

Champ magnétique. Régime stationnaire.

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux propriétés topographiques du champ magnétique en régime stationnaire avec, pour objectif, de déterminer l'expression du champ dans des situations de haute symétrie. En régime stationnaire, le champ magnétique étant créé par la présence de courants électriques, nous commençons par une étude des symétries des distributions de courants.

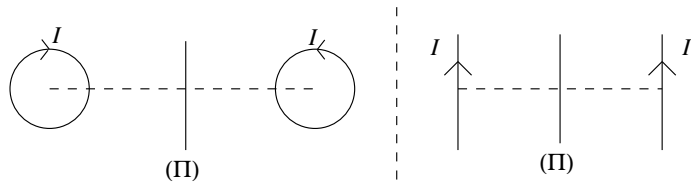
1 Symétries du champ magnétique

1.1 Symétries et invariances des courants

Symétrie plane

Une distribution de courant admet un plan de symétrie Π , si la distribution de courant, obtenue par symétrie par rapport à Π , lui est en tout point identique.

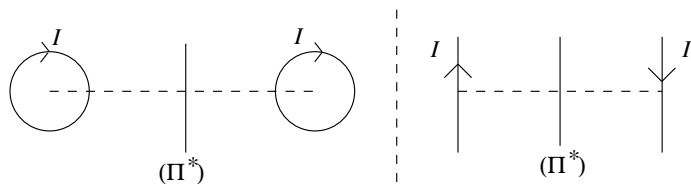
Exemple :



Antisymétrie plane

Une distribution de courant admet un plan d'antisymétrie Π^* , si la distribution de courant, obtenue par symétrie par rapport à Π^* , lui est en tout point opposée (sens de circulation du courant).

Exemple :



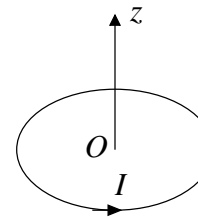
Invariance par translation

Une distribution de courants est invariante par translation selon un axe Δ si elle reste inchangée par toute translation le long de cet axe.

Invariance par rotation

Une distribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe Δ si elle reste inchangée lors d'une rotation quelconque autour de cet axe.

Exemple : une spire d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I .



1.2 Topographie du champ magnétique

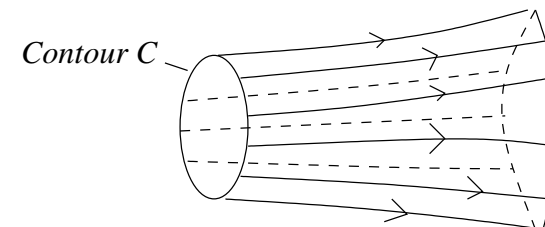
Lignes de champ magnétique

Les lignes de champ sont les lignes tangentes au champ magnétique en tout point et orientées par ce champ.

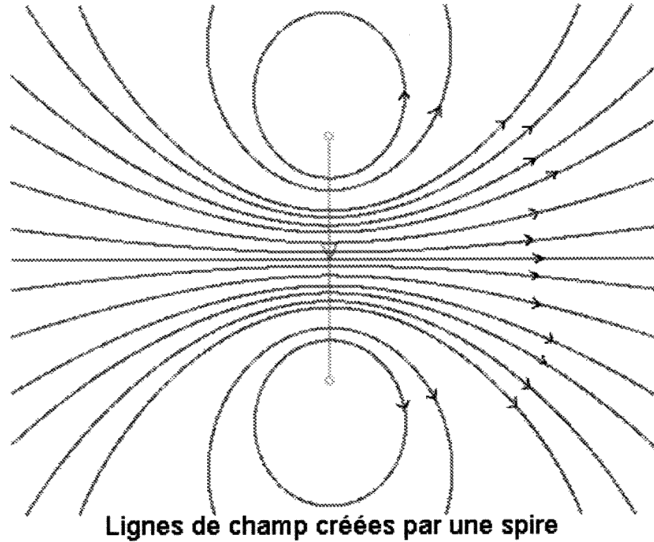
Points singuliers : si deux lignes de champ se coupent en un point, le champ est nécessairement nul en ce point.

