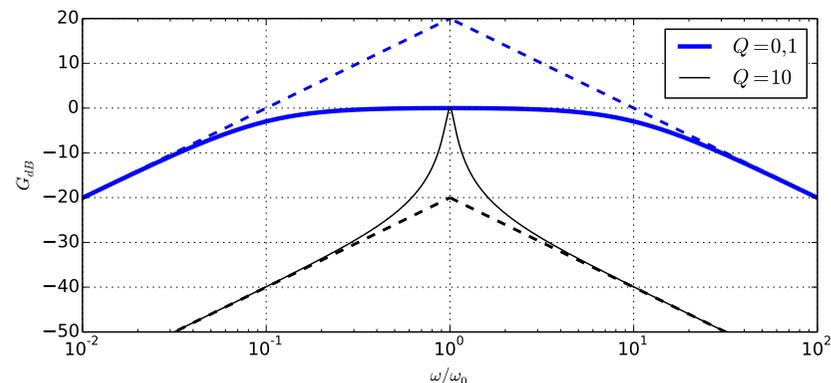
On note enfin que la fonction réelle est invariante par la transformation  $u \rightarrow 1/u$  (avec  $u = \omega/\omega_0$ , ce qui, en représentation logarithmique, revient à une invariance par rapport à l'axe des ordonnées (Cf.  $\log(1/u) = -\log u$ )).

La courbe est d'autant plus piquée et la résonance prononcée que le facteur de la qualité est élevé.

→ Pour la phase :  $\theta = \arg \left( \frac{F}{F_0} \right) = -\arctan \left[ Q \left( u - \frac{1}{u} \right) \right]$ .

Ce qui donne une asymptote  $\pi/2$  à basse fréquence,  $-\pi/2$  à haute fréquence et un déphasage nul à résonance, la « vague » étant d'autant plus abrupte que le facteur de qualité est élevé.

Tracés :



2.  $\underline{H} = H_0$  réelle impose une chaîne retour réelle aussi, ce qui n'est possible que pour  $\boxed{\omega = \omega_0}$ , le gain de la chaîne retour est alors  $F_0$  et la condition de Berkhausen impose :

$$H_0 F_0 = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{H_m = \frac{1}{F_0}}$$

### Partie C.

La chaîne directe vérifie  $\underline{u}_s = H_0 \underline{u}_e$  avec  $H_0$  grandeur réelle.

Les deux tensions sont proportionnelles et vérifient donc la même équation différentielle.

Partant des fonctions de transfert, on passe dans l'espace temporel selon le schéma suivant :

$$\underline{u}_s(t) = H_0 \underline{u}_e(t) = H_0 \underline{F} \times \underline{u}_s \Rightarrow \underline{u}_s(t) = \frac{H_0 F_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \underline{u}_s(t)$$

$$\left(1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \underline{u}_s(t) = \frac{H_0 F_0}{Q\omega_0} j\omega \times \underline{u}_s(t)$$

$$u_s(t) + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_s}{dt^2} = \frac{H_0 F_0}{Q\omega_0} \frac{du_s}{dt}$$

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - H_0 F_0) \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = 0$$

Le système est instable si les coefficients de l'équation différentielle ne sont pas tous de même signe. Ceci se produit pour  $1 - H_0 F_0 < 0$ , c'est à dire  $H_0 > \frac{1}{F_0}$ .

→ Pour  $H_0$  légèrement supérieur à  $\frac{1}{F_0}$ , on observe des **oscillations amplifiées qui font être limitées par les non linéarités de l'ALI**.

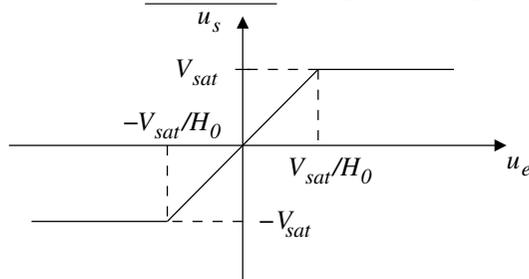
→ Pour  $H_0$  légèrement inférieur à  $\frac{1}{F_0}$ , les éventuelles oscillations sont amorties et n'apparaissent donc pas.