Tubes de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour \mathcal{C} engendre une surface appelée tube de champ.



Exemple d'une carte de champ



→ Les lignes de champ magnétique se referment sur elles-mêmes en entourant les sources.

→ Des lignes de champ magnétique voisines ont tendance à s'écarter loin des sources.

Des observations de la carte de champ, on retient les propriétés suivantes :

Un plan de symétrie des courants est un plan d'antisymétrie pour le champ. **En un point d'un plan de symétrie des courants, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan.**

Un plan d'antisymétrie des courants est un plan de symétrie pour le champ. En un point d'un plan d'antisymétrie des courants, le champ magnétique est contenu dans ce plan.

Le champ magnétique est qualifié de vecteur axial.

2 Équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Ampère

2.1 Expression en régime stationnaire

Très généralement, les équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

En régime stationnaire, elles prennent la forme simplifiée :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Remarques :

→ En régime stationnaire, seuls les courants sont les sources du champ magnétique et les équations ne font pas apparaître le champ électrique ; le couplage entre champ magnétique et champ électrique disparaît.

→ Par comparaison à l'équation de Maxwell-Gauss, l'équation de Maxwell-Thomson indique l'absence de monopoles magnétiques.

2.2 Traduction intégrale des équations locales

Conservation du flux magnétique

En intégrant l'équation de Maxwell-Thomson à l'aide du théorème d'Ostrogradski, on obtient :

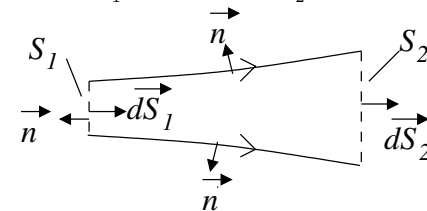
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

Le champ magnétique est à flux conservatif.

Conséquence :

Un tube de courant transporte un flux donné :

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = \Phi_2$$



La norme du champ magnétique diminuant quand on s'éloigne des sources, les lignes de champ s'évasent loin des sources (Cf. carte de champ).

Circulation du champ magnétique et théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère : la circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'un contour (C) fermé et orienté est égale à la somme algébrique des intensités des courants enlacés par (C) multipliée par μ_0 :

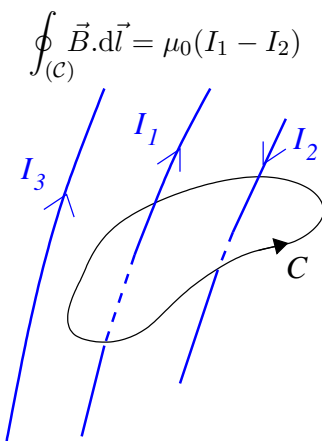
$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_{k,\text{enlacé}}$$

Remarques :

→ Le courant est compté positif s'il traverse la surface limitée par C conformément à l'orientation de C (règle du « tire-bouchon »).

→ Dans des situations de haute symétrie, le théorème d'Ampère permet de déterminer facilement le champ magnétique (Cf. théorème de Gauss pour le champ électrostatique).

★ Exemple :



Justification : à l'aide du théorème de Stokes,

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

avec Σ toute surface s'appuyant sur C et orientée conformément à C .

3 Applications du théorème d'Ampère

3.1 Méthode

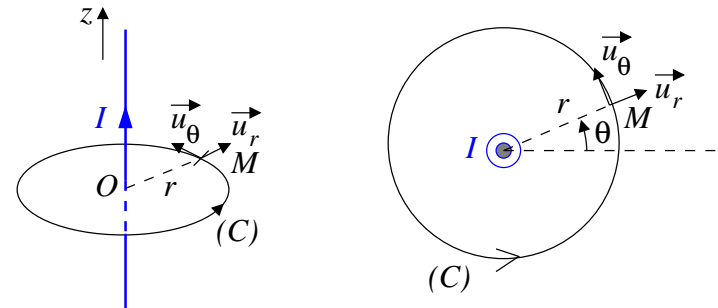
→ Étude des symétries et invariances : déterminer la direction du champ et la dépendance du champ vis à vis des coordonnées.

→ Choix du contour d'Ampère : choisir un contour C permettant un calcul élémentaire de la circulation du champ magnétique.

→ Appliquer le théorème d'Ampère et obtenir ainsi \vec{B} .

3.2 Champ magnétique créé par un fil infini

On considère un fil infini rectiligne parcouru par un courant d'intensité I ; cette situation peut modéliser le calcul d'un champ magnétique en un point proche du fil vis à vis de la longueur de la portion rectiligne de fil.



Déterminons le champ magnétique en appliquant le théorème d'Ampère.

→ Étude des symétries et invariances : tout plan méridien $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution des courants.

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B_{\theta}(r, \theta, z) \vec{u}_{\theta}$$

La distribution de courants est invariante par toute translation selon (Oz) et rotation autour de (Oz) :

$$\vec{B}(M) = B_{\theta}(r, \theta, z) \vec{u}_{\theta} = B_{\theta}(r) \vec{u}_{\theta}$$

→ Choix du contour : on considère comme contour un cercle C de rayon r centré sur l'axe (Oz) et orienté par \vec{u}_{θ} (car $\vec{B} // d\vec{l}$ et $B(r) = cste$ sur ce contour).

→ Application du théorème d'Ampère :

Calculons tout d'abord la circulation du champ magnétique sur le contour C :

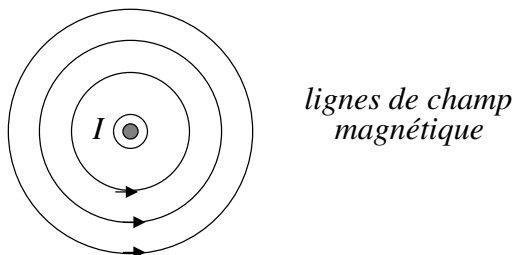
$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} B(r) \vec{u}_{\theta} \cdot dl \vec{u}_{\theta} = B_{\theta}(r) \oint_{(C)} dl = B_{\theta}(r) \times 2\pi r$$

L'application du théorème d'Ampère conduit à :

$$B_\theta(r)2\pi r = \mu_0 I \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$$

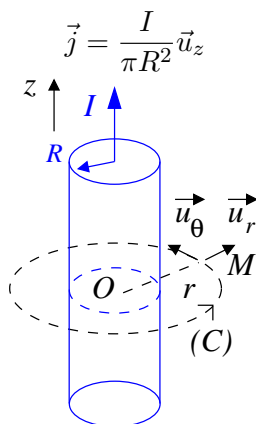
Remarques

- ★ Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil.
- ★ La divergence du champ quand $r \rightarrow 0$ s'explique par la modélisation linéique.



3.3 Champ magnétique créé par un fil infini épais

On considère un fil infini rectiligne épais de rayon R parcouru par un courant d'intensité I . On supposera un vecteur courant volumique uniforme au sein du fil :



Déterminons le champ magnétique en appliquant le théorème d'Ampère.

→ Étude des symétries et invariances : identique au cas précédent.

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

→ Choix du contour : on considère comme contour un cercle \mathcal{C} de rayon r centré sur l'axe (Oz) et orienté par \vec{u}_θ .

→ Application du théorème d'Ampère :

Calculons tout d'abord la circulation du champ magnétique sur ce contour \mathcal{C} :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \times 2\pi r$$

Il reste à déterminer le courant enlacé, pour cela on distingue deux cas :

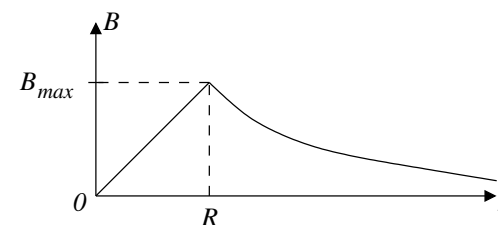
★ $r > R$, tout le fil est enlacé :

$$B_{ext}(r)2\pi r = \mu_0 I \quad \text{donc} \quad \vec{B}_{ext}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

★ $r < R$, l'intensité enlacée vaut $j \times \pi r^2 = I \times r^2 / R^2$:

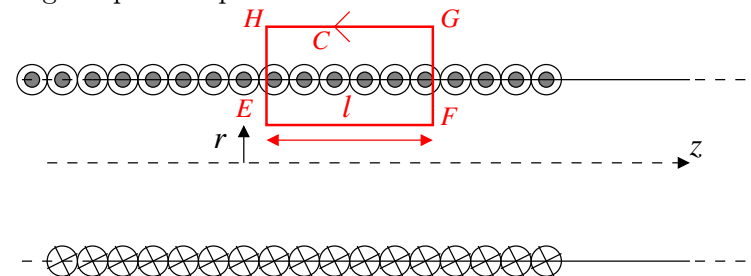
$$B_{int}(r)2\pi r = \mu_0 I \times \frac{r^2}{R^2} \quad \text{donc} \quad \vec{B}_{int}(M) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta$$

Le champ magnétique est continu en $r = R$, la divergence à l'origine a disparu. Pour le champ extérieur, tout se passe comme si le courant était concentré au centre du fil.



3.4 Champ magnétique créé par un solénoïde infini

On considère un solénoïde de longueur infinie comportant n spires par unité de longueur, chacune parcourue par un courant d'intensité I . On cherche à déterminer le champ magnétique créé par le solénoïde.



On admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

→ Étude des symétries et invariances : le solénoïde étant infini, tout plan Π perpendiculaire à l'axe (Oz) est un plan de symétrie pour la distribution des courants ;

en tout point M d'un tel plan, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan et donc parallèle à l'axe (Oz) :

$$\vec{B}(M) = B_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

La distribution de courants est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) et par toute translation selon (Oz) :

$$\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{u}_z$$

→ Choix du contour : on considère comme contour le rectangle \mathcal{C} « EFGH » .

→ Application du théorème d'Ampère :

★ Calculons tout d'abord la circulation du champ magnétique sur le contour \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_E^F \vec{B} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_F^G \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_G^H \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_H^E \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=0}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_E^F \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_E^F B_z(r)\vec{u}_z \cdot dl\vec{u}_z = B_z(r) \int_E^F dl = B_z(r) \times l$$

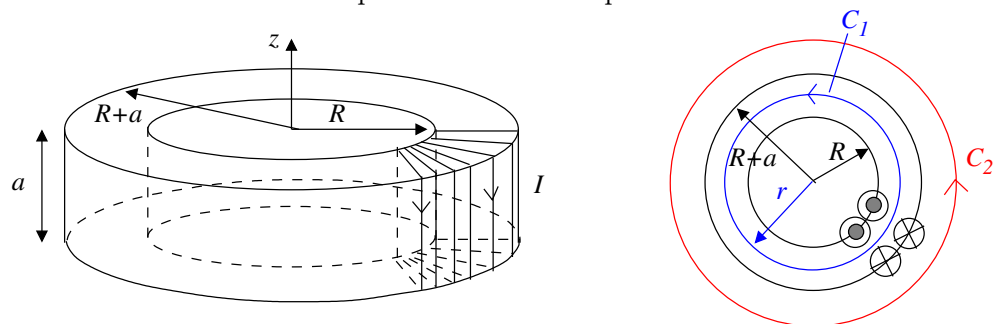
Le contour enlace $n \times l$ spires chacune parcourue par un courant d'intensité I , on en déduit :

$$B_z(r) \times l = \mu_0 \times n \times l \times I \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z}$$

On constate que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est uniforme. On note la discontinuité du champ magnétique à la traversée de la nappe de courant.

3.5 Champ magnétique créé par une bobine torique

Une bobine torique est constituée d'un fil électrique régulièrement bobiné autour d'un tore de section uniforme. Dans l'exemple présenté la section de la bobine est de forme « carré » et on compte un total de N spires bobinées.



→ Étude des symétries et invariances : tout plan méridien $\Pi = (M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ est un plan de symétrie pour la distribution des courants ; en tout point M d'un tel plan, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$$

La distribution de courants est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz)

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, z)\vec{u}_\theta$$

→ Choix du contour : on considère comme contour un cercle de rayon r .