#### Partie D.

1. Dans l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire de l'ALI,  $u_e = v_+ = v_-$ ; la formule du pont diviseur de tension conduit à :

$$u_e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s \Rightarrow \boxed{u_s = H_0 u_e} \text{ avec } \boxed{H_0 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)}$$

et ceci dans la limite où  $|u_s| < V_{sat}$ . Ce qui donne pour le graphe :



2.  $a_0/2$  représente la **valeur moyenne** de la fonction qui est bien évidemment **nulle** d'après la figure 11.

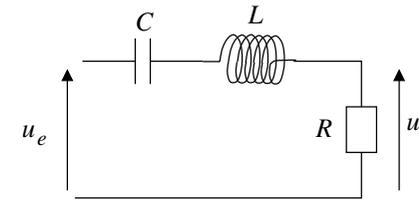
3. Le gain de la chaîne direct n'est plus  $H_0$  mais  $H_0 f(\theta)$ , **la pulsation d'oscillations est toujours  $\omega_0$**  et la condition de Barkhausen s'écrit maintenant :

$$H_0 f(\theta) F_0 = 1 \quad \boxed{f(\theta) = \frac{1}{H_0 F_0}}$$

4. Le signal n'étant pas exactement sinusoïdal, **il est préférable de se placer en sortie du filtre** qui va éliminer une partie des harmoniques.

La chaîne retour est d'autant plus efficace que le filtre est efficace, bande passante étroite qui nécessite un **facteur de qualité élevé** pour le filtre.

À l'aide d'un condensateur, d'une bobine et d'une résistance, on réalise un filtre passe-bande à l'aide du montage suivant :



La tension en sortie est proportionnelle au courant dans le circuit.

→ Basse fréquence : le condensateur se comporte comme un circuit ouvert

→ Haute fréquence : la bobine se comporte comme un circuit ouvert

On est bien en présence d'un filtre passe-bande de pulsation de résonance  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ; pour cette pulsation la fonction de transfert est réelle et son gain est le gain maximal égal à 1.

#### Partie E. Exemple de réalisation : l'oscillateur à pont de Wien

1. La sortie du filtre de Wien est reliée à la borne non inverseuse de l'ALI, on a donc  $i_e = i_+ = 0$ .

Pour la fonction de transfert (Cf. cours) :

$$\boxed{F(j\omega) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + j\frac{1}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

$$\text{Avec } \boxed{F_0 = \frac{1}{3}}, \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}} \text{ et } \boxed{Q = \frac{1}{3}}.$$

Le facteur de qualité  $Q = 1/3$  est faible, **le filtre est donc peu sélectif**, le signal, peu filtré, contient donc des harmoniques.

L'intérêt du filtre de Wien repose sur sa simplicité et l'absence de bobine.

2. Pour  $R_1/R_2 = 3, 4, \text{ et } 5$ , on a :

$R_1/R_2$	3	4	5
$H_0$	4	5	6
$f(\theta)$	$3/4 = 0,75$	$3/5 = 0,6$	$3/6 = 0,5$
$\theta$ (rad)	$\approx 0,85$	$\approx 1,05$	$\approx 1,15$
$\theta$ ( $^\circ$ )	$\approx 49$	$\approx 60$	$\approx 66$

Les valeurs de  $\theta$  ont été évaluées par lecture graphique sur la figure 12.

Avec de telles valeurs de  $\theta$  et d'après la figure 11, on constate que l'ALI passe une bonne partie du temps en régime de saturation, **le signal est donc nettement éloigné d'une simple sinusoïde**.

### Partie F.

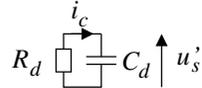
- On a, respectivement,  $i = \frac{u_2 - u}{R}$  et  $u = ku_1u_2$ , on élimine alors  $u$  pour en déduire :

$$i = \frac{u_2 - ku_1u_2}{R} \Rightarrow u_2 = \left( \frac{R}{1 - ku_1} \right) i$$

On est en présence d'une relation de proportionnalité entre  $u_2$  et  $i$ , le montage est équivalent à une résistance, simplement la résistance dépend de la valeur de  $u_1$  et est donc une **résistance variable**.

- Détecteur de crête :

- Lorsque la diode est bloquante, on est ramené à un simple circuit  $RC$ , le condensateur se déchargeant dans la résistance :



$$i_c = C_d \frac{du'_s}{dt} \quad \text{et} \quad u'_s = -R_d i_c \Rightarrow R_d C_d \frac{du'_s}{dt} + u'_s = 0$$

Compte tenu de la condition initiale et, tant que la diode reste bloquante,  $u'_s$  évolue selon :

$$u'_s(t) = V_m e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = R_d C_d$$

- La diode reste bloquante tant que  $u < 0$ , c'est à dire  $u_s < u'_s$ . Inversement la diode devient passante, lorsque  $u_s(t)$  atteint à nouveau  $u'_s(t)$ , la diode étant alors assimilée à un fil, on a  $u_s(t) = u'_s(t)$ .
  - Pour que  $u'_s$  reste quasiment constante, il faut que le condensateur se décharge le moins possible lorsque la diode est bloquante, ce qui nécessite  $R_d C_d \gg T$  comme on le voit sur les graphes proposés.
- $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10^4} = 6,3 \times 10^{-4}$  s et  $R_d C_d = 70 \times 10^3 \times 10^{-6} = 0,07$  s ;  $R_d C_d \gg T$ , la condition de la question F.2 est bien vérifiée.

Principe de fonctionnement du montage :

Dans ce nouveau montage,  $u'_s = u_1$  et la partie associée à la figure 14 joue le rôle de la résistance  $R_2 = \frac{R}{1 - ku'_s}$ .

→ Si l'amplitude de  $u_s$  augmente (oscillations amplifiées,  $H_0$  trop grand),  $u'_s$  augmente et de même pour  $R_2$ ; le gain de la chaîne directe valant  $H_0 = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ , il diminue et l'amplitude de  $u_s$  décroît.

→ Si l'amplitude de  $u_s$  diminue (oscillations amorties,  $H_0$  trop petit),  $u'_s$  diminue et de même pour  $R_2$ ; le gain de la chaîne directe valant  $H_0 = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ , il augmente et l'amplitude de  $u_s$  croît.

**L'asservissement est donc bien réalisé.**

- Pour obtenir le gain de la chaîne directe, il suffit de remplacer  $R_2$  par sa nouvelle expression avec  $u'_s = V_m$ , c'est à dire :

$$H_0 = 1 + \frac{R_1}{R} (1 - kV_m)$$

D'après l'expression de l'équation différentielle, on sait que les oscillations purement sinusoïdales sont associées à la condition  $H_0 F_0 = 1$ , c'est à dire :

$$F_0 \left( 1 + \frac{R_1}{R} (1 - kV_m) \right) = 1$$

C'est à dire :

$$V_m = \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{R}{R_1} \left( \frac{1 - F_0}{F_0} \right) \right]$$

- Application numérique :

$$V_m = \frac{1}{0,1} \left[ 1 - \frac{900}{2000} \left( \frac{1 - 1/3}{1/3} \right) \right] \Rightarrow V_m = 1 \text{ V}$$

La différence s'explique sans doute par le **caractère non idéal de la diode** qui possède une tension de seuil de l'ordre de 0,7 V, bien visible sur la courbe entre l'amplitude de  $u_s$  et de  $u'_s$ .

Extraits du rapport de Jury :

« Notons néanmoins qu'à la question II.A, la condition d'oscillations est généralement écrite sous la forme  $\underline{H.F} = -1$ . L'erreur de signe provient certainement d'une confusion avec les systèmes bouclés vus dans le cadre des sciences industrielles et qui font souvent appel à un soustracteur. Ce n'est pas le cas ici.

« Il est préférable d'écrire  $\underline{H}(j\omega_0)\underline{F}(j\omega_0) = 1$  plutôt que  $\underline{H.F} = 1$  ! Le caractère oscillatoire est limité à la pulsation  $\omega_0$ . »

« À la question II.B.1, pour décrire complètement la nature du filtre, il faut souligner le caractère passe-bande sans omettre de préciser aussi l'ordre du filtre. De même un diagramme de Bode comporte deux courbes : une représentative du gain et l'autre du déphasage ! Pour chaque tracé, il faut justifier la position des asymptotes. Ceci peut être fait indifféremment par une équation cartésienne de droite ou en précisant un point de cette droite et sa pente. C'est sur ce type de questions que les réponses sont souvent incomplètes. »

« À la question II.D.1, il est essentiel de mettre en évidence le phénomène de saturation sur le graphe  $u_s(u_e)$ . Il faut aussi préciser à partir de quelle valeur de  $u_e$  le système commence à saturer et délimiter ainsi la zone linéaire du montage amplificateur. Il y a parfois confusion avec le graphe d'un comparateur à hystérésis. »

« Ensuite, de nombreux candidats se sont arrêtés juste après la question II.E.1 par manque de temps. »