→ Application du théorème d'Ampère :

Calculons tout d'abord la circulation du champ magnétique sur le contour \mathcal{C}_1 ou \mathcal{C}_2 :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(r, z) \times 2\pi r$$

Il reste maintenant à distinguer deux cas selon que le contour est contenu ou non dans la bobine torique.

★ Contour \mathcal{C}_1 : le courant qui traverse chacune des N spires coupe une fois le disque qui s'appuie sur le contour et ceci de manière conforme,

$$B_{int} \times 2\pi r = \mu_0 N I \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$$

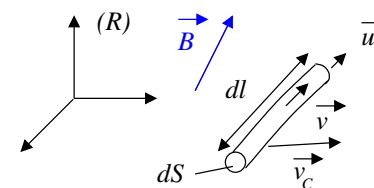
★ Contour \mathcal{C}_2 : le courant enlacé est nul ; en effet, cette fois-ci, le courant traversant chaque spire coupe deux fois le disque qui s'appuie sur le contour et ceci en sens opposé, les courants s'annulent deux à deux.

$$\boxed{\vec{B}_{ext} = \vec{0}}$$

La bobine torique canalise les lignes de champ. En faisant tendre $R \rightarrow +\infty$, tout en conservant constant le nombre de spires par unité de longueur, on retrouve le cas du solénoïde infini.

4 Forces de Laplace

4.1 Cadre de l'étude



→ On s'intéresse à un élément de conducteur électrique susceptible de se déplacer à la vitesse \vec{v}_C dans le référentiel \mathcal{R} d'étude.

→ Cet élément de conducteur est constitué d'atomes ionisés fixes par rapport au conducteur (charge $+e$, densité particulaire n) et d'électrons libres (charge $-e$, densité particulaire n) dont la vitesse d'ensemble est \vec{v} au sein du conducteur.

→ Le conducteur est placé dans un champ magnétique \vec{B} .

4.2 Force de Laplace sur une distribution volumique

La résultante des forces magnétiques qui s'exercent sur cet élément de volume $d\tau = dSdl$ se détermine en considérant la force de Lorentz qui s'exerce sur chaque particule chargée :

$$\delta\vec{F}_L = \underbrace{ndSdl \times e\vec{v}_C \wedge \vec{B}}_{\text{ions fixes dans le conducteur}} + \underbrace{ndSdl \times (-e)(\vec{v}_C + \vec{v}) \wedge \vec{B}}_{\text{électrons mobiles dans le conducteur}} = \underbrace{-ne\vec{v}}_{\vec{j}} \wedge \vec{B} d\tau$$

La force de Laplace exercée sur un élément de conducteur de volume $d\tau$ parcouru par un vecteur courant \vec{j} et plongé dans un champ magnétique \vec{B} est :

$$\delta\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

4.3 Force de Laplace sur un circuit filiforme

Dans une modélisation linéique, la distribution volumique peut être vue comme un circuit filiforme ; dans ce cas, les trois vecteurs \vec{j} , $d\vec{l} = dl\vec{u}$ et $d\vec{S} = dS\vec{u}$ sont parallèles et de même sens, ce qui permet d'écrire :

$$\vec{j}d\tau = j\vec{u} \times dSdl = jdSdl\vec{u} = jdSd\vec{l} = \vec{j} \cdot d\vec{S}d\vec{l} = Id\vec{l}$$

La force de Laplace exercée sur un élément de conducteur de longueur dl parcouru par un courant d'intensité I et plongé dans un champ magnétique \vec{B} est :

$$\delta\vec{F}_L = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

avec $d\vec{l}$ orienté par I .

Capacités exigibles :

→ Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de courants pour en déduire les propriétés de \vec{B}

→ Énoncer les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson. Particulariser l'équation de Maxwell-Ampère au régime stationnaire

→ Exploiter la conservation du flux magnétique et ses conséquences sur les lignes de champ magnétique.

→ Énoncer et appliquer le théorème d'Ampère.

→ Établir l'expression du champ magnétique créé par :

- un fil infini ;
- un fil épais et infini ;
- un solénoïde infini en admettant que le champ extérieur est nul ;
- une bobine torique.

→ Exprimer les forces de Laplace s'exerçant sur un conducteur filiforme, sur une distribution volumique de courant